تطبيقات

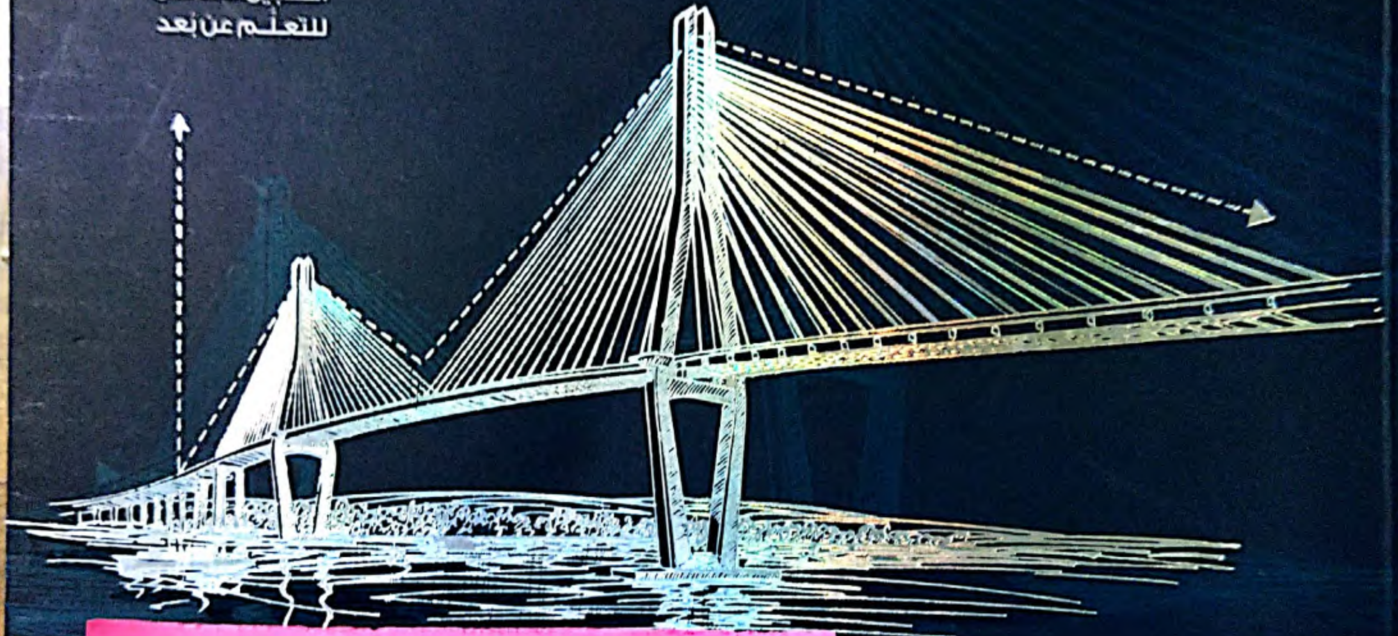
الرياضيات

الجزء الخاص

بالشرح و التمارين







موقع التفوق altFwoK.com

2022



إعداد نخبة من خبراء التعليم

الصف الثانى الثانوى

القسم العلمى

الفصل الدراسى الأول

جديد

امتحان تفاعلى إلكترونى على كل درس
باستخدام تقنية QR Code





1. قم بتحميل أحد تطبيقات
QR code reader
على هاتفك الذكى من



أو

2. افتح التطبيق وامسح
QR code
باستخدام الكاميرا الخاصة
بالهاتف
وابدأ حل الامتحان مباشرة

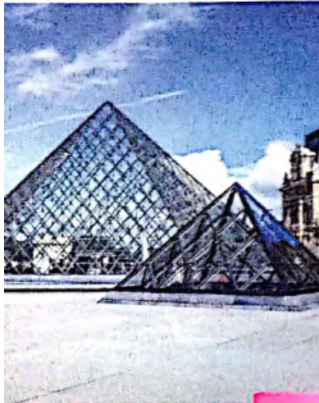
◂ بعد الانتهاء من الامتحان يمكنك معرفة نتيجتك لتقييم نفسك مع عرض تقرير مفصل بالإجابات الصحيحة.

محتويات الكتاب

الوحدة 1 الاستاتيكا



الوحدة 2 الهندسة والقياس



الوحدة 1

الاستاتيكا

* مراجعة على المتجهات

مراجعة على المتجهات

• تنقسم الكميات التى نتعامل معها فى حياتنا إلى نوعين :

١ **الكمية القياسية** : هى كمية تتعين تمامًا بعدد حقيقى هو مقدار هذه الكمية.

أى أن يلزم لتعريفها تعريفًا تامًا معرفة مقدارها فقط.

ومن أمثلتها : الطول - الكتلة - الزمن - درجة الحرارة - الحجم - المسافة.

٢ **الكمية المتجهة** : هى كمية تتعين بعدد حقيقى هو مقدار هذه الكمية بالإضافة إلى الاتجاه.

أى أن يلزم لتعريفها تعريفًا تامًا معرفة مقدار واتجاه هذه الكمية.

• **القطعة المستقيمة الموجهة** : هى قطعة مستقيمة لها نقطة بداية ونقطة نهاية واتجاه من نقطة البداية إلى نقطة النهاية.

• **معيار القطعة المستقيمة الموجهة (معيار $\overrightarrow{\text{أب}}$)** : هو طول $\overline{\text{أب}}$ ويرمز له بالرمز $\|\overrightarrow{\text{أب}}\|$

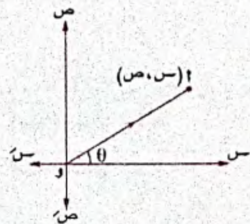
• تتكافأ القطعتان المستقيمتان الموجهتان إذا كانتا لهما نفس الطول (المعيار) ونفس الاتجاه.

• $\overrightarrow{\text{أب}} \neq \overrightarrow{\text{ب أ}}$ (لاختلافهما فى الاتجاه)

• $\overrightarrow{\text{أب}} = -\overrightarrow{\text{ب أ}}$ • $\|\overrightarrow{\text{أب}}\| = \|\overrightarrow{\text{ب أ}}\|$

• متجه الموضع لنقطة معلومة أ بالنسبة لنقطة الأصل و هو القطعة المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{\text{و أ}}$ ويرمز له بالرمز $\overrightarrow{\text{أ}}$

فمثلًا : فى الشكل المقابل :



إذا كان : $\overrightarrow{\text{و أ}}$ هو متجه الموضع لنقطة أ (س ، ص) فإن :

* $\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ = طول $\overline{\text{و أ}}$ = $\sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$

وإذا كان : $\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ = ١ وحدة طول (الوحدة)

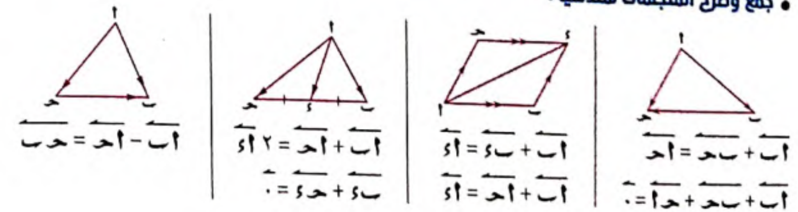
فإن $\overrightarrow{\text{أ}}$ يسمى متجه الوحدة.

- $\overrightarrow{س} = (١ ، ٠)$ ، $\overrightarrow{ص} = (٠ ، ١)$ هما متجها الوحدة الأساسيان في اتجاه محوري الإحداثيات.
- $\overrightarrow{و} = (٠ ، ٠)$ هو المتجه الصفري وهو ليس له اتجاه وأحيانًا يرمز له بالرمز $\vec{٠}$
- $\vec{أ} = (س ، ص)$ تسمى بالصورة الإحداثية للمتجه $\vec{أ}$
- $\vec{أ} = س\,\overrightarrow{س} + ص\,\overrightarrow{ص}$ تعبير عن المتجه $\vec{أ}$ بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين.
- $\vec{أ} = (\|\vec{أ}\| ، \theta)$ تسمى بالصورة القطبية للمتجه $\vec{أ}$
- θ هي قياس الزاوية التي يصنعها المتجه $\vec{أ}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وتسمى بالزاوية القطبية.
- $س = \|\vec{أ}\| \text{ جتا } \theta$ ومنها جتا $\theta = \frac{س}{\|\vec{أ}\|}$
- $ص = \|\vec{أ}\| \text{ جا } \theta$ ومنها جا $\theta = \frac{ص}{\|\vec{أ}\|}$
- إذا كان : $\vec{أ} = (س_١ ، ص_١)$ ، $\vec{ب} = (س_٢ ، ص_٢)$ فإن :
- $\vec{أ} = \vec{ب}$ إذا وإذا فقط كان $س_١ = س_٢$ ، $ص_١ = ص_٢$
- $\vec{أ} \pm \vec{ب} = (س_١ \pm س_٢ ، ص_١ \pm ص_٢)$
- $\overrightarrow{أب} = \vec{ب} - \vec{أ} = (س_٢ - س_١ ، ص_٢ - ص_١)$
- $ك\,\vec{أ} = ك\,(س ، ص) = (ك\,س ، ك\,ص)$
- $\vec{أ} \,//\, ك\,\vec{أ}$ مع مراعاة أن :

إذا كان :
- $ك > ٠$ فإن $\vec{أ}$ ، $ك\,\vec{أ}$ لهما نفس الاتجاه
- $ك < ٠$ فإن $\vec{أ}$ ، $ك\,\vec{أ}$ متضادان في الاتجاه

حيث $ك \neq$ صفر

- **جمع وطرح المتجهات هندسيًا :**



تطبيقات فيزيائية

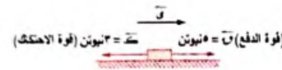
القوة المحصلة $\vec{ح}$

- محصلة القوى المؤثرة على جسم تخضع لعملية جمع المتجهات



أي أن القوة المحصلة $\vec{ح} = \vec{ق_١} + \vec{ق_٢} + \vec{ق_٣} + \ldots$

فمثلا إذا حددنا متجه وحدة $\vec{ى}$ في اتجاه حركة الجسم فإنه في حالة :

حركة جسم على مستوى خشن	الحركة الرأسية
	
القوة المحصلة $\vec{ح} = ٥\,\vec{ى} + (-٣\,\vec{ى}) = ٢\,\vec{ى}$	القوة المحصلة $\vec{ح} = ٥٠\,\vec{ى} + (-٣٠\,\vec{ى}) = ٢٠\,\vec{ى}$
أي أن	**أي أن**
• مقدار المحصلة = ٢ نيوتن	• مقدار المحصلة = ٢٠ ث كجم
• اتجاه المحصلة في اتجاه حركة الجسم	• اتجاه المحصلة في اتجاه وزن الجسم

- إذا كانت القوتان متساويتين في المقدار ولهما نفس خط العمل وفي اتجاهين متضادين فإن القوة المحصلة $(\vec{ح}) = \vec{٠}$
- إذا كانت محصلة عدة قوى متلاقية في نقطة واحدة $= \vec{٠}$

هذا يعني أن مجموعة هذه القوى متزنة.

مثال ١

١ اكتب المتجه $\vec{أ} = (٣ ، -\sqrt{٣})$ بالصورة القطبية.

٢ اكتب بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين المتجه $\vec{أ}$ الذي معياره ١٠ وحدات طول ويعمل في اتجاه الشمال الغربي.

الحل

١ ∵ ‖أ‖ = √(٩ + ٣) = ٢ √٣ ، ∴ جتا θ = س / ‖أ‖ = ٣ / (٢ √٣) = √٣ / ٢ > ٠

، جا θ = ص / ‖أ‖ = −√٣ / (٢ √٣) = −١/٢ < ٠ ∴ θ تقع فى الربع الرابع.

∴ θ = ٣٦٠° − ٣٠° = ٣٣٠° ∴ أ = (٢ √٣ ، ٣٣٠°)

٢ ∵ ‖أ‖ = ١٠ ، θ = ١٣٥°

، ∵ س = ‖أ‖ جتا θ = ١٠ جتا ١٣٥° = − ٥ √٢

، ص = ‖أ‖ جا θ = ١٠ جا ١٣٥° = ٥ √٢

∴ أ = (−٥ √٢ ، ٥ √٢) ∴ أ = −٥ √٢ س + ٥ √٢ ص

مثال ٢

إذا كانت القوى : ق١ = ٢ س + ٣ ص ، ق٢ = أ س + ص

، ق٣ = ٥ س + ب ص تؤثر فى نقطة مادية.

أوجد قيمتى أ ، ب إذا كانت هذه القوى :

١ محصلتها ٥ س − ٢ ص ٢ متزنة.

الحل

المحصلة = ق١ + ق٢ + ق٣ = (٢ س + ٣ ص) + (أ س + ص) + (٥ س + ب ص)

= (٢ + أ + ٥) س + (٣ + ١ + ب) ص

= (٧ + أ) س + (٤ + ب) ص

١ ∵ المحصلة = ٥ س − ٢ ص

∴ (٧ + أ) س + (٤ + ب) ص = ٥ س − ٢ ص

∴ ٧ + أ = ٥ ∴ أ = −٢

، ٤ + ب = −٢ ∴ ب = −٦

٢ ∵ القوى متزنة ∴ المحصلة = ٠

∴ (٧ + أ) س + (٤ + ب) ص = ٠ ∴ أ = −٧ ، ب = −٤

تمارين تراكمية على المتجهات

• تذكر • فهم • تطبيق ∴ مستويات عليا من أسئلة الكتاب المدرسى

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) معيار المتجه أ = −٣ س + ٤ ص هو .... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ١

(٢) الصورة الإحداثية للمتجه ب = (٥ √٢ ، ٢٢٥°) هى ....

(أ) (٥ ، ٥) (ب) (−٥ ، −٥) (جـ) (٥ ، −٥) (د) (−٥ ، ٥)

(٣) قياس الزاوية القطبية للمتجه ب = − س + √٣ ص يساوى ....

(أ) ٦٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

(٤) الصورة القطبية للمتجه أ = √٢ س + √٢ ص هى ....

(أ) (٢ ، ١٣٥°) (ب) (٤ ، ٤٥°) (جـ) (٢ ، ٤٥°) (د) (٤ ، ١٣٥°)

(٥) الصورة القطبية للمتجه م = ٥ س + ١٢ ص هى ....

(أ) (١٧ ، ٦٧° ٢٢َ ٤٨ً) (ب) (١٧ ، ٢٢° ٣٧َ ١٢ً)

(جـ) (١٣ ، ٦٧° ٢٢َ ٤٨ً) (د) (١٣ ، ٢٢° ٣٧َ ١٢ً)

(٦) المتجه الذى يعبر عن قوة مقدارها ٢٠ ث.كجم فى اتجاه ٣٠° جنوب الشرق يكتب على الصورة الإحداثية كالآتى ....

(أ) (١٠ ، −١٠ √٣) (ب) (١٠ √٣ ، −١٠)

(جـ) (−١٠ ، ١٠ √٣) (د) (١٠ √٣ ، ١٠)

(٧) إذا كانت : ق = ك س + ٢ √٢ ص وكان ‖ق‖ = ٢ √٣ نيوتن فإن : |ك| = ...

(أ) ٦ √٢ (ب) ٢ √٦ (جـ) −٢ (د) ٢

(٨) إذا كان : ق١ = (٥ ، −٣) ، ق٢ = (٧ ، ٤) فإن محصلة القوتين ح = ...

(أ) س + ١٢ ص (ب) ٩ س + ٤ ص

(جـ) ٣٥ س − ١٢ ص (د) ١٢ س + ص

(٩) إذا كان ق١ = ٥ س ، ق٢ = ٧ س − ٥ ص فإن |ح| = ... وحدة قوة.

(أ) ١٢ (ب) ٥ (جـ) ١٣ (د) √٧٢

(١٠) إذا كانت ق١ = ٢ س + ٣ ص ، ق٢ = س + ص

فإن مقدار محصلتهما .... وحدة قوة.

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٧

(١١) قوتان مقدارهما ٥ نيوتن ، ٧ نيوتن تؤثران فى اتجاه الشرق فإن مقدار المحصلة = ...

(أ) ١٢ نيوتن فى اتجاه الشرق. (ب) ٢ نيوتن فى اتجاه الشرق.

(جـ) ١٢ نيوتن فى اتجاه الغرب. (د) ٢ نيوتن فى اتجاه الغرب.

(١٢) إذا كانت ق١ ، ق٢ ، ق٣ ثلاث قوى متزنة ومتلاقية فى نقطة بحيث :

ق١ = (٢ ، −٥) ، ق٢ = (−٣ ، ٢) فإن : ق٣ = ...

(أ) (٢ ، ١) (ب) (−١ ، −٣) (جـ) (١ ، ٣) (د) (٣ ، ١)

(١٣) إذا كانت مجموعة القوى : ق١ = أ س + ٧ ص ، ق٢ = −٥ س − ب ص

، ق٣ = س + ص متزنة فإن : (أ ، ب) = ...

(أ) (٢ ، ٤) (ب) (١ ، ٢) (جـ) (−٤ ، −٨) (د) (٤ ، ٨)

(١٤) إذا كانت مجموعة القوى : ق١ = ٤ س − ٥ ص ، ق٢ = أ س + ٢ ص

، ق٣ = ٧ س − ب ص متزنة فإن : أ + ب = ...

(أ) ١٣ (ب) −١٣ (جـ) −١١ (د) −٢

(١٥) إذا أثرت القوى : ق١ = ٤ س + ٥ ص ، ق٢ = أ س − ٧ ص ، ق٣ = ٢ س + ب ص

فى نقطة مادية وكانت القوى متزنة فإن : أ + ٢ ب = ...

(أ) −٥ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) −٣

(١٦) إذا كان : ق١ = ٢ س − ٢ ص ، ق٢ = ٤ س − ٨ ص

، محصلتهما ح = ٢ أ س − ٣ ب ص فإن : أ + ب = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ ١/٢ (جـ) ٦ ١/٢ (د) ١٢

(١٧) إذا كانت ق١ = ٥ س + ٢ ص ، ق٢ = أ س + ١٠ ص ، ق٣ = −١٤ س + ب ص

ثلاث قوى متلاقية فى نقطة ، ح = (١٠√٢ ، ٣/٤ ط) فإن (أ ، ب) = ...

(أ) (−١ ، ١) (ب) (٢ ، ١) (جـ) (−١ ، ٢) (د) (٦ ، −١)

(١٨) فى الشكل المقابل :

إذا كانت المجموعة متزنة

فإن : ق = ... وحدة قوة.

(أ) ٤ (ب) ٧ (جـ) ٢.٥ (د) ٣.٥

٢ اكتب بدلالة متجه الوحدة ى محصلة القوى الموضحة بكل شكل من الأشكال التالية :

٣٠ نيوتن ، ١٢ نيوتن

• المحصلة هى ....

٢٠ ث.كجم ، ٢٥ ث.كجم

• المحصلة هى ....

ث.كجم ، ٣٠ ث.كجم

• المحصلة هى ....

٣ فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء متوازى أضلاع م نقطة تلاقى قطريه.

أكمل :

• أ ب + ب حـ = ...

• ء أ + ء حـ = ...

• أ م + حـ م = ...

• أ ب + ٢ ب م = ...

• أ ب − أ م = ...



الدرس 1 القوى - محصلة قوتين متلاقيتين فى نقطة

القـــوة

القوة : هى تأثير أحد الأجسام الطبيعية على جسم طبيعى آخر.

ويكون التأثير بالدفع أو الجذب أو الضغط أو التنافر

، والجسم الطبيعى هو جسم يتكون من مادة وله حجم لا يساوى الصفر.

والأجسام الطبيعية تنقسم إلى نوعين :

- أجسام جاسئة (متماسكة) وهى التى لا يتغير شكلها مهما كانت القوى المؤثرة عليها مثل المعادن الصلبة أو الصخور أو ...
- أجسام قابلة للتشكل فيتغير شكلها تحت تأثير القوى مثل الخيوط والسوائل والغازات بأنواعها والمطاط والصلصال.

وستقتصر دراستنا فى هذه الوحدة على الأجسام الجاسئة فقط.

أنواع القوى

هناك أنواع مختلفة للقوى أهمها :

١ **قوى الشد (ش)** : مثل القوة التى تظهر فى الخيط (أو الحبل) عند تعليق جسم فيه.

٢ **قوى الضغط (ض)** : مثل القوة التى تظهر عند ارتكاز جسم على سطح.

٣ **قوة رد الفعل (ر)** : كما فى حالة رد فعل سطح أملس على جسم مرتكز عليه.

٤ **قوى الجذب والتنافر** : مثل القوى التى تنشأ بين الأقطاب المغناطيسية والشحنات الكهربية والأجرام السماوية.



٥ **قوى التثاقل (أو الوزن)** : إذا ترك جسم فى الهواء فإنه يتحرك ساقطاً نحو سطح الأرض إذ أن الأرض تجذب جميع الأجسام نحوها بقوة تسمى «قوة جذب الأرض» أو «قوة التثاقل» أو «وزن الجسم».

• لاحظ أن : قوة الوزن (و) = كتلة الجسم × عجلة الجاذبية الأرضية = ك × د

التعبير عن القوة

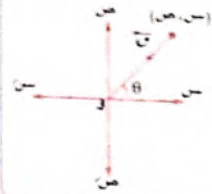
القوة كمية متجهة لذلك يمكن كتابتها بنفس طرق التعبير عن المتجه.

أى أن متجه القوة يمكن التعبير عنه كالتالى :

١ $\vec{ق}$ = (س ، ص) ⇐ الصورة الإحداثية.

٢ $\vec{ق}$ = س $\vec{سَ}$ + ص $\vec{صَ}$ ⇐ بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين.

٣ $\vec{ق}$ = ($\|\vec{ق}\|$ ، θ) ⇐ الصورة القطبية.



تعيين القوة

القوة هى متجه يتميز بأنه يمر بنقطة محددة أى أنه يعمل فى خط مستقيم معلوم :

أى أن القوة تتعين تماماً بمعرفة

١ مقدار القوة. ٢ اتجاه القوة. ٣ نقطة تأثير القوة.

فمثلاً :

لاعب كرة القدم يركل الكرة بقوة معينة (مقدار القوة) فى اتجاه معين (اتجاه القوة) وفى موضع معين على سطح الكرة (نقطة تأثير القوة)



١ وحدات قياس مقدار القوة

- يقاس مقدار القوة (القيمة العددية للقوة) بوحدات تسمى وحدات تثاقلية مثل :

ثقل الجرام (ث.جم) ، ثقل الكيلو جرام (ث.كجم)

حيث ١ ث.كجم = ١٠٠٠ ث.جم = $١٠^{٣}$ ث.جم

- كما توجد وحدات أخرى لقياس مقدار القوة تسمى وحدات مطلقة مثل : الداين ، النيوتن

حيث ١ نيوتن = ١٠٠٠٠٠ داين = $١٠^{٥}$ داين

- وترتبط الوحدات التثاقلية بالوحدات المطلقة بالعلاقة :

١ ث.كجم = ٩,٨ نيوتن
١ ث.جم = ٩٨٠ داين
(ما لم يذكر خلاف ذلك)

١ اتجاه القوة

- اتجاه القوة هو اتجاه المتجه الذى يمثل هذه القوة ، ويتحدد بقياس الزاوية القطبية لمتجه القوة فى حالة القوى المؤثرة فى مستوى واحد.
- والزاوية القطبية هى الزاوية الموجهة الموجبة التى يصنعها المتجه مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

٢ نقطة تأثير القوة

يتوقف تأثير القوة على نقطة تأثيرها.

فإذا حاولت مثلًا فتح باب الحجرة أو غلقه بالضغط بقوة قريبة من خط المفصلات فإنك تجد صعوبة كبيرة ، وتتلاشى هذه الصعوبة كلما ابتعدت عن خط المفصلات كما فى الشكل المقابل.

خط عمل القوة

خط عمل القوة هو الخط المستقيم المار بنقطة تأثيرها والموازى لاتجاهها.

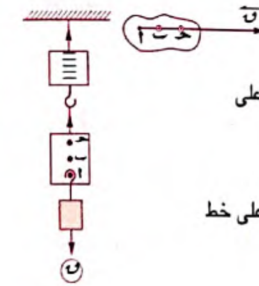
فمثلًا :

- خط عمل الشد فى خيط هو الخيط نفسه.
- خط عمل قوة وزن الجسم هو الخط الرأسى المار بمركز ثقل الجسم.



«نقل نقطة تأثير القوة» أو مبدأ «نفاذ القوة»

إذا أثرت قوة ق فى جسم متماسك وكانت نقطة تأثيرها أ فإنه يمكن نقل نقطة التأثير إلى أى نقطة أخرى موجودة على الجسم ب، حـ أو ... على خط عمل ق دون أن يغير ذلك من تأثيرها على الجسم أى أن أية نقطة موجودة على الجسم على خط عمل قوة يمكن اعتبارها نقطة تأثير لهذه القوة.



محصلة قوتين متلاقيتين فى نقطة

محصلة قوتين أو أكثر هى قوة واحدة تحدث نفس التأثير الذى تحدثه هاتان القوتان أو مجموعة هذه القوى.

إيجاد محصلة قوتين متلاقيتين فى نقطة هندسيا

وتعتمد هذه الطريقة على قاعدة متوازى الأضلاع لجمع قوتين :

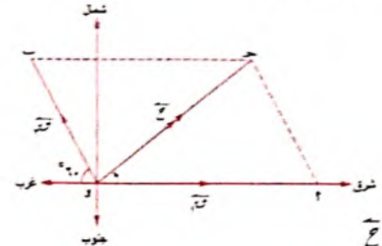
«فإذا مُثلت قوتان ق١ ، ق٢ متلاقيتان فى نقطة مقدارًا واتجاهًا بضلعى متوازى أضلاع يبدآن من هذه النقطة فإن محصلتهما (ح) تمثل مقدارًا واتجاهًا بقطر متوازى الأضلاع الذى يبدأ من نفس النقطة».

أى أن ح = ق١ + ق٢

مثال ١

ق١ ، ق٢ قوتان تؤثران فى نقطة (و) من جسم متماسك حيث ق١ = ٥٠٠ نيوتن وتعمل فى اتجاه الشرق ، ق٢ = ٣٠٠ نيوتن وتعمل فى اتجاه ٦٠° شمال الغرب. أوجد محصلتهما بيانيًا.

الحل



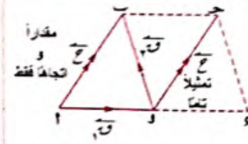
- نختار مقياس رسم ١ سم لكل ١٠٠ نيوتن
- نرسم و أ يمثل ق١ ، و ب يمثل ق٢
  حيث ‖و أ‖ = ٥ سم ، ‖و ب‖ = ٣ سم
- نكمل متوازى الأضلاع و أ حـ ب فيكون و حـ يمثل المحصلة ح
- بالقياس نجد أن : ‖و حـ‖ = ٤,٤ سم تقريبًا ، ق(∠ أ و حـ) = ٣٧°

∴ ح تؤثر فى (و) ومقدارها ٤٤٠ نيوتن فى اتجاه ٣٧° شمال الشرق تقريبًا.

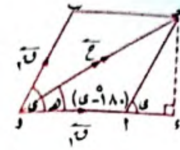
ملاحظة

إذا كانت ق١ ، ق٢ تؤثران فى نقطة (و) ومثلناهما تمثيلاً تامًا (أى مقدارًا واتجاهًا وخط عمل) بالمتجهين و أ ، و ب

كما فى الشكل المقابل فطبقًا لقاعدة جمع متجهين يكون أ ب ممثلاً لمحصلة هذين المتجهين. ولكن خط عمل محصلة القوتين ق١ ، ق٢ يجب أن يمر بالنقطة (و) نقطة تأثيرهما ، لذلك نرسم من (و) قطعة مستقيمة موجهة و حـ تكافئ أ ب فتكون هى التى تمثل محصلة القوتين تمثيلاً تامًا.



إيجاد محصلة قوتين متلاقيتين فى نقطة تحليليًا



نفرض أن $\vec{\text{ق}}_1$ ، $\vec{\text{ق}}_2$ قوتان متلاقيتان فى نقطة (و)

وأن قياس الزاوية بين اتجاهى القوتين = ى

فإذا كان $\overrightarrow{\text{و أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{و ب}}$ تمثلان $\vec{\text{ق}}_1$ ، $\vec{\text{ق}}_2$ فإن $\overrightarrow{\text{و حـ}}$ تمثل المحصلة $\vec{\text{ح}}$

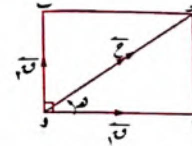
وإذا فرضنا أن هـ هو قياس الزاوية التى تصنعها المحصلة $\vec{\text{ح}}$ مع القوة $\vec{\text{ق}}_1$ فإنه كما سبق فى دراسة قاعدة جيب التمام فى حساب المثلثات يمكن إيجاد محصلة القوتين $\vec{\text{ق}}_1$ ، $\vec{\text{ق}}_2$ مقدارًا واتجاهًا من العلاقتين الآتيتين :

$$\text{ح} = \sqrt{\text{ق}_1^2 + \text{ق}_2^2 + 2\,\text{ق}_1\,\text{ق}_2 \text{ جتا ى}} \quad ، \quad \text{ظا هـ} = \frac{\text{ق}_2 \text{ جا ى}}{\text{ق}_1 + \text{ق}_2 \text{ جتا ى}}$$

حيث ق$_1$ ، ق$_2$ ، ح مقادير القوى $\vec{\text{ق}}_1$ ، $\vec{\text{ق}}_2$ ، $\vec{\text{ح}}$

حالات خاصة

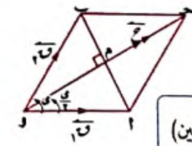
١ إذا كانت القوتان متعامدتين (أى أن : ى = ٩٠°) :



∴ جتا ى = ٠ ، جا ى = ١ وبالتعويض فى العلاقتين السابقتين

نجد أن $\text{ح} = \sqrt{\text{ق}_1^2 + \text{ق}_2^2}$ ، $\text{ظا هـ} = \frac{\text{ق}_2}{\text{ق}_1}$

٢ إذا كانت القوتان متساويتين فى المقدار (أى أن : ق$_1$ = ق$_2$ = ق) :



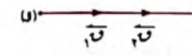
فى هذه الحالة يتحول متوازى الأضلاع و أ حـ ب إلى معين

ويكون ح = و حـ = ٢ و م = ٢ و أ جتا $\frac{\text{ى}}{2}$ = ٢ ق جتا $\frac{\text{ى}}{2}$

أى أن ح = ٢ ق جتا $\frac{\text{ى}}{2}$ ، هـ = $\frac{\text{ى}}{2}$ (حيث $\vec{\text{ح}}$ تنصف الزاوية بين القوتين)

• لاحظ أن : إذا كانت ى = ١٢٠° فإن : ح = ق

٣ إذا كانت القوتان لهما نفس خط العمل وفى نفس الاتجاه (أى أن : ى = ٠°) :



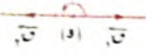
∴ جتا ى = ١ وبالتعويض

$$\therefore \text{ح} = \sqrt{\text{ق}_1^2 + \text{ق}_2^2 + 2\,\text{ق}_1\,\text{ق}_2 \times 1} = \sqrt{(\text{ق}_1 + \text{ق}_2)^2} = \text{ق}_1 + \text{ق}_2$$

أى أن ح = ق$_1$ + ق$_2$ ويكون اتجاه المحصلة فى نفس اتجاه خط عمل القوتين.

• وتسمى ح فى هذه الحالة أكبر محصلة أو القيمة العظمى للمحصلة.

٤ إذا كانت القوتان لهما نفس خط العمل وفى اتجاهين متضادين (أى أن : ى = ١٨٠°) :



∴ جتا ى = -١ وبالتعويض

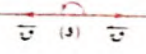
$$\therefore \text{ح} = \sqrt{\text{ق}_1^2 + \text{ق}_2^2 + 2\,\text{ق}_1\,\text{ق}_2 \times (-1)} = \sqrt{\text{ق}_1^2 + \text{ق}_2^2 - 2\,\text{ق}_1\,\text{ق}_2}$$

$$= \sqrt{(\text{ق}_1 - \text{ق}_2)^2} = |\text{ق}_1 - \text{ق}_2|$$

أى أن ح = |ق$_1$ - ق$_2$| ويكون اتجاه المحصلة فى اتجاه القوة الأكبر مقدارًا.

• وتسمى ح فى هذه الحالة أصغر محصلة أو القيمة الصغرى للمحصلة.

٥ إذا كانت القوتان متساويتين فى المقدار ولهما نفس خط العمل وفى اتجاهين متضادين :

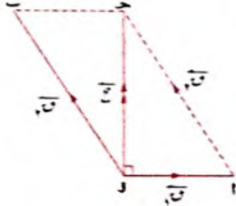


فى هذه الحالة يكون : ق$_1$ = ق$_2$ = ق ، ى = ١٨٠°

∴ جتا ى = -١ ∴ $\text{ح} = \sqrt{\text{ق}^2 + \text{ق}^2 - 2\,\text{ق}^2} = 0$

∴ ح = صفر **أى أن** المحصلة هى المتجه الصفرى.

٦ إذا كانت المحصلة عمودية على القوة الأولى (أى أن : هـ = ٩٠°) :



∵ هـ = ٩٠° ∴ $\text{ح}^2 = \text{ق}_2^2 - \text{ق}_1^2$ (من فيثاغورس)

، ظتا هـ = صفر ∴ $\frac{\text{ق}_1 + \text{ق}_2 \text{ جتا ى}}{\text{ق}_2 \text{ جا ى}}$ = صفر

∴ ق$_1$ + ق$_2$ جتا ى = صفر

∴ جتا ى = $\frac{-\text{ق}_1}{\text{ق}_2}$ ∴ ى زاوية منفرجة ، ق$_2$ > ق$_1$

أى أن المحصلة عندما تكون عمودية على إحدى القوتين فإنها دائمًا تكون متعامدة مع القوة الصغرى.

مثال ٢

قوتان مقدارهما ٥ ، ٣ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية والزاوية بين اتجاهيهما قياسها ٦٠°

أوجد مقدار واتجاه محصلتهما تحليليًا.

الحل

∵ $\text{ح} = \sqrt{\text{ق}_1^2 + \text{ق}_2^2 + 2\,\text{ق}_1\,\text{ق}_2 \text{ جتا ى}}$ ∴ $\text{ح} = \sqrt{25 + 9 + 2 \times 5 \times 3 \times \text{جتا } 60°} = 7$ نيوتن

، ∵ $\text{ظا هـ} = \frac{\text{ق}_2 \text{ جا ى}}{\text{ق}_1 + \text{ق}_2 \text{ جتا ى}}$ ∴ $\text{ظا هـ} = \frac{3 \text{ جا } 60°}{5 + 3 \text{ جتا } 60°} = \frac{3\sqrt{3}}{13}$ ∴ هـ = ٤٧َ ٢١°

∴ المحصلة $\vec{\text{ح}}$ مقدارها ٧ نيوتن وتميل على القوة الأولى بزاوية قياسها ٤٧َ ٢١°

مثال ٣

قوتان متعامدتان مقداراهما ٦ ، ٢,٥ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية أوجد مقدار واتجاه محصلتهما.

الحل

∵ $\text{ح} = \sqrt{\text{ق}_1^2 + \text{ق}_2^2}$ ∴ $\text{ح} = \sqrt{(6)^2 + (2{,}5)^2} = 6{,}5$ نيوتن

، ∵ $\text{ظا هـ} = \frac{\text{ق}_2}{\text{ق}_1}$ ∴ $\text{ظا هـ} = \frac{2{,}5}{6} = \frac{5}{12}$ ∴ $\text{هـ} \simeq 22^\circ\ 37'$

∴ المحصلة $\overrightarrow{\text{ح}}$ مقدارها ٦,٥ نيوتن وتميل على القوة الأولى بزاوية قياسها $22^\circ\ 37'$

مثال ٤

قوتان مقداراهما ٥٠ ، ١٠٠ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية ومحصلتهما عمودية على القوة الأولى أوجد قياس الزاوية بينهما ومقدار المحصلة.

الحل

∵ $\text{ق}_1 = 50$ نيوتن ، $\text{ق}_2 = 100$ نيوتن ، ∵ المحصلة عمودية على القوة الأولى.

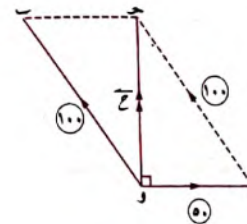
∴ $\text{ق}_1 + \text{ق}_2 \text{ جتا ى} = 0$ ∴ $50 + 100 \text{ جتا ى} = 0$

∴ $\text{جتا ى} = \frac{-50}{100} = \frac{-1}{2}$ ∴ $\text{ق}(\angle \text{ى}) = 120^\circ$

، ∵ $\text{ح} = \sqrt{\text{ق}_1^2 + \text{ق}_2^2 + 2\,\text{ق}_1\,\text{ق}_2 \text{ جتا ى}}$

∴ $\text{ح} = \sqrt{(50)^2 + (100)^2 + 2 \times 50 \times 100 \text{ جتا } 120^\circ} = 50\sqrt{3}$ نيوتن

حل اخر:



بفرض أن $\overrightarrow{\text{و أ}}$ يمثل القوة التى مقدارها ٥٠ نيوتن

، $\overrightarrow{\text{و ب}}$ يمثل القوة التى مقدارها ١٠٠ نيوتن

، ∵ المحصلة عمودية على القوة الأولى

∴ Δ و أ حـ قائم الزاوية فى و ∴ $\text{جتا أ} = \frac{\text{و أ}}{\text{أ حـ}} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$

∴ $\text{ق}(\angle \text{أ}) = 60^\circ$ ∴ $\text{ق}(\angle \text{أ و ب}) = 120^\circ$ وهو قياس الزاوية بين القوتين.

، ∵ $\text{ح}^2 = (100)^2 - (50)^2$ ∴ $\text{ح} = \sqrt{(100)^2 - (50)^2} = 50\sqrt{3}$ نيوتن

مثال ٥

قوتان تؤثران فى نقطة مادية ، فإذا كانت أكبر قيمة لمحصلتهما ٣٢ ث.كجم وكانت أصغر قيمة لمحصلتهما ١٢ ث.كجم أوجد مقدار كل من القوتين ثم أوجد مقدار محصلتهما إذا كان قياس الزاوية بين القوتين = ٦٠°

الحل

بفرض أن القوة الكبرى = ق_1 ، القوة الصغرى = ق_2

∴ $\text{ق}_1 + \text{ق}_2 = 32$ (١) ، $\text{ق}_1 - \text{ق}_2 = 12$ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) معًا : ∴ $\text{ق}_1 = 22$ ث.كجم ، $\text{ق}_2 = 10$ ث.كجم

وإذا كان : $\text{ق}(\angle \text{ى}) = 60^\circ$

∴ $\text{ح} = \sqrt{(22)^2 + (10)^2 + 2 \times 22 \times 10 \text{ جتا } 60^\circ} = 2\sqrt{201}$ ث.كجم

مثال ٦

قوتان متساويتان فى المقدار محصلتهما $70\sqrt{3}$ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٦٠°

أوجد مقدار كل من القوتين.

الحل

∵ القوتين متساويتان فى المقدار ∴ $\text{ح} = 2\,\text{ق جتا} \frac{\text{ى}}{2}$

∴ $70\sqrt{3} = 2\,\text{ق جتا } 30^\circ$ ∴ $\text{ق} = 70$ نيوتن

∴ القوتان هما ٧٠ نيوتن ، ٧٠ نيوتن.

مثال ٧

قوتان مقداراهما ٦ ، ق ث.كجم تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٣٥° أوجد مقدار المحصلة إذا كان خط عمل المحصلة يميل بزاوية قياسها ٤٥° على القوة ق

الحل

∵ $\text{ظا هـ} = \frac{\text{ق}_1 \text{ جا ى}}{\text{ق}_2 + \text{ق}_1 \text{ جتا ى}}$ حيث هـ هى الزاوية التى تميل بها المحصلة على القوة ق_2

∴ $\text{ظا } 45^\circ = \frac{6 \text{ جا } 135^\circ}{\text{ق} + 6 \text{ جتا } 135^\circ}$ ∴ $1 = \frac{3\sqrt{2}}{\text{ق} - 3\sqrt{2}}$

∴ $\text{ق} - 3\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ ∴ $\text{ق} = 6\sqrt{2}$ ث.كجم

، ∵ $\text{ح} = \sqrt{\text{ق}_1^2 + \text{ق}_2^2 + 2\,\text{ق}_1\,\text{ق}_2 \text{ جتا ى}}$

∴ $\text{ح} = \sqrt{(6)^2 + (6\sqrt{2})^2 + 2 \times 6 \times 6\sqrt{2} \text{ جتا } 135^\circ} = 6$ ث.كجم

مثال ٨

قوتان متلاقيتان فى نقطة مادية مقداراهما ٤ ق ، ٣ ق أوجد قياس الزاوية بينهما إذا كان مقدار محصلتهما $\sqrt{13}$ ق

الحل

$\because \text{ح}^2 = \text{ق}_1^2 + \text{ق}_2^2 + 2\,\text{ق}_1\,\text{ق}_2 \text{ جتا ى}$

$\therefore (\sqrt{13}\,\text{ق})^2 = (4\,\text{ق})^2 + (3\,\text{ق})^2 + 2 \times 4\,\text{ق} \times 3\,\text{ق} \text{ جتا ى}$

$\therefore 13\,\text{ق}^2 = 16\,\text{ق}^2 + 9\,\text{ق}^2 + 24\,\text{ق}^2 \text{ جتا ى}$ $\qquad \therefore -12\,\text{ق}^2 = 24\,\text{ق}^2 \text{ جتا ى}$

$\therefore \text{جتا ى} = \frac{-12\,\text{ق}^2}{24\,\text{ق}^2} = \frac{-1}{2}$ $\qquad \therefore \text{ق}(\angle \text{ى}) = 120^\circ$

مثال ٩

أثرت قوتان فى نقطة مادية مقداراهما ٧ ، ق ث.كجم وقياس الزاوية بين خطى عملهما 120° فإذا كان مقدار محصلتهما $7\sqrt{3}$ ث.كجم فأوجد مقدار ق وقياس الزاوية التى تميل بها المحصلة على اتجاه القوة الأولى.

الحل

$\because \text{ح}^2 = \text{ق}_1^2 + \text{ق}_2^2 + 2\,\text{ق}_1\,\text{ق}_2 \text{ جتا ى}$

$\therefore (7\sqrt{3})^2 = (7)^2 + (\text{ق})^2 + 2 \times 7 \times \text{ق} \text{ جتا } 120^\circ$

$\therefore 147 = 49 + \text{ق}^2 - 7\,\text{ق}$ $\qquad \therefore \text{ق}^2 - 7\,\text{ق} - 98 = 0$

$\therefore (\text{ق} - 14)(\text{ق} + 7) = 0$ $\qquad \therefore \text{ق} = 14$ ثقل كجم.

$\because \text{ظا هـ} = \frac{\text{ق}_2 \text{ جا ى}}{\text{ق}_1 + \text{ق}_2 \text{ جتا ى}}$ $\qquad \therefore \text{ظا هـ} = \frac{14 \times \text{جا } 120^\circ}{7 + 14 \times \text{جتا } 120^\circ} = \frac{7\sqrt{3}}{0}$ (غير معرفة)

$\therefore \text{ظتا هـ} = \text{صفر}$ $\qquad \therefore \text{هـ} = 90^\circ$

أى أن المحصلة عمودية على القوة الأولى.

مثال ١٠

قوتان مقداراهما ٥ ، $5\sqrt{2}$ ثقل كجم تؤثران فى نقطة مادية الأولى نحو الشرق والثانية فى اتجاه الشمال الغربى أثبت أن محصلتهما مقدارها يساوى مقدار القوة الأولى وأوجد قياس الزاوية التى تميل بها المحصلة على كل من القوتين.

الحل

شمال ، شرق ، غرب ، جنوب ، 135° ، 45° ، $\overrightarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_2}$

$\text{ق}_1 = 5$ ث.كجم ، $\text{ق}_2 = 5\sqrt{2}$ ث.كجم ، ومن الرسم $\text{ى} = 135^\circ$

$\because \text{ح} = \sqrt{\text{ق}_1^2 + \text{ق}_2^2 + 2\,\text{ق}_1\,\text{ق}_2 \text{ جتا ى}}$

$\therefore \text{ح} = \sqrt{25 + 50 + 2 \times 5 \times 5\sqrt{2} \times \text{جتا } 135^\circ}$

$\therefore \text{ح} = 5 \text{ ث.كجم} = \text{ق}_1$

$\because \text{ظا هـ} = \frac{\text{ق}_2 \text{ جا ى}}{\text{ق}_1 + \text{ق}_2 \text{ جتا ى}}$ ، $\qquad \therefore \text{ظا هـ} = \frac{5\sqrt{2} \times \text{جا } 135^\circ}{5 + 5\sqrt{2} \text{ جتا } 135^\circ} = \frac{5}{\text{صفر}}$ (غير معرفة)

$\therefore \text{ظتا هـ} = \text{صفر}$ $\qquad \therefore \text{هـ} = 90^\circ$

$\therefore \overrightarrow{\text{ح}}$ عمودية على اتجاه $\overrightarrow{\text{ق}_1}$ أى نحو الشمال وتميل على اتجاه $\overrightarrow{\text{ق}_2}$ بزاوية قياسها $135^\circ - 90^\circ = 45^\circ$

مثال ١١

قوتان متساويتان فى المقدار ومتلاقيتان فى نقطة ومقدار محصلتهما يساوى ٨ نيوتن وإذا عكس اتجاه إحداهما فإن مقدار المحصلة يساوى ٦ نيوتن. أوجد مقدار كل من القوتين.

الحل

$\text{ح}_1 = 2\,\text{ق} \text{ جتا } \frac{\text{ى}}{2} = 8$

$\therefore \text{ق} \text{ جتا } \frac{\text{ى}}{2} = 4$ $\qquad (1)$

$\text{ح}_2 = 2\,\text{ق} \text{ جتا } \left(\frac{180^\circ - \text{ى}}{2}\right) = 6$ ،

$\therefore \text{ق} \text{ جا } \frac{\text{ى}}{2} = 3$ $\qquad (2)$

الحالة الأولى ، الحالة الثانية

بتربيع المعادلتين (١) ، (٢) ثم الجمع

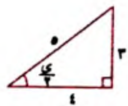
$\therefore \text{ق}^2 \text{ جتا}^2 \frac{\text{ى}}{2} + \text{ق}^2 \text{ جا}^2 \frac{\text{ى}}{2} = 16 + 9$

$\therefore \text{ق}^2 \left(\text{جتا}^2 \frac{\text{ى}}{2} + \text{جا}^2 \frac{\text{ى}}{2}\right) = 25$ $\qquad \therefore \text{ق}^2 = 25$

$\therefore \text{ق} = 5$ نيوتن $\qquad \therefore$ مقدار القوتين ٥ ، ٥ نيوتن

* لاحظ أنه يمكن حل المعادلتين كما يلى

بقسمة المعادلة (٢) على المعادلة (١)



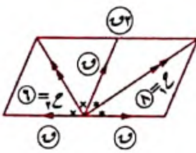
$\therefore \text{ظا } \frac{\text{ى}}{2} = \frac{3}{4}$ $\qquad \therefore \text{جا } \frac{\text{ى}}{2} = \frac{3}{5}$

بالتعويض فى معادلة (٢)

$\therefore \text{ق} \times \frac{3}{5} = 3$ $\qquad \therefore \text{ق} = 5$ نيوتن

$\therefore$ مقدار القوتين ٥ ، ٥ نيوتن

حل اخر هندسيًا : $\because$ القوتان متساويتان



$\therefore$ كل من $\overrightarrow{\text{ح}_1}$ ، $\overrightarrow{\text{ح}_2}$ تنصف الزاوية بين القوتين

$\therefore \overrightarrow{\text{ح}_1} \perp \overrightarrow{\text{ح}_2}$ $\qquad \therefore (\text{ح}_1)^2 + (\text{ح}_2)^2 = (2\,\text{ق})^2$

$\therefore 64 + 36 = 4\,\text{ق}^2$ $\qquad \therefore \text{ق}^2 = 25$

$\therefore \text{ق} = 5$ $\qquad \therefore$ مقدار القوتين ٥ ، ٥ نيوتن



تمارين 1 على القوى - محصلة قوتين متلاقيتين فى نقطة

• تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا • من أسئلة الكتاب المدرسى

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) القوة تتعين تمامًا بمعرفة ....

(أ) مقدار القوة. (ب) اتجاه القوة. (جـ) نقطة تأثير القوة. (د) جميع ما سبق.

(٢) قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ٥ ، ٣ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٦٠°

فإن مقدار محصلتهما ح = ... نيوتن.

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٨

(٣) قوتان مقداراهما ٨ $\sqrt{٣}$ ، ٨ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وتحصران بينهما زاوية قياسها ١٥٠°

فإن مقدار محصلتهما = ... نيوتن.

(أ) ٦٤ (ب) ٣٢ (جـ) ١٦ (د) ٨

(٤) قوتان متعامدتان مقداراهما ١٢ نيوتن ، ٥ نيوتن تؤثران فى نقطة

فإن مقدار محصلتهما = ... نيوتن.

(أ) ١٧ (ب) ٧ (جـ) ١٣ (د) ١٤

(٥) القوتان ٦ نيوتن ، ٨ نيوتن محصلتهما يمكن أن تكون .... نيوتن.

(أ) ٢٠ (ب) ١٥ (جـ) ١٢ (د) ١

(٦) قوتان مقداراهما ٤ ، ٥ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وجيب تمام الزاوية بينهما $\frac{-٢}{٥}$

فإن مقدار محصلتهما ح = ... نيوتن.

(أ) ١٥ (ب) ٥ (جـ) ٢٠ (د) ٢٥

(٧) قوتان متلاقيتان فى نقطة مادية مقداراهما ٦ ، ٣ نيوتن والمحصلة عمودية على إحداهما

فإن مقدار المحصلة = ... نيوتن.

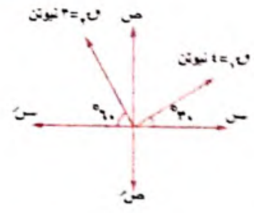
(أ) ٣ (ب) ٣ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٦ (د) ٦ $\sqrt{٣}$

(٨) قوتان قياس الزاوية بينهما θ فإن مقدار محصلتهما ....

(أ) يزداد كلما زادت قيمة θ (ب) تتضاعف بتضاعف قيمة θ

(جـ) يزداد كلما نقصت قيمة θ (د) لا يتغير بتغير قيمة θ

(٩) فى الشكل المقابل :



محصلة القوتين المبينتين فى الشكل

تساوى .... نيوتن.

(أ) ٧ (ب) ٥

(جـ) ١ (د) $\sqrt{٧}$

(١٠) فى الشكل المقابل :



مقدار محصلة القوتين = ... نيوتن.

(أ) ٢ ق (ب) ق

(جـ) $\sqrt{٣}$ ق (د) صفر

(١١) مقدار محصلة القوتين فى الشكل المقابل هو ....



(أ) $\frac{١}{٢}$ ق (ب) ق

(جـ) $\sqrt{٣}$ ق (د) $\sqrt{٢}$ ق

(١٢) إذا كانت محصلة القوتين $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ تنصف الزاوية بينهما فأى الجمل الآتية صحيحة ؟

(I) $ق_١ = ق_٢$ (II) $\overrightarrow{ق_١} = \overrightarrow{ق_٢}$ (III) $\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ق_١} + \overrightarrow{ق_٢}$

(أ) I فقط. (ب) I ، III فقط.

(جـ) II ، III فقط. (د) كل ما سبق صحيح.

(١٣) قوتان مقداراهما ق ، ٢ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ٦٠°

إذا كانت محصلتهما ٢ $\sqrt{٣}$ نيوتن فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٢

(١٤) قوتان مقداراهما ق ، ٢ نيوتن وقياس الزاوية بينهما = $\frac{٢\pi}{٣}$ ومقدار محصلتهما ق نيوتن

فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٢ $\sqrt{٣}$

(١٥) قوتان متساويتان فى المقدار وقياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{٢}$ ومقدار محصلتهما ٨ نيوتن

فإن مقدار كل قوة منهما يساوى .... نيوتن.

(أ) ٢ $\sqrt{٢}$ (ب) ٤ (جـ) ٤ $\sqrt{٢}$ (د) ٨

(١٦) قوتان متساويتان فى المقدار محصلتهما = ٧ $\sqrt{٣}$ نيوتن وقياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{٣}$

فإن مقدار كل منهما يساوى .... نيوتن.

(أ) ٣ (ب) ٥ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٥ (د) ٧

(١٧) قوتان مقدارهما ق ، ق ث.جم ومقدار محصلتهما ٢٤ نيوتن وتميل على القوة الأولى بزاوية قياسها ٣٠°

فإن : ق = ... ث.جم.

(أ) ٨ (ب) ٨ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٨ $\sqrt{٢}$ (د) ١٢

(١٨) إذا كان : ق ، ٢ مقدارى قوتين تؤثران فى جسيم وتحصران بينهما زاوية قياسها ١٢٠° ، المحصلة تنصف الزاوية المحصورة بين القوتين فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) $\sqrt{٣}$ (د) $\frac{١}{٢}$

(١٩) قوتان مقدارهما ٨ ، ق ث.جم وقياس الزاوية بينهما ∈]٠ ، π[، محصلتهما تنصف الزاوية بينهما

فإن : ق = ... ث.جم.

(أ) ٤ (ب) ١٦ (جـ) ٢ $\sqrt{٢}$ (د) ٨

(٢٠) قوتان مقدارهما ٣ نيوتن ، ق نيوتن وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° ، إذا كانت محصلتهما عمودية على القوة الأولى فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ١,٥ (ب) ٣ (جـ) ٣ $\sqrt{٣}$ (د) ٦

(٢١) قوتان متعامدتان مقدارهما (٢ ق − ٥) ، (ق + ٢) نيوتن ومقدار محصلتهما ٣ $\sqrt{٥}$ نيوتن

فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٧ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٣

(٢٢) قوتان مقدارهما ٦ نيوتن ، ١٠ نيوتن ومقدار محصلتهما ١٤ نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما يساوى ....

(أ) ١٥° (ب) ٣٠° (جـ) ٦٠° (د) ٤٥°

(٢٣) قوتان متساويتان متلاقيتان فى نقطة مقدار كل منهما ٦ نيوتن ومقدار محصلتهما ٦ نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

(٢٤) قوتان مقدارهما ٦ نيوتن ، ٨ نيوتن محصلتهما ٢ نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما ....

(أ) ٣٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٨٠° (د) ٢٧٠°

(٢٥) قوتان مقدارهما ٦ ، ٢,٥ نيوتن ومحصلتهما تساوى ٦,٥ نيوتن فإن الزاوية بين القوتين تكون ....

(أ) حادة. (ب) منفرجة. (جـ) قائمة. (د) مستقيمة.

(٢٦) قوتان مقدارهما ٢ ق ، ٥ ق نيوتن وقياس الزاوية بينهما ى ومقدار محصلتهما ٣ ق

فإن : ى = ...

(أ) صفر° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٨٠°

(٢٧) قوتان مقدارهما ٣ ق ، ق نيوتن محصلتهما ٤ ق نيوتن يكون قياس الزاوية بينهما ....

(أ) ٦٠° (ب) صفر° (جـ) ١٨٠° (د) ٩٠°

(٢٨) قوتان مقدارهما ق ، ق تؤثران فى نقطة مادية ومحصلتهما مقدارها ق فإن قياس الزاوية بين القوتين يساوى ....

(أ) ١٢٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٤٥° (د) ٩٠°

(٢٩) قوتان مقدارهما ق ، ق $\sqrt{٣}$ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية ، فإذا كان مقدار محصلتهما ٢ ق نيوتن فإن قياس الزاوية بين اتجاهى هاتين القوتين يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

(٣٠) إذا كانت : $\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ق_١} + \overrightarrow{ق_٢}$ ولكن $\|\overrightarrow{ح}\| = \|\overrightarrow{ق_١}\| - \|\overrightarrow{ق_٢}\|$

فإن قياس الزاوية بين $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ يساوى ....

(أ) صفر (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{\pi}{٢}$ (د) π

(٣١) إذا بلغت محصلة قوتين تؤثران فى نقطة قيمتها العظمى فإن قياس الزاوية بين خطى عملهما يساوى ....

(أ) ١٨٠° (ب) ١٢٠° (جـ) صفر° (د) ٦٠°

(٣٢) قياس الزاوية بين $\overrightarrow{ق_١}$ ومحصلة القوتين $(\overrightarrow{ق_١} + \overrightarrow{ق_٢})$ ، $(\overrightarrow{ق_١} - \overrightarrow{ق_٢})$ هو ....

(أ) صفر° (ب) π (جـ) $\frac{\pi}{٢}$ (د) $\frac{\pi}{٣}$

(٣٣) إذا كانت $\overrightarrow{ح_١}$ هى محصلة القوتين $(\overrightarrow{ق_١} ، \overrightarrow{ق_٢})$ ، $\overrightarrow{ح_٢}$ هى محصلة القوتين $(\overrightarrow{ق_١} ، -\overrightarrow{ق_٢})$ ، $\|\overrightarrow{ق_١}\| = \|\overrightarrow{ق_٢}\|$

فإن : ....

(أ) $\overrightarrow{ح_١} \perp \overrightarrow{ح_٢}$ (ب) $\overrightarrow{ح_١} = \overrightarrow{ح_٢}$

(جـ) $\|\overrightarrow{ح_١}\| = \|\overrightarrow{ح_٢}\|$ (د) $\overrightarrow{ح_١} // \overrightarrow{ح_٢}$

(٣٤) قوتان مقدارهما ٤ ، ٦ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٩٠° فإن ظل زاوية ميل محصلتهما على القوة الأولى يساوى ....

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) ٢ $\sqrt{١٣}$ (د) $\frac{\sqrt{٦}}{٢}$

(٣٥) قوتان متعامدتان مقدارهما ٦ ، ٨ نيوتن فإن قياس زاوية ميل محصلتهما على القوة الأولى هو ....

(أ) جا$^{-١}$ $\frac{٤}{٣}$ (ب) جتا$^{-١}$ $\frac{٤}{٣}$ (جـ) ظا$^{-١}$ $\frac{٤}{٣}$ (د) ظا$^{-١}$ $\frac{٣}{٤}$

(٣٦) قوتان مقدارهما ق ، ٢ ق نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وكانت المحصلة عمودية على إحداهما

فإن : ح = ...

(أ) $\sqrt{٥}$ ق (ب) $\sqrt{٣}$ ق (جـ) ٢ ق (د) ق

(٣٧) قوتان مقداراهما ٣ $\sqrt{2}$ ، ٦ نيوتن وقياس الزاوية بينهما = ١٣٥° فإن قياس الزاوية بين محصلتهما والقوة الثانية = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

(٣٨) قوتان مقداراهما ١٢ ، ١٥ نيوتن تؤثران فى جسيم وتحصران زاوية قياسها هـ° بحيث جتا هـ = $-\frac{٤}{٥}$
فإن قياس الزاوية المحصورة بين المحصلة والقوة الأولى = ...

(أ) صفر° (ب) ٣٠° (جـ) ٩٠° (د) ٣٦° ٥٢َ

(٣٩) قوتان تؤثران فى نقطة مادية مقداراهما ٥ ، ٨ نيوتن فإن أصغر قيمة للمحصلة = ... نيوتن.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٧ (د) ١٣

(٤٠) قوتان مقداراهما ٩ ، ٦ نيوتن فإن القيمة العظمى لمحصلتهما .... نيوتن.

(أ) ٢٠ (ب) ٣٠ (جـ) ١٠ (د) ١٥

(٤١) القيمة العظمى والصغرى على الترتيب لمحصلة قوتين ٨ ، ١٣ نيوتن هى .... نيوتن.

(أ) ١٢ ، ٨ (ب) ١٣ ، ٥ (جـ) ٢١ ، ٨ (د) ٢١ ، ٥

(٤٢) قوتان مقداراهما ٥ ، ق نيوتن أصغر محصلة لهم ١٠ نيوتن ، ق > ٥ فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٦ (ب) ١٠ (جـ) ١٥ (د) ٢٠

(٤٣) قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ٥ ق ، ٣ ق فإذا كانت القيمة العظمى لمحصلتهما ٤٠ نيوتن فإن القيمة الصغرى لمحصلتهما .... نيوتن.

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٥ (د) صفر

(٤٤) قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ٥ نيوتن ، ٣ نيوتن
فإن مقدار محصلتهما مقاسة بالنيوتن ∋ ....

(أ) [٢ ، ٨] (ب)]٢ ، ٨[(جـ) [٣ ، ٥] (د)]٣ ، ٥[

(٤٥) إذا كانت ى الزاوية بين قوتين مقداراهما ٢ نيوتن ، ٦ نيوتن ، ى ∋]٠ ، π[
فإن مقدار محصلة القوتين مقاسة بالنيوتن ∋ ....

(أ)]٤ ، ٨[(ب) [٤ ، ٨[(جـ)]٤ ، ٨] (د) [٤ ، ٨]

(٤٦) قوتان متساويتان فى المقدار ومقدار محصلتهما ١٦ نيوتن عندما كان قياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{٢}$
فإن القيمة العظمى لمحصلتيهما تساوى .... نيوتن.

(أ) ٣٢ (ب) ٨ $\sqrt{2}$ (جـ) ١٦ $\sqrt{2}$ (د) صفر

(٤٧) قوتان مقداراهما $ق_١$ ، $ق_٢$ ث.جم حيث $ق_١$ > $ق_٢$ ومقدار أصغر وأكبر محصلة لهما ٣ ، ١٢ ث.جم على الترتيب فإن : $ق_١^٢ - ق_٢^٢$ = ...

(أ) ١٢ (ب) ٣ (جـ) ٩ (د) ٣٦

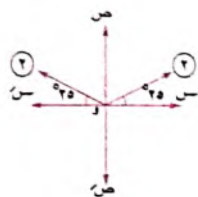
(٤٨) قوتان مقداراهما ١٢ ، ١٧ نيوتن فإن الفرق بين أكبر قيمة وأقل قيمة للمحصلة = ... نيوتن.

(أ) ٢٩ (ب) ٥ (جـ) ١٤ (د) ٢٤

(٤٩) قوتان مقداراهما ق ، $\sqrt{3}$ ق نيوتن متلاقيتان فى نقطة وكان مقدار محصلتهما $ح_١$ عندما كان قياس الزاوية بينهما ٩٠° ثم أصبح مقدار محصلتهما $ح_٢$ عندما كان قياس الزاوية بينهما ١٥٠°
فإن : ....

(أ) $ح_١ = ح_٢$ (ب) $ح_١ = ٢ ح_٢$ (جـ) $ح_١ = \frac{٣}{٥} ح_٢$ (د) $ح_١ = \frac{١}{٢} ح_٢$

(٥٠) محصلة القوى فى الشكل المقابل تؤثر فى اتجاه ....



(أ) $\overrightarrow{وس}$
(ب) $\overrightarrow{وسَ}$
(جـ) $\overrightarrow{وص}$
(د) $\overrightarrow{وصَ}$

(٥١) قوتان متلاقيتان فى نقطة ومقدار أصغر وأكبر محصلة لهما ٠ ، ١٢ نيوتن على الترتيب فإن القوتين ....

(أ) مقدار إحداهما ثلاث أمثال الأخرى. (ب) مقدار إحداهما ضعف الأخرى.
(جـ) متساويتان فى المقدار. (د) متعامدتان.

ثانيا الأسئلة المقالية

١ أوجد مقدار واتجاه محصلة قوتين متعامدتين مقداراهما ٨ ، ١٥ ث.كجم وتؤثران فى نقطة مادية.

«١٧ ث.كجم ، هـ = ٦١° ٥٥َ ٣٩ً»

٢ قوتان تؤثران فى نقطة مادية فإذا كانت أكبر قيمة لمحصلتهما = ١٧ ث.كجم وكانت أصغر قيمة لمحصلتهما = ٧ ث.كجم أوجد مقدار كل من القوتين.

«١٢ ، ٥ ث.كجم»

٣ قوتان متساويتان فى المقدار ، مقدار محصلتهما ٤ $\sqrt{3}$ ث.كجم وقياس الزاوية بين اتجاه إحدى القوتين واتجاه المحصلة ٣٠° فما مقدار كل من هاتين القوتين ؟

«٤ ث.كجم»

٤ قوتان متعامدتان تؤثران فى نقطة مادية مقدار محصلتهما ٥٠ نيوتن فإذا كانت محصلتهما تميل على القوة الأولى بزاوية قياسها ٣٠° أوجد مقدار كل من القوتين.
«$٢٥\sqrt{٣}$ ، ٢٥ نيوتن»

٥ قوتان مقداراهما ٣٠ ، ١٦ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية ، إذا كان مقدار محصلتهما ٢٦ نيوتن. أوجد قياس الزاوية بين هاتين القوتين.
«١٢٠°»

٦ قوتان مقداراهما ٨ ، ١٦ ثقل جرام تؤثران فى نقطة مادية. أوجد قياس الزاوية بينهما إذا كانت محصلتهما عمودية على القوة الأولى.
«١٢٠°»

٧ قوتان مقداراهما ٩ ، ٦ ث.كجم تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ى أوجد قيمة (ى) إذا كانت محصلتهما مقدارها $٣\sqrt{٧}$ ث.كجم وأوجد قياس الزاوية التى تصنعها المحصلة مع القوة الكبرى.
«ى = ١٢٠° ، هـ = ٣٦ ٥٣ ٤٠°»

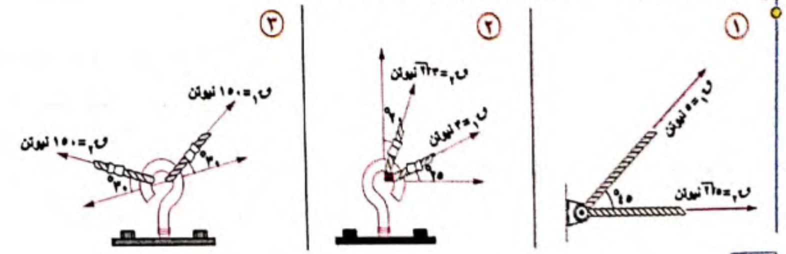
٨ أثرت قوتان فى نقطة مادية فإذا كان مقدار القوة الأولى ١٥ ث.كجم وتؤثر فى اتجاه الشرق ومقدار الثانية ١٨ ث.كجم وتؤثر فى اتجاه ٣٠° غرب الشمال. احسب مقدار واتجاه المحصلة.
«$٣\sqrt{٢١}$ ث.كجم ، هـ = ٥٤ ٥٦ ٦٨°»

٩ قوتان مقداراهما ١٢ ، ق ث.كجم تؤثران فى نقطة ، تعمل الأولى فى اتجاه الشرق وتعمل الثانية فى اتجاه ٦٠° جنوب الغرب. أوجد مقدار ق ومقدار المحصلة إذا علم أن خط عمل المحصلة يؤثر فى اتجاه ٣٠° جنوب الشرق.
«٦ ث.كجم ، $٦\sqrt{٣}$ ث.كجم»

١٠ قوتان تؤثران فى نقطة مادية وتحصران بينهما زاوية قياسها ى حيث طا ى = $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$ فإذا علم أن محصلتهما عمودية على صغراهما وأن مقدار القوة الكبرى = ٣٠ ث.كجم فما مقدار كل من القوة الصغرى والمحصلة ؟
«$١٥\sqrt{٣}$ ث.كجم ، ١٥ ث.كجم»

١١ أوجد مقدار واتجاه محصلة القوى المؤثرة فى كل من الأشكال الآتية :

① ② ③



١٢ قوتان مقداراهما ق ، ٤ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° فإذا كان مقدار محصلتهما يساوى $٤\sqrt{٣}$ نيوتن فأوجد مقدار ق وقياس الزاوية التى تصنعها المحصلة مع ق
«٨ نيوتن ، ٣٠°»

١٣ قوتان مقداراهما $\sqrt{٣}$ ق ، ٢ ق نيوتن تؤثران فى نقطة مادية. أوجد قياس الزاوية بينهما إذا كانت محصلتهما عمودية على القوة الصغرى وإذا كانت ق = ١٥ نيوتن. أوجد مقدار المحصلة.
«١٥٠° ، ١٥ نيوتن»

١٤ قوتان مقداراهما $٢\sqrt{٢}$ ، ق نيوتن تؤثران فى نقطة مادية ومقدار محصلتهما $\sqrt{٢}$ نيوتن فإذا كانت المحصلة عمودية على القوة الثانية. أوجد ق وقياس الزاوية بين القوتين.
«$\sqrt{٦}$ نيوتن ، ١٥٠°»

١٥ قوتان مقداراهما ١٦ ، ق ث.كجم تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° فإذا كانت محصلتهما تميل على القوة ١٦ ث.كجم بزاوية قياسها ٣٠° أوجد قيمة ق ومقدار محصلة القوتين.
«٨ ، $٨\sqrt{٣}$ ث.كجم»

١٦ إذا أثرت القوى الثلاث التى مقاديرها ٥ ، ١٠ ، $٤\sqrt{٧}$ نيوتن فى نقطة مادية وكان قياس الزاوية بين خطى عمل القوتين الأولى والثانية يساوى ٦٠° أوجد القيمة العظمى والصغرى لمقدار محصلة هذه القوى.
«$٩\sqrt{٧}$ ، $\sqrt{٧}$ نيوتن»

١٧ قوتان مقداراهما ٢ ق ، ٣ ق نيوتن وقياس الزاوية بينهما هـ أوجد قيمة هـ إذا كان مقدار محصلتهما :

① ٣ ق
② ق
③ ٥ ق
④ $\sqrt{١٣}$ ق

«٦٦ ٢٨ ١٠٤° ، ١٨٠° ، صفر° ، ٩٠°»

١٨ قوتان مقداراهما ٢ ، ق نيوتن والزاوية بينهما قياسها ١٢٠° أوجد قيمة ق فى كل من الحالتين الآتيتين :

① اتجاه المحصلة عمودى على القوة الثانية.
② اتجاه المحصلة يميل بزاوية قياسها ٤٥° على القوة الثانية.
«١ ، $\sqrt{٣}$ + ١ نيوتن»

١٩ قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما $ق_١$ ، $ق_٢$ نيوتن ومحصلتهما ح نيوتن حيث ح ∈ [٢ ، ١٠] ، $ق_١ > ق_٢$ أوجد قيمتى $ق_١$ ، $ق_٢$ ثم أوجد مقدار المحصلة عندما يكون قياس الزاوية بينهما ١٢٠°.
«٦ ، ٤ ، $٢\sqrt{٧}$ نيوتن»

٢٠ قوتان تؤثران فى نقطة مادية ومقدار إحداهما يزيد عن الأخرى بمقدار ٣ نيوتن ومقدار محصلتهما $٣\sqrt{٣}$ نيوتن فإذا كانت المحصلة عمودية على القوة الصغرى. أوجد مقدار كل من القوتين وقياس الزاوية بينهما.
«٣ ، ٦ نيوتن ، ى = ١٢٠°»

٢١ قوتان تؤثران فى نقطة فإذا كانت محصلتهما مقدارها $\sqrt{١٠}$ نيوتن عندما كانت الزاوية بين اتجاهيهما قائمة ويصبح مقدار المحصلة $\sqrt{١٣}$ نيوتن عندما يكون قياس الزاوية بين اتجاهى القوتين ٦٠° فما مقدار كل من القوتين ؟
«١ ، ٣ نيوتن»

٢٢ قوتان متساويتان في المقدار ومتلاقيتان في نقطة ومقدار محصلتهما يساوي ١٢ ث.كجم وإذا عكس اتجاه إحداهما فإن مقدار المحصلة يساوي ٦ ث.كجم. أوجد مقدار كل من القوتين.

٣√٥ ، ٣√٥ ث.كجم

---

٢٣ قوتان متلاقيتان في نقطة مقداراهما $ق_١$ ، $ق_٢$ وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° ومقدار محصلتهما = ح ث.جم وإذا عكس اتجاه $ق_٢$ فإن مقدار المحصلة يصبح ح √٣ ث.جم أثبت أن : $ق_١$ = $ق_٢$ وأن المحصلة في الحالة الثانية يكون اتجاهها عموديًا على اتجاه المحصلة في الحالة الأولى.

---

٢٤ قوتان ٤ ، ق نيوتن تؤثران في نقطة مادية وكانت محصلتهما ١٠ نيوتن وتعمل زاوية قياسها ٦٠° مع القوة ٤ نيوتن. أوجد : قيمة ق

٢√١٩ نيوتن

---

٢٥ قوتان متلاقيتان في نقطة ، الفرق بين مقداريهما ١٥ نيوتن ومقدار محصلتهما = ٣٥ نيوتن عندما يكون قياس الزاوية بينهما ١٢٠° أوجد مقدار كل من القوتين.

٤٠ ، ٢٥ نيوتن

---

٢٦ قوتان مجموع مقداريهما ٤ نيوتن. وعندما يكون قياس الزاوية بينهما ٦٠° فإن مقدار المحصلة يساوي √١٣ نيوتن. أوجد مقدار كل من القوتين.

١ ، ٣ نيوتن

---

٢٧ قوتان تؤثران في نقطة مادية مجموع مقداريهما ٤٠ ث.كجم ومقدار محصلتهما ٢٠ ث.كجم وعمودية على القوة ذات المقدار الأصغر. أوجد مقدار كل من القوتين وجيب تمام الزاوية بينهما.

١٥ ، ٢٥ ، $-\frac{٣}{٥}$

---

٢٨ قوتان متلاقيتان في نقطة مقداراهما $ق_١$ ، $ق_٢$ حيث $ق_١$ > $ق_٢$ وبينهما زاوية قياسها ى وعندما ى = ٩٠° تصبح محصلتهما ٥ ثقل كجم ، عندما ى = ١٢٠° تصبح محصلتهما √١٣ ثقل كجم.

أوجد مقدار كل من : $ق_١$ ، $ق_٢$

٤ ، ٣ ثقل كجم

---

٢٩ قوتان متساويتان مقدار كل منهما ق ث.كجم تحصران بينهما زاوية قياسها ١٢٠° وإذا تضاعفت القوتان وأصبح قياس الزاوية بينهما ٦٠° زادت محصلتهما بمقدار ١١ ث.كجم عن الحالة الأولى. أوجد مقدار ق

١ + ٢√٣

---

٣٠ ق ، ٢ ق قوتان تؤثران في نقطة مادية وتحصران بينهما زاوية قياسها ى ومقدار محصلتهما يساوي √٥ ق (م + ١) وإذا أصبح قياس الزاوية بينهما (٩٠° − ى) فإن مقدار المحصلة يساوي √٥ ق (م − ١)

أثبت أن : ظا ى = $\frac{م - ٢}{م + ٢}$

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت النسبة بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى لمحصلة قوتين كنسبة ٧ : ٣ فإن النسبة بين القوتين = ...

(أ) ٧ : ٤ (ب) ٧ : ٣ (جـ) ٥ : ٣ (د) ٥ : ٢

② إذا كانت النسبة بين قوتين ومحصلتهما هي ٤ : ٣ : √١٣ على الترتيب فإن قياس الزاوية بين القوتين = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

③ إذا كانت محصلة القوتين $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ عمودية على $\overleftarrow{ق_١}$ فإن قياس الزاوية بين القوتين $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ يساوي ....

(أ) جتا$^{-١}$ $\left(\frac{ق_١}{ق_٢}\right)$ (ب) جتا$^{-١}$ $\left(\frac{-ق_١}{ق_٢}\right)$ (جـ) جا$^{-١}$ $\left(\frac{ق_١}{ق_٢}\right)$ (د) جا$^{-١}$ $\left(\frac{-ق_١}{ق_٢}\right)$

④ إذا كانت محصلة قوتين متعامدتين تميل على القوة الكبرى بزاوية قياسها θ فأي القيم الآتية تصلح أن تكون قيمة لـ θ ؟

(أ) ٩٠° (ب) ٧٠° (جـ) ٤٥° (د) ١٠°

⑤ قوتان $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ تؤثران في نقطة مادية محصلتهما ح وإذا عكس اتجاه $\overleftarrow{ق_٢}$ فإن اتجاه المحصلة يدور بزاوية قياسها ٩٠° فإن : ....

(أ) $ق_١ = ق_٢$ (ب) $ق_١$ = ٢ $ق_٢$ (جـ) $ق_١ = \frac{١}{٢} ق_٢$ (د) لا شيء مما سبق.

⑥ قوتان مقداراهما ٤ ، ق نيوتن تؤثران في نقطة واحدة وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° فإن ق التي تجعل المحصلة أصغر ما يمكن تساوي ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

⑦ إذا كانت $θ_١$ هي قياس الزاوية بين محصلة القوتين ($\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$) والقوة $\overleftarrow{ق_١}$ وكانت $θ_٢$ هي قياس الزاوية بين محصلة القوتين ($\overleftarrow{ق_١}$ ، ٢ $\overleftarrow{ق_٢}$) والقوة $\overleftarrow{ق_١}$ فإن : ....

(أ) $θ_١ = θ_٢$ (ب) $θ_١ < θ_٢$ (جـ) $θ_١ > θ_٢$ (د) $θ_١ + θ_٢ = \frac{π}{٢}$

⑧ قوتان مقداراهما ق ، ق √٣ نيوتن تؤثران في نقطة مادية ومقدار محصلتهما ق نيوتن فإذا كانت $هـ_١$ هي قياس الزاوية بين ق ، ح وكانت $هـ_٢$ هي قياس الزاوية بين ق √٣ ، ح فإن : ....

(أ) $هـ_١ = هـ_٢$ (ب) $هـ_١ = \frac{١}{٢} هـ_٢$ (جـ) $هـ_١$ = ٣ $هـ_٢$ (د) $هـ_١$ = ٤ $هـ_٢$

⑨ قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما $ق_1$ ، $ق_2$ حيث $3 \le ق_1 \le 12$ ، $4 \le ق_2 \le 16$

ومقدار محصلتهما ح وقياس الزاوية بينهما $90°$ فإن : ....

(أ) $5 \le ح \le 20$ (ب) $7 \le ح \le 28$ (جـ) $0 \le ح \le 18$ (د) $1 \le ح \le 4$

⑩ قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما $ق_1$ ، $ق_2$ حيث $1 \le ق_1 \le 9$ ، $2 \le ق_2 \le 7$

ومقدار محصلتهما ح فإن : ....

(أ) $2 \le ح \le 16$ (ب) $4 \le ح \le 16$ (جـ) $6 \le ح \le 16$ (د) $0 \le ح \le 16$

⑪ قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما $ق_1$ ، $ق_2$ حيث $5 \le ق_1 \le 20$ ، $12 \le ق_2 \le 21$ وكان مقدار محصلتهما ح ، قياس الزاوية بينهما θ حيث $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ فإن : ....

(أ) $13 \le ح \le 29$ (ب) $0 \le ح \le 41$ (جـ) $13 \le ح \le 41$ (د) $17 \le ح \le 29$

---

٢ قوتان الأولى نصف الثانية فى المقدار ولهما محصلة ما فإذا زيد مقدار القوة الأولى بمقدار ٤ ثقل كجم وضوعف مقدار القوة الثانية فإن محصلتهما تظل فى نفس اتجاه المحصلة الأولى.
أوجد مقدار كل من القوتين والنسبة بين محصلتيهما فى الحالتين. «٤ ، ٨ ثقل كجم ، ١ : ٢»

---

٣ $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ متلاقيتان فى نقطة ومقدار محصلتهما = ح نيوتن وإذا عكس اتجاه $\overrightarrow{ق_2}$ فإن المحصلة تصبح $ح\sqrt{3}$ نيوتن وفى اتجاه عمودى على المحصلة الأولى.
أوجد قياس الزاوية بين القوتين. «$120°$»





الدرس **2**

تحليل القوة إلى مركبتين

تحليل قوة معلومة فى اتجاهين معلومين



نفرض أن لدينا قوة $\overrightarrow{ح}$ تؤثر فى نقطة مادية (و) ويراد تحليلها إلى مركبتين $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ حيث اتجاه المركبة الأولى يميل على اتجاه $\overrightarrow{ح}$ بزاوية $هـ_1$ واتجاه المركبة الثانية يميل على اتجاه $\overrightarrow{ح}$ بزاوية $هـ_2$ لذلك نرسم بمقياس رسم المتجه $\overrightarrow{وحـ}$ ليمثل القوة $\overrightarrow{ح}$ ثم نرسم من و الشعاعين $\overrightarrow{وس}$ ، $\overrightarrow{وص}$ يصنعان مع $\overrightarrow{وحـ}$ وفى اتجاهين مختلفين منه الزاويتين $هـ_1$ ، $هـ_2$ ونرسم من حـ موازيين لهذين الشعاعين لنحصل على متوازى الأضلاع و أ حـ ب كما فى الشكل الموضح.

فيكون المتجه $\overrightarrow{وأ}$ ممثلاً للمركبة $\overrightarrow{ق_1}$ ، والمتجه $\overrightarrow{وب}$ ممثلاً للمركبة $\overrightarrow{ق_2}$ ويكون المتجه $\overrightarrow{أحـ}$ ممثلاً للمركبة $\overrightarrow{ق_2}$ أيضًا.

ويتطبيق قانون الجيب على Δ و أ حـ حيث ق (د أ حـ و) = $هـ_2$ يكون :

جا (د و أ حـ) = جا $[180° - (هـ_1 + هـ_2)]$ = جا $(هـ_1 + هـ_2)$

$$\therefore \frac{ق_1}{\text{جا } هـ_2} = \frac{ق_2}{\text{جا } هـ_1} = \frac{ح}{\text{جا }(هـ_1 + هـ_2)}$$

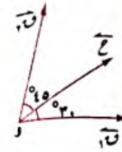
أى أن

$ق_1$ (مقدار المركبة التى تميل على $\overrightarrow{ح}$ بزاوية $هـ_1$) = $\frac{ح \times \text{جا } هـ_2}{\text{جا }(هـ_1 + هـ_2)}$

، $ق_2$ (مقدار المركبة التى تميل على $\overrightarrow{ح}$ بزاوية $هـ_2$) = $\frac{ح \times \text{جا } هـ_1}{\text{جا }(هـ_1 + هـ_2)}$

مثال ❶

حل قوة مقدارها ٢٠ نيوتن إلى مركبتين تميلان على اتجاه القوة بزاويتين قياساهما ٣٠° ، ٤٥° فى ناحيتين مختلفتين منها ثم قرب الناتج لأقرب رقم عشرى واحد.



الحـــل

$\text{ق}_1 = \dfrac{\text{ح ما هـ}_2}{\text{ما }(\text{هـ}_1 + \text{هـ}_2)} = \dfrac{\text{٢٠ ما ٤٥°}}{\text{ما ٧٥°}} \simeq \text{١٤,٦ نيوتن}$

، $\text{ق}_2 = \dfrac{\text{ح ما هـ}_1}{\text{ما }(\text{هـ}_1 + \text{هـ}_2)} = \dfrac{\text{٢٠ ما ٣٠°}}{\text{ما ٧٥°}} \simeq \text{١٠,٤ نيوتن}$

مثال ❷

فى الشكل المقابل :

مصباح وزنه ١٠ نيوتن معلق بحبلين معدنيين $\overline{\text{أحـ}}$ ، $\overline{\text{بحـ}}$ يميلان على الأفقى بزاويتين قياس كل منهما ٢٠°

١ حل وزن المصباح فى الاتجاهين $\overleftarrow{\text{أحـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{بحـ}}$

٢ ماذا يحدث لمقدار مركبة الوزن فى اتجاهى الحبلين المعدنيين إذا نقص قياس زاويته مع الأفقى عن ٢٠° ؟ وماذا تتوقع لمقدار مركبة الوزن عندما يُصبح الحبل المعدنى أفقيًا ؟

الحـــل

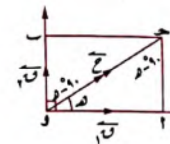
١ قوة الوزن (١٠ نيوتن) تعمل رأسيًا لأسفل.

ومن هندسة الشكل نجد أن : $\dfrac{\text{و}_1}{\text{ما ٧٠°}} = \dfrac{\text{و}_2}{\text{ما ٧٠°}} = \dfrac{١٠}{\text{ما ١٤٠°}}$

$\therefore \text{و}_1 = \text{و}_2 = \dfrac{\text{١٠ ما ٧٠°}}{\text{ما ١٤٠°}} \simeq \text{١٥ نيوتن}$

٢ إذا نقص قياس الزاوية مع الأفقى عن ٢٠° فإن مقدار المركبة يزداد حتى تصبح لا نهائية عندما تكون الحبال أفقية.

تحليل قوة معلومة فى اتجاهين متعامدين



نفرض أن لدينا قوة $\overrightarrow{\text{ح}}$ تؤثر فى نقطة مادية (و) ويراد تحليلها إلى مركبتين متعامدتين $\overrightarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_2}$ حيث اتجاه $\overrightarrow{\text{ق}_1}$ يميل على اتجاه $\overrightarrow{\text{ح}}$ بزاوية قياسها هـ فى هذه الحالة يؤول متوازى الأضلاع إلى مستطيل، وبتطبيق قانون الجيب على المثلث و أ حـ

يكون : $\dfrac{\text{ق}_1}{\text{ما }(٩٠° - \text{هـ})} = \dfrac{\text{ق}_2}{\text{ما هـ}} = \dfrac{\text{ح}}{\text{ما ٩٠°}} \quad \therefore \dfrac{\text{ق}_1}{\text{متا هـ}} = \dfrac{\text{ق}_2}{\text{ما هـ}} = \text{ح}$

$\therefore$ ق_1 (مقدار المركبة فى الاتجاه المعلوم) = ح متا هـ

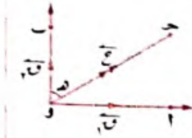
، ق_2 (مقدار المركبة فى الاتجاه العمودى على الاتجاه المعلوم) = ح ما هـ

وتسمى المركبة $\overrightarrow{\text{ق}_1}$ أحيانًا «مسقط $\overrightarrow{\text{ح}}$ فى اتجاه $\overrightarrow{\text{و أ}}$» وتسمى المركبة $\overrightarrow{\text{ق}_2}$ «مسقط $\overrightarrow{\text{ح}}$ فى اتجاه $\overrightarrow{\text{و ب}}$»

ملاحظات

١ مقدار المركبة المجاورة للزاوية المعلومة = ح × متا (هذه الزاوية)

، مقدار المركبة الأخرى العمودية على المركبة السابقة = ح × ما (هذه الزاوية).

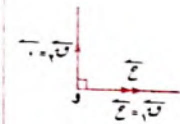


ففى الشكل المقابل :

إذا كانت المركبة $\overrightarrow{\text{ق}_1}$ تميل على اتجاه $\overrightarrow{\text{ح}}$ بزاوية قياسها هـ فإن : ق_1 = ح متا هـ ، ق_2 = ح ما هـ

٢ مركبة قوة $\overrightarrow{\text{ح}}$ فى اتجاه منطبق على خط عملها = القوة نفسها $\overrightarrow{\text{ح}}$

ومركبتها فى اتجاه عمودى على خط عملها = $\overrightarrow{0}$

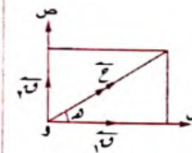


لأنه فى هذه الحالة يكون قياس الزاوية بين اتجاه $\overrightarrow{\text{ح}}$ واتجاه المركبة الأولى = ٠°

فيكون مقدار المركبة الأولى = ح متا ٠° = ح × ١ = ح

ومقدار المركبة العمودية على المركبة السابقة = ح ما ٠° = ح × ٠ = صفر

٣ إذا كان $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ص}}$ متجهى وحدة متعامدين فى اتجاهى $\overrightarrow{\text{و س}}$ ، $\overrightarrow{\text{و ص}}$ حيث و نقطة الأصل



فإن : $\overrightarrow{\text{ق}_1}$ = (ح متا هـ) $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_2}$ = (ح ما هـ) $\overrightarrow{\text{ص}}$

$\therefore$ $\overrightarrow{\text{ح}} = \overrightarrow{\text{ق}_1} + \overrightarrow{\text{ق}_2}$ = (ح متا هـ) $\overrightarrow{\text{س}}$ + (ح ما هـ) $\overrightarrow{\text{ص}}$

٤ إذا كانت : $\overrightarrow{\text{ق}}$ = (ق ، هـ°) فإن : $\overrightarrow{\text{ق}}$ = ق متا هـ° $\overrightarrow{\text{س}}$ + ق ما هـ° $\overrightarrow{\text{ص}}$

٥ إذا كانت : هـ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{2}$[فإن كلًا من مقدارى المركبتين (ح متا هـ) ، (ح ما هـ) أقل من مقدار القوة (ح) نفسها وذلك لأن هـ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{2}$[وبالتالى ٠ < ما هـ < ١ ، ٠ < متا هـ < ١

٦ إذا وضع جسم وزنه (و) على مستوى مائل على الأفقى بزاوية قياسها (هـ) فإنه يمكن تحليل الوزن (و) الذى يؤثر رأسيًا لأسفل إلى مركبتين



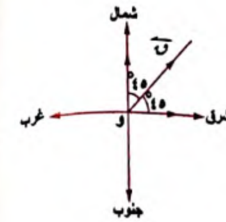
* ق_1 (مقدار المركبة فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى) = و ما هـ

* ق_2 (مقدار المركبة فى الاتجاه العمودى على المستوى) = و متا هـ

مثال ٣

حلّل قوة مقدارها $٨\sqrt{٢}$ نيوتن تؤثر فى نقطة (و) فى اتجاه الشمال الشرقى إلى مركبتين إحداهما فى اتجاه الشرق والأخرى فى اتجاه الشمال.

الحل



∵ المركبتين تميلان على اتجاه القوة بزاويتين قياساهما ٤٥° ، ٤٥° وهما متعامدتان.

∴ مقدار المركبة فى اتجاه الشرق = ق جتا ٤٥° = $٨\sqrt{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = ٨$ نيوتن.

، مقدار المركبة فى اتجاه الشمال = ق جا ٤٥° = $٨\sqrt{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = ٨$ نيوتن.

مثال ٤

حُللت قوة مقدارها $١٠\sqrt{٣}$ ثقل كجم إلى مركبتين متعامدتين مقدار إحداهما ١٥ ثقل كجم فما مقدار المركبة الأخرى ؟

الحل



نفرض أن اتجاه المركبة المعلومة المقدار ($ق_١$) يميل على اتجاه القوة بزاوية قياسها هـ

∴ مقدار هذه المركبة $ق_١$ = $١٠\sqrt{٣}$ جتا هـ

∴ ١٥ = $١٠\sqrt{٣}$ جتا هـ ∴ جتا هـ = $\frac{١٥}{١٠\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ هـ = ٣٠°

∴ مقدار المركبة الأخرى $ق_٢$ = $١٠\sqrt{٣}$ جا ٣٠° = $١٠\sqrt{٣} \times \frac{١}{٢} = ٥\sqrt{٣}$ ثقل كجم.

حل آخر :

ح = $\sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢}$ ∴ $(١٠\sqrt{٣})^٢ = (١٥)^٢ + ق_٢^٢$

∴ $ق_٢^٢ = ٧٥$ ∴ $ق_٢ = ٥\sqrt{٣}$ ثقل كجم.

مثال ٥

وضع جسم وزنه ٥٠ نيوتن على مستوٍ مائل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° أوجد مقدار مركبتى وزن الجسم فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى والاتجاه العمودى عليه.

الحل



من هندسة الشكل نلاحظ أن : ق(∠ب جـ ء) = ق(∠ب أ جـ) = ٣٠°

∴ $ق_١$ (مقدار المركبة فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى)

= و جا ٣٠° = $٥٠ \times \frac{١}{٢} = ٢٥$ نيوتن

، $ق_٢$ (مقدار المركبة فى الاتجاه العمودى على المستوى) = و جتا ٣٠° = $٥٠ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ٢٥\sqrt{٣}$ نيوتن.

تمارين 2 على تحليل القوة إلى مركبتين

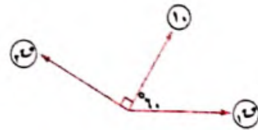


• تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا · من أسئلة الكتاب المدرسى

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

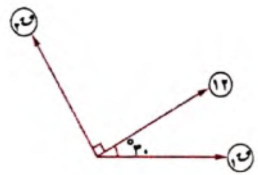
① فى الشكل المقابل :



بتحليل القوة التى مقدارها ١٠ نيوتن إلى مركبتين $ق_١$ ، $ق_٢$ اللتين تصنعان معها زاويتين قياساهما ٦٠° ، ٩٠° من جهتيها فإن : $ق_١$ = ... نيوتن.

(أ) $٥\sqrt{٣}$ (ب) ١٠ (جـ) $١٠\sqrt{٣}$ (د) ٢٠

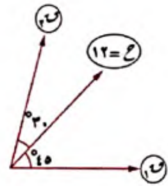
② إذا حُللت القوة التى مقدارها ١٢ نيوتن إلى مركبتين $ق_١$ ، $ق_٢$ تصنعان معها زاويتين قياساهما ٣٠° ، ٩٠° على الترتيب كما بالشكل المقابل فإن : $ق_٢$ = ... نيوتن.



(أ) ١٠ (ب) $١٠\sqrt{٣}$

(جـ) $٦\sqrt{٣}$ (د) $٤\sqrt{٣}$

③ فى الشكل المقابل :

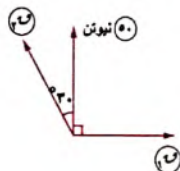


إذا حُللت القوة التى مقدارها ١٢ نيوتن إلى مركبتين $ق_١$ ، $ق_٢$ فإن : $ق_١$ = ... نيوتن.

(أ) ١٢ جا ٧٥° (ب) ١٢ جا ٤٥°

(جـ) ٦ ظا ٤٥° (د) ٦ ظا ٧٥°

④ فى الشكل المقابل :



إذا حُللت القوة التى مقدارها ٥٠ نيوتن إلى مركبتين $ق_١$ ، $ق_٢$ فإن : $ق_١ + ق_٢$ = ... نيوتن.

(أ) ٥٠ (ب) ٢٥

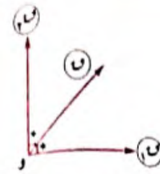
(جـ) $٥٠\sqrt{٢}$ (د) $٥٠\sqrt{٣}$

⑤ في الشكل المقابل :

إذا حُللت القوة $\vec{ق}$ إلى المركبتين المتعامدتين $\vec{ق_١}$ ، $\vec{ق_٢}$

وكان متجه القوة $\vec{ق}$ ينصف الزاوية بين اتجاهي $\vec{ق_١}$ ، $\vec{ق_٢}$

وكان $\|\vec{ق_١}\| = ٦\sqrt{٢}$ نيوتن فإن : $\|\vec{ق}\|$ = ... نيوتن.



(أ) ٦ (ب) $٦\sqrt{٢}$ (جـ) ١٢ (د) $١٢\sqrt{٢}$

⑥ في الشكل المقابل :

إذا حُللت القوة التي مقدارها ١٠٠ نيوتن إلى قوتين $ق_١$ ، $ق_٢$

وكانت القوة مقدرة بالنيوتن فإن : ($ق_١$ ، $ق_٢$) = ...



(أ) (٥٠ ، $٥٠\sqrt{٣}$) (ب) ($٥٠\sqrt{٣}$ ، ١٠) (جـ) (٥٠ ، ٥٠) (د) (١٠ ، ١٠)

⑦ في الشكل المقابل :

قوة مقدارها ٢٠ نيوتن تعمل في اتجاه ٣٠ شمال الشرق

تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مقدار مركبتها في

اتجاه الشمال = ... نيوتن.



(أ) $١٠\sqrt{٣}$ (ب) ٢٠ (جـ) ١٠ (د) ٥

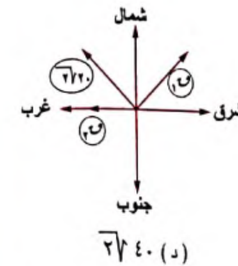
⑧ في الشكل المقابل :

حللت قوة مقدارها $٢٠\sqrt{٢}$ ث.كجم تعمل في

اتجاه الشمال الغربي إلى مركبتين إحداهما مقدارها $ق_١$

نحو الشمال الشرقي والأخرى مقدارها $ق_٢$ نحو الغرب

فإن : $ق_١$ = ... ث.كجم.



(أ) ٣٠ (ب) ٤٠ (جـ) ٥٠ (د) $٤٠\sqrt{٢}$

⑨ في الشكل المقابل :

إذا تم تحليل القوة ق إلى مركبتين في اتجاهي المحاور الأساسية

فإن مركبة القوة ق في اتجاه $\overleftarrow{و س}$ تساوي .... نيوتن.



(أ) ١٠ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) $\frac{٤٠}{٣}$

⑩ قوة مقدارها $١٠\sqrt{٢}$ ثقل جرام تعمل في اتجاه الجنوب الشرقي تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين

فإن مقدار مركبة القوة في اتجاه الجنوب = ... ثقل جرام.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) $١٠\sqrt{٢}$ (د) $٥\sqrt{٢}$

⑪ قوة مقدارها ٦ نيوتن تعمل في اتجاه الشمال تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين

فإن مركبتها في اتجاه الشرق تساوي .... نيوتن.

(أ) صفر (ب) ٣ (جـ) $٣\sqrt{٢}$ (د) ٦

⑫ قوة مقدارها $٤\sqrt{٢}$ نيوتن تعمل في اتجاه الشرق تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مركبتها في

اتجاه الشمال الشرقي تساوي .... نيوتن.

(أ) صفر (ب) $٤\sqrt{٢}$ (جـ) ٤ (د) ٦

⑬ قوة مقدارها ٦ نيوتن تعمل في اتجاه الشمال تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مركبتها في اتجاه

الشمال الشرقي تساوي .... نيوتن.

(أ) ٦ (ب) $٣\sqrt{٢}$ (جـ) $٢\sqrt{٣}$ (د) صفر

⑭ قوة مقدارها $٥\sqrt{٣}$ نيوتن تعمل في اتجاه ٣٠° شرق الشمال تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين

فإن مقدار مركبتها في اتجاه الشرق يساوي .... نيوتن.

(أ) $\frac{٥\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $\frac{١٥}{٢}$ (جـ) $\frac{١٥\sqrt{٣}}{٢}$ (د) $١٥\sqrt{٣}$

⑮ قوة مقدارها ٨ نيوتن تعمل في اتجاه الشرق ثم تحليلها إلى مركبتين قياس الزاوية بينهما ١٢٠°

فإن مركبتها في اتجاه الجنوب = ... نيوتن.

(أ) ١٦ (ب) ٨ (جـ) $٨\sqrt{٣}$ (د) $\frac{٨\sqrt{٣}}{٣}$

⑯ قوة مقدارها ٤٠ نيوتن تؤثر رأسيًا لأعلى تم تحليلها إلى مركبتين إحداهما أفقية مقدارها ٢٠ نيوتن

فإن مقدار القوة الأخرى = ... نيوتن.

(أ) ٢٠ (ب) $٢٠\sqrt{٣}$ (جـ) $٢٠\sqrt{٥}$ (د) $١٠\sqrt{٣}$

⑰ بتحليل القوة التي مقدارها ق نيوتن إلى مركبتين $ق_١$ ، $ق_٢$ اللتين تصنعان معها زاويتين قياساهما

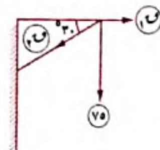
٦٠° ، ٩٠° من جهتين مختلفتين لخط عمل القوة ق على الترتيب فإن $ق_١$ = ...

(أ) ٢ ق (ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ق (جـ) $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ق (د) $\frac{١}{٢}$ ق

⑱ في الشكل المقابل :

حلل القوة الرأسية ٧٥ نيوتن إلى مركبتين أحدهما أفقية $ق_١$ والأخرى $ق_٢$

فإن : $ق_١$ = ... نيوتن.

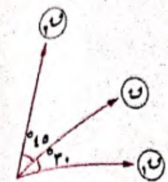


(أ) ٧٥ (ب) $٧٥\sqrt{٣}$ (جـ) ١٥٠ (د) $١٥٠\sqrt{٣}$

(١٩) فى الشكل المقابل :

القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ هى محصلة القوتين $\overrightarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_2}$

فإن : $\frac{\text{ق}_1 + \text{ق}_2}{\text{ق}}$ = ...



(أ) جا ٣٠° + جا ٤٥°　　(ب) $\frac{\text{جا ٧٥° + جا ٣٠°}}{\text{جا ٧٥°}}$

(جـ) $\frac{\text{جا ٤٥° + جا ٣٠°}}{\text{جا ٧٥°}}$　　(د) $\frac{\text{جا ٧٥°}}{\text{جا ٣٠°}} + \frac{\text{جا ٧٥°}}{\text{جا ٤٥°}}$

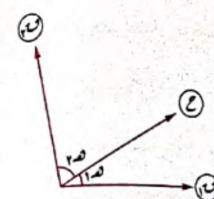
(٢٠) أ ب حـ ء هـ و شكل سداسى منتظم أثرت قوة مقدارها ٢٠ نيوتن فى اتجاه $\overrightarrow{\text{أء}}$ فإن مركبتى القوة فى اتجاهى $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{أو}}$ على الترتيب هما ....

(أ) ١٠√٣ ، ١٠　　(ب) ٥√٣ ، ١٠　　(جـ) ١٠ ، ١٠√٣　　(د) ٢٠√٣ ، ٢٠

(٢١) فى الشكل المقابل :

حُلت القوة ح إلى مركبتين ق١ ، ق٢

فإن : $\frac{\text{ق}_1}{\text{ق}_2}$ = ...



(أ) $\frac{\text{جا هـ}_2}{\text{جا هـ}_1}$　　(ب) جا $\frac{\text{هـ}_2}{\text{هـ}_1}$

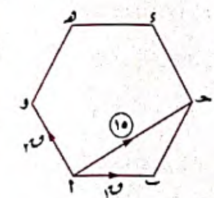
(جـ) جا (هـ٢ + هـ١)　　(د) $\frac{\text{جا هـ}_1}{\text{جا هـ}_2}$

(٢٢) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم أثرت القوة ١٥ نيوتن فى $\overrightarrow{\text{أحـ}}$

وحُلت إلى مركبتين $\overrightarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_2}$ كما بالشكل

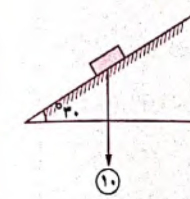
فإن : ق١ : ق٢ = ...



(أ) √٣ : ٢　　(ب) ٢ : ١　　(جـ) ١ : ٢　　(د) ١ : √٣

(٢٣) فى الشكل المقابل :

إذا وضع جسم وزنه ١٠ نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° فإن مركبة وزن الجسم فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأسفل = ... نيوتن.



(أ) ٥√٢　　(ب) ٥√٣　　(جـ) ٥　　(د) ١٠√٣

(٢٤) إذا وضع جسم وزنه (و) على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها (θ) فإن مركبة وزنه فى اتجاه المستوى = ...

(أ) و　　(ب) و جا θ　　(جـ) و جتا θ　　(د) و ظا θ

(٢٥) إذا وضع جسم وزنه (و) على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها (هـ) فإن مقدار مركبة وزنه فى اتجاه عمودى على المستوى هى ....

(أ) و جا هـ　　(ب) و جتا هـ　　(جـ) و ظا هـ　　(د) و ظتا هـ

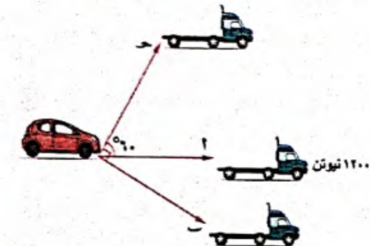
(٢٦) إذا وضع جسم وزنه (و) نيوتن على مستوى أملس يميل على الرأسى بزاوية قياسها (هـ) فإن مركبة وزن الجسم فى اتجاه المستوى هى ....

(أ) و جا هـ　　(ب) و جتا هـ　　(جـ) و　　(د) و ظا هـ

(٢٧) جسم وزنه (و) نيوتن موضوع على مستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها (هـ) فإذا كانت مركبتا الوزن فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى والاتجاه العمودى عليه مقداراهما ٧ ، ٢٤ نيوتن على الترتيب فإن مقدار الوزن (و) = ... نيوتن.

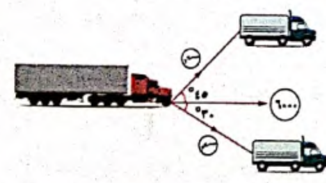
(أ) ٧　　(ب) ٢٤　　(جـ) ٢٥　　(د) ٣١

(٢٨) قاطرة تجر سيارة بقوة ١٢٠٠ نيوتن يراد استبدال القاطرة بقاطرتين عند ب ، حـ مثبتتين بحبلين متصلين بالسيارة وكانت الزاوية بين الحبلين ٩٠° فإذا كان أحد الحبلين يميل بزاوية ٦٠° على القاطرة أ فإن مقدار الشد فى كل من الحبلين ب ، حـ هو .... نيوتن.



(أ) ٦٠٠ ، ٦٠٠　　(ب) ٨٠٠ ، ٤٠٠　　(جـ) ٦٠٠√٣ ، ٦٠٠　　(د) ٧٠٠ ، ٥٠٠

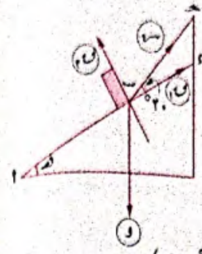
(٢٩) تعطلت سيارة نقل كبيرة فقام رجال المرور بإحضار سيارتين لسحب هذه السيارة بحيث كان محصلة قوى الشد للسيارتين تمثل بقوة أفقية مقدارها ٦٠٠٠ نيوتن كما بالشكل فإن : ش١ = ... لأقرب نيوتن.



(أ) ٣١٠٥　　(ب) ٣٦٠٦　　(جـ) ٤٣٩٢　　(د) ٤٢٩٣

(٣٠) في الشكل المقابل :

جسم وزنه (و) نيوتن ، وضع على مستوى مائل يميل على الأفقي بزاوية قياسها (هـ) ، ربط بخيط خفيف $\overline{بـ حـ}$ يميل على المستوى بزاوية قياسها ٢٠° لأعلى وكان $ق_١$ ، $ق_٢$ هي مركبتا الشد في اتجاه المستوى والعمودي على المستوى فإن : ....



(أ) $ق_١$ = ش ظا هـ

(ب) $ق_٢$ = ش جا (٢٠° + هـ)

(جـ) $ق_١$ = ش جتا (٢٠° + هـ)

(د) ش = $ق_١$ قا ٢٠°

ثانيا الأسئلة المقالية

١ قوة مقدارها ٦٠٠ ث.جم تؤثر في نقطة مادية. أوجد مركبتيها في اتجاهين يصنعان معها زاويتين قياساهما ٣٠° ، ٤٥° «٤٣٩,٢ ، ٣١٠,٦ ث.جم»

٢ قوة مقدارها ١٠٠ ثقل جم تعمل في اتجاه الشمال الغربي. احسب مركبتيها في اتجاهي الشمال والغرب. «٥٠ √٢ ، ٥٠ √٢ ث.جم»

٣ حللت قوة مقدارها ١٢ ث.كجم تؤثر في اتجاه الشمال الشرقي إلى مركبتين إحداهما نحو الشرق والأخرى نحو الشمال الغربي. أوجد مقدار هاتين المركبتين. «١٢ √٢ ، ١٢ ث.كجم»

٤ حلل قوة أفقية مقدارها ١٦٠ ث.جم في اتجاهين متعامدين أحدهما يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° إلى أعلى. «٨٠ √٣ ، ٨٠ ث.جم»

٥ قوة مقدارها ٣٠٠ داين تؤثر في اتجاه الشمال. أوجد مقدار مركبتيها المتعامدتين إذا كانت إحدى هاتين المركبتين تعمل في اتجاه شمال الشرق بزاوية قياسها ٣٠° «١٥٠ ، ١٥٠ √٣ داين»

٦ قوة مقدارها ١٨ نيوتن تعمل في اتجاه الجنوب. أوجد مركبتيها في اتجاهي ٦٠° شرق الجنوب ، ٣٠° غرب الجنوب. «٩ ، ٩ √٣ نيوتن»

٧ حلل قوة قدرها ٩٠ نيوتن إلى قوتين متساويتين في المقدار وقياس الزاوية بين اتجاهيهما ٦٠° «٣٠ √٣ نيوتن»

٨ أوجد مقدار المركبتين المتعامدتين ، لوزن جسم موضوع على مستوٍ أفقي ومقداره ٨٠ نيوتن إذا علم أن إحداهما تميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° إلى أسفل. «٤٠ ، ٤٠ √٣ نيوتن»

٩ قوتان تؤثران في نقطة وظل الزاوية بينهما يساوي $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$ ، إذا علم أن محصلتهما عمودية على الصغرى وأن مقدار المركبة الكبرى يساوي ٢٠ نيوتن. فما هو مقدار كل من المركبة الأخرى والمحصلة ؟ «١٠ √٣ ، ١٠ نيوتن»

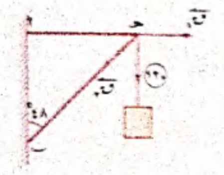
١٠ حلل قوة مقدارها ق نيوتن في اتجاه الشمال إلى مركبتين ، الأولى في اتجاه ٣٠° شمال الشرق ومقدارها ٤٠ نيوتن والثانية في اتجاه الغرب. أوجد كلًا من : مقدار القوة ق ومقدار المركبة الثانية. «٢٠ √٣ ، ٢٠ نيوتن»

١١ جسم جاسئ وزنه ٤٢ نيوتن موضوع على مستوٍ يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٦٠° أوجد مركبتي وزن هذا الجسم في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى والاتجاه العمودي عليه. «٢١ ، ٢١ √٣ نيوتن»

١٢ جسم وزنه ٦٠ نيوتن موضوع على مستوٍ مائل يميل على الأفقي بزاوية قياسها هـ حيث ظا هـ = $\frac{٣}{٤}$ أوجد مقدار مركبتي الوزن في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى والاتجاه العمودي عليه. «٣٦ ، ٤٨ نيوتن»

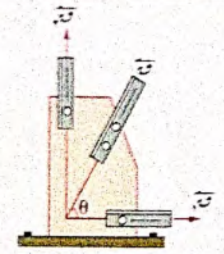
١٣ في الشكل المقابل :

حلل القوة الرأسية ١٢٠ ث.جم إلى مركبتين إحداهما في الاتجاه الأفقي والأخرى في اتجاه يصنع مع خط عمل القوة زاوية قياسها ٤٨°



«١٣٣,٢٧ ، ١٧٩,٣٤ ث.جم»

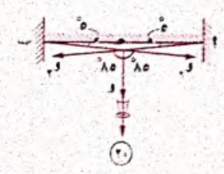
١٤ الشكل المقابل يمثل زاوية في أحد الكباري ، القوة $\overrightarrow{ق}$ مقدارها ٣٠ نيوتن ، حُللت إلى مركبتين متعامدتين مقدار إحداهما ١٥ √٣ نيوتن. فأوجد مقدار المركبة الأخرى.



«١٥ نيوتن»

١٥ في الشكل المقابل :

مصباح وزنه ٢٠ نيوتن معلق بحبلين معدنيين $\overline{أ حـ}$ ، $\overline{بـ حـ}$ يميلان على الأفقي بزاويتين متساويتين قياس كل منهما ٥°



(١) حلل وزن المصباح في الاتجاهين $\overleftarrow{أ حـ}$ ، $\overleftarrow{بـ حـ}$

(٢) ماذا يحدث لمقدار مركبة الوزن في اتجاهي الحبلين المعدنيين إذا نقص قياس زاويته مع الأفقي عن ٥° وماذا تتوقع لمقدار مركبة الوزن عندما يُصبح الحبل المعدني أفقيًا ؟ فسر إجابتك.

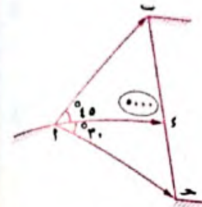
«١١٤,٧٤ ، ١١٤,٧٤ نيوتن»

١٦ مستوى مائل طوله ١٣٠ سم وارتفاعه ٥٠ سم وضع عليه جسم جاسئ وزنه ٣٩٠ ث.جم.
أوجد مركبتي الوزن في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى والاتجاه العمودي عليه.

«١٥٠ ، ٣٦٠ ث.جم»

١٧ في الشكل المقابل :

يراد سحب بارجة بواسطة قاطرتين ب ، حـ تتصلان بحبلين مثبتين في خُطاف في نقطة أ من البارجة وقياس الزاوية بينهما ٧٥° ، فإذا كان قياس زاوية ميل أحد الحبلين على $\overrightarrow{أء}$ يساوى ٤٥° وكانت محصلة القوى المبذولة لسحب البارجة تساوى ٥٠٠٠ نيوتن وتعمل في اتجاه $\overrightarrow{أء}$.
أوجد الشد في كل من الحبلين.



«٢٥٨٨,٢ ، ٣٦٦٠,٣ نيوتن»

الدرس 3

محصلة عدة قوى مستوية متلاقية في نقطة

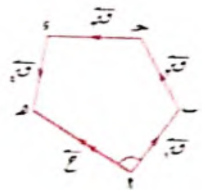
١ الطريقة الهندسية

نفرض أن لدينا مجموعة من القوى المستوية $\overrightarrow{ق}_1$ ، $\overrightarrow{ق}_2$ ، $\overrightarrow{ق}_3$ ، $\overrightarrow{ق}_4$ تؤثر في نقطة م كما في الشكل المقابل :



فلإيجاد محصلة مجموعة هذه القوى نتبع الخطوات الآتية :

* نختار مقياس رسم مناسب.
* من أي نقطة مثل أ نرسم المتجه $\overrightarrow{أب}$ ليمثل $\overrightarrow{ق}_1$ (مقدارًا واتجاهًا)
* من نقطة ب نرسم المتجه $\overrightarrow{بحـ}$ ليمثل $\overrightarrow{ق}_2$
* من نقطة حـ نرسم المتجه $\overrightarrow{حـء}$ ليمثل $\overrightarrow{ق}_3$
* وأخيرًا من نقطة ء نرسم المتجه $\overrightarrow{ءهـ}$ ليمثل $\overrightarrow{ق}_4$



نصل نقطة البداية (أ) بنقطة النهاية (هـ) فيكون المتجه $\overrightarrow{أهـ}$ ممثلًا للمحصلة $\overrightarrow{ح}$ مقدارًا واتجاهًا حيث أن :

$$\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ق}_1 + \overrightarrow{ق}_2 + \overrightarrow{ق}_3 + \overrightarrow{ق}_4$$

* نقيس طول $\overline{أهـ}$ ونوجد ق (∠ هـ أ ب) لتكون زاوية ميل المحصلة على القوة الأولى وباستخدام مقياس الرسم نحصل على مقدار $\overrightarrow{ح}$
* فتكون محصلة مجموعة القوى هي قوة مقدارها ح تؤثر في نقطة م في اتجاه $\overrightarrow{أهـ}$

مع ملاحظة أن :

المتجه $\overrightarrow{أهـ}$ الذي يمثل $\overrightarrow{ح}$ يكون اتجاهه في عكس الاتجاه الدوري لباقي المتجهات التي تمثل القوى والمضلع أ ب حـ ء هـ الذي أضلاعه تمثل القوى ومحصلتها يسمى «مضلع القوى».

ملاحظة

إذا انطبقت نقطة نهاية خط عمل القوة الأخيرة مع نقطة بداية خط عمل القوة الأولى فى مضلع القوى فإن المحصلة (ح⃗) = ٠⃗ وبالتالى تكون مجموعة القوى متزنة.

أى أن الشرط اللازم والكافى لاتزان مجموعة من القوى المستوية والمتلاقية فى نقطة هو أن تمثل هذه القوى هندسيًا بأضلاع مضلع مقفل مأخوذة فى اتجاه دورى واحد.

٢ الطريقة التحليلية

نفرض أن لدينا مجموعة من القوى ق⃗١ ، ق⃗٢ ، ق⃗٣ ، ... ، ق⃗ن المستوية والمتلاقية فى نقطة (و) واعتبرنا أن النقطة (و) هى نقطة الأصل فى نظام إحداثى متعامد فى هذا المستوى وكانت هـ١ ، هـ٢ ، هـ٣ ، ... ، هـن هى الزوايا القطبية للقوى وكان س⃗ ، ص⃗ هما متجها الوحدة فى اتجاهى و س⃗ ، و ص⃗ فإن :



ق⃗١ = (ق١ ، هـ١) = ق١ جتا هـ١ س⃗ + ق١ جا هـ١ ص⃗

، ق⃗٢ = (ق٢ ، هـ٢) = ق٢ جتا هـ٢ س⃗ + ق٢ جا هـ٢ ص⃗

، ق⃗٣ = (ق٣ ، هـ٣) = ق٣ جتا هـ٣ س⃗ + ق٣ جا هـ٣ ص⃗

⋮

، ق⃗ن = (قن ، هـن) = قن جتا هـن س⃗ + قن جا هـن ص⃗

، ∵ ح⃗ = ق⃗١ + ق⃗٢ + ق⃗٣ + ... + ق⃗ن

فبالجمع ينتج أن : ح⃗ = (ق١ جتا هـ١ س⃗ + ق١ جا هـ١ ص⃗) + (ق٢ جتا هـ٢ س⃗ + ق٢ جا هـ٢ ص⃗) + ... + (قن جتا هـن س⃗ + قن جا هـن ص⃗)

= (ق١ جتا هـ١ + ق٢ جتا هـ٢ + ... + قن جتا هـن) س⃗

+ (ق١ جا هـ١ + ق٢ جا هـ٢ + ... + قن جا هـن) ص⃗

أى أن ح⃗ = ($\sum_{ر=1}^{ن}$ قر جتا هـر) س⃗ + ($\sum_{ر=1}^{ن}$ قر جا هـر) ص⃗

والمقدار ($\sum_{ر=1}^{ن}$ قر جتا هـر) يسمى المجموع الجبرى لمركبات القوى فى اتجاه و س⃗ ونرمز له بالرمز س

، المقدار ($\sum_{ر=1}^{ن}$ قر جا هـر) يسمى المجموع الجبرى لمركبات القوى فى اتجاه و ص⃗ ونرمز له بالرمز ص

وعلى ذلك نكتب العلاقة السابقة بالصورة : ح⃗ = س س⃗ + ص ص⃗

ويفرض أن ح هى مقدار المحصلة ح⃗ ، هـ هى قياس الزاوية القطبية لها

فإن : ح = $\sqrt{س^2 + ص^2}$ ، ظا هـ = $\frac{ص}{س}$ حيث ح⃗ = (ح ، هـ)

ملاحظات

١ لاحظ الفرق بين : س ، س⃗

* س = مجموع المركبات الجبرية للقوى فى اتجاه و س⃗
* س⃗ = متجه الوحدة فى اتجاه و س⃗

٢ إذا كانت : س = صفر فإن : ح⃗ = ص ص⃗

وتكون هـ = ٩٠° إذا كانت : ح⃗ فى اتجاه و ص⃗

، هـ = ٢٧٠° إذا كانت : ح⃗ فى اتجاه و ص⃗ (المضاد)

٣ إذا كانت : ص = صفر فإن : ح⃗ = س س⃗

وتكون هـ = صفر° إذا كانت : ح⃗ فى اتجاه و س⃗

، هـ = ١٨٠° إذا كانت : ح⃗ فى اتجاه و س⃗ (المضاد)

٤ إذا كانت : س = صفر ، ص = صفر فإن : ح⃗ = ٠⃗

وفى هذه الحالة تكون مجموعة القوى متزنة.

٥ عند تعيين اتجاه المحصلة يراعى ما يلى :

س	ص	الربع	هـ
+	+	الأول	قياس الزاوية الحادة
−	+	الثانى	١٨٠° − قياس الزاوية الحادة
−	−	الثالث	١٨٠° + قياس الزاوية الحادة
+	−	الرابع	٣٦٠° − قياس الزاوية الحادة

٦ محصلة عدة قوى ق⃗١ ، ق⃗٢ ، ق⃗٣ هى : ح⃗ = ق⃗١ + ق⃗٢ + ق⃗٣

وإذا كان ح⃗ = ٠⃗ فإن مجموعة القوى تكون متزنة

فمثلًا : إذا كانت : ق⃗١ = ٥ س⃗ + ٢ ص⃗ ، ق⃗٢ = −٦ س⃗ + ٣ ص⃗

، ق⃗٣ = س⃗ − ٥ ص⃗ فإن : ح⃗ = ق⃗١ + ق⃗٢ + ق⃗٣ = ٠⃗

∴ القوى تكون متزنة.

مثال ①

إذا كانت القوى $\overrightarrow{ق}_١ = ٥\overrightarrow{س} - ٤\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق}_٢ = -٦\overrightarrow{س} + أ\overrightarrow{ص}$

، $\overrightarrow{ق}_٣ = ب\overrightarrow{س} + ٧\overrightarrow{ص}$ متلاقية فى نقطة ومتزنة أوجد قيمة كل من : أ ، ب

الحـــل

∵ القوى متزنة.

∴ $\overrightarrow{ق}_١ + \overrightarrow{ق}_٢ + \overrightarrow{ق}_٣ = \vec{٠}$

∴ $(٥\overrightarrow{س} - ٤\overrightarrow{ص}) + (-٦\overrightarrow{س} + أ\overrightarrow{ص}) + (ب\overrightarrow{س} + ٧\overrightarrow{ص}) = \vec{٠}$

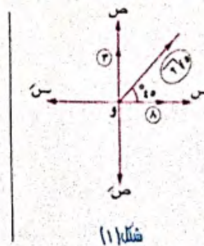
∴ $(-١ + ب)\overrightarrow{س} + (٣ + أ)\overrightarrow{ص} = \vec{٠}$ ∴ $-١ + ب = ٠$

∴ ب = ١ ، ٣ + أ = ٠ ∴ أ = -٣

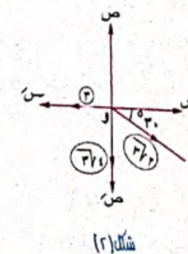
مثال ②

فى كل من الأشكال الثلاثة التالية مجموعة من القوى متلاقية فى (و) ومقدرة بوحدة النيوتن.

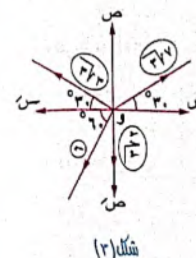
عيّن مقدار واتجاه محصلة كل منها.



شكل(١)



شكل(٢)



شكل(٣)

الحـــل

فى شكل (١) :

القوى الثلاث مقاديرها ٨ ، $٥\sqrt{٢}$ ، ٣ نيوتن وزواياها القطبية ٠° ، ٤٥° ، ٩٠°

على الترتيب والمجموع الجبرى للمركبات فى اتجاه $\overrightarrow{وس}$

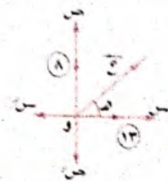
أى س = ٨ جتا ٠° + $٥\sqrt{٢}$ جتا ٤٥° + ٣ جتا ٩٠°

$= ٨ \times ١ + ٥\sqrt{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + ٣ \times$ صفر $= ٨ + ٥ + ٠ = ١٣$ نيوتن.

، المجموع الجبرى للمركبات فى اتجاه $\overrightarrow{وص}$

أى ص = ٨ جا ٠° + $٥\sqrt{٢}$ جا ٤٥° + ٣ جا ٩٠°

$= ٨ \times ٠ + ٥\sqrt{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + ٣ \times ١ = ٠ + ٥ + ٣ = ٨$ نيوتن.



∴ $\overrightarrow{ع} = ١٣\overrightarrow{س} + ٨\overrightarrow{ص}$

ويكون $ع = \sqrt{س^٢ + ص^٢} = \sqrt{١٦٩ + ٦٤} = \sqrt{٢٣٣}$

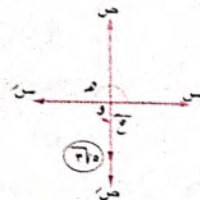
∴ ع ≃ ١٥,٢٦٤ نيوتن ، ظا هـ $= \frac{ص}{س} = \frac{٨}{١٣}$ ، ∵ س > ٠ ، ص > ٠

∴ $\overrightarrow{ع}$ تقع فى الربع الأول وباستخدام حاسبة الجيب ∴ هـ ≃ ٣١ ٤٦ ٣١°

∴ $\overrightarrow{ع}$ مقدارها ١٥,٢٦٤ نيوتن وقياس زاويتها القطبية ٣١ ٤٦ ٣١°

فى شكل (٢) : ثلاث قوى مقاديرها ٣ ، $٤\sqrt{٣}$ ، $٢\sqrt{٣}$ نيوتن وزواياها القطبية هى

١٨٠° ، ٢٧٠° ، ٣٣٠° على الترتيب.



∴ س = ٣ جتا ١٨٠° + $٤\sqrt{٣}$ جتا ٢٧٠° + $٢\sqrt{٣}$ جتا ٣٣٠°

$= ٣ \times (-١) + ٤\sqrt{٣} \times ٠ + ٢\sqrt{٣} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = -٣ + ٠ + ٣ = ٠$

، ص = ٣ جا ١٨٠° + $٤\sqrt{٣}$ جا ٢٧٠° + $٢\sqrt{٣}$ جا ٣٣٠°

∴ $ص = ٣ \times ٠ + ٤\sqrt{٣} \times (-١) + ٢\sqrt{٣} \times (-\frac{١}{٢})$

$= ٠ - ٤\sqrt{٣} - \sqrt{٣} = -٥\sqrt{٣}$ نيوتن

∴ $\overrightarrow{ع} = -٥\sqrt{٣}\,\overrightarrow{ص}$

ويكون ع = $٥\sqrt{٣}$ نيوتن ، هـ = ٢٧٠°

فى شكل (٣) : أربع قوى مقاديرها $٧\sqrt{٣}$ ، $٣\sqrt{٣}$ ، ٦ ، $٢\sqrt{٣}$ نيوتن

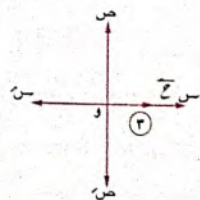
وزواياها القطبية هى ٣٠° ، ١٥٠° ، ٢٤٠° ، ٢٧٠° على الترتيب.

∴ س = $٧\sqrt{٣}$ جتا ٣٠° + $٣\sqrt{٣}$ جتا ١٥٠° + ٦ جتا ٢٤٠° + $٢\sqrt{٣}$ جتا ٢٧٠°

$= ٧\sqrt{٣} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + ٣\sqrt{٣} \times (-\frac{\sqrt{٣}}{٢}) + ٦ \times (-\frac{١}{٢}) + ٢\sqrt{٣} \times ٠$

= ١٠,٥ − ٤,٥ − ٣ + ٠ = ٣ نيوتن.

، ص = $٧\sqrt{٣}$ جا ٣٠° + $٣\sqrt{٣}$ جا ١٥٠° + ٦ جا ٢٤٠° + $٢\sqrt{٣}$ جا ٢٧٠°

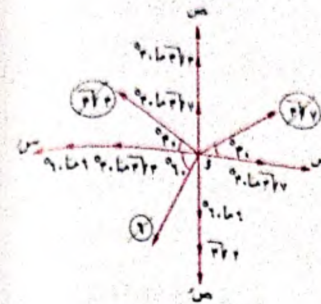


∴ $ص = ٧\sqrt{٣} \times \frac{١}{٢} + ٣\sqrt{٣} \times \frac{١}{٢} + ٦ \times (-\frac{\sqrt{٣}}{٢}) + ٢\sqrt{٣} \times (-١)$

$= \frac{٧\sqrt{٣}}{٢} + \frac{٣\sqrt{٣}}{٢} - ٣\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٣} =$ صفر

∴ $\overrightarrow{ع} = ٣\overrightarrow{س}$ وتكون ع = ٣ نيوتن ، هـ = ٠°

حل آخر لشكل (٣) باستخدام تحليل القوى فى اتجاهين متعامدين :



∴ س = ٧ $\sqrt{3}$ جتا ٣٠° - ٣ $\sqrt{3}$ جتا ٣٠° - ٦ جتا ٦٠°

= ٧ $\sqrt{3}$ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ - ٣ $\sqrt{3}$ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ - ٦ × $\frac{1}{2}$

= ٣ نيوتن

، ص = ٣ $\sqrt{3}$ جا ٣٠° + ٧ $\sqrt{3}$ جا ٣٠° - ٦ جا ٦٠° - ٢ $\sqrt{3}$

= ٣ $\sqrt{3}$ × $\frac{1}{2}$ + ٧ $\sqrt{3}$ × $\frac{1}{2}$ - ٦ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ - ٢ $\sqrt{3}$ = صفر

∴ ح = $\sqrt{(3)^2 + (0)^2}$ = ٣ نيوتن ، ظا هـ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{صفر}{3}$ = صفر ∴ هـ = ٠°

مثال ٣

خمس قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة مقاديرها ١٢ ، ٩ ، ٥ $\sqrt{2}$ ، ٧ $\sqrt{2}$ ، ٧ ث كجم. تعمل فى اتجاهات : الشرق ، الشمال ، الشمال الغربى ، الجنوب الغربى ، الجنوب على الترتيب. أثبت أن مجموعة القوى متزنة.

الحل

∵ القوى هى

(١٢ ، ٠°) ، (٩ ، ٩٠°) ، (٥ $\sqrt{2}$ ، ١٣٥°) ، (٧ $\sqrt{2}$ ، ٢٢٥°) ، (٧ ، ٢٧٠°)

∴ س = ١٢ جتا ٠° + ٩ جتا ٩٠° + ٥ $\sqrt{2}$ جتا ١٣٥°

+ ٧ $\sqrt{2}$ جتا ٢٢٥° + ٧ جتا ٢٧٠°

= ١٢ × ١ + صفر + ٥ $\sqrt{2}$ $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ + ٧ $\sqrt{2}$ $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ + صفر

= ١٢ - ٥ - ٧ = صفر

، ص = ١٢ جا ٠° + ٩ جا ٩٠° + ٥ $\sqrt{2}$ جا ١٣٥° + ٧ $\sqrt{2}$ جا ٢٢٥° + ٧ جا ٢٧٠°

= صفر + ٩ × ١ + ٥ $\sqrt{2}$ × $\frac{1}{\sqrt{2}}$ + ٧ $\sqrt{2}$ $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ + ٧ (-١) = ٩ + ٥ - ٧ - ٧ = صفر

∵ س = صفر ، ص = صفر ∴ ح = ٠ ∴ المجموعة متزنة.

مثال ٤

أربع قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة مقاديرها ق ، ٢ ق ، ٣ $\sqrt{3}$ ق ، ٤ ق ث كجم

والزاوية بين اتجاهى الأولى والثانية ٦٠° وبين اتجاهى الثانية والثالثة ٩٠° وبين اتجاهى الثالثة والرابعة ١٥٠°

أوجد مقدار واتجاه المحصلة.

الحل

نعتبر $\overrightarrow{وس}$ هو اتجاه القوة الأولى فتكون القوى فى الصورة القطبية

(ق ، ٠°) ، (٢ق ، ٦٠°) ، (٣ $\sqrt{3}$ ق ، ١٥٠°)

، (٤ق ، ٣٠٠°) على الترتيب.

∴ س = ق جتا ٠° + ٢ق جتا ٦٠° + ٣ $\sqrt{3}$ ق جتا ١٥٠°

+ ٤ق جتا ٣٠٠° = ق × ١ + ٢ق × $\frac{1}{2}$ + ٣ $\sqrt{3}$ ق $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ + ٤ق × $\frac{1}{2}$

∴ س = ق + ق - $\frac{9}{2}$ ق + ٢ق = - $\frac{1}{2}$ ق

، ص = ق جا ٠° + ٢ق جا ٦٠° + ٣ $\sqrt{3}$ ق جا ١٥٠° + ٤ق جا ٣٠٠°

= ق × ٠ + ٢ق × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ + ٣ $\sqrt{3}$ ق × $\frac{1}{2}$ + ٤ق × $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

= ٠ + $\sqrt{3}$ ق + $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ق - ٢ $\sqrt{3}$ ق = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ق

∴ $\overrightarrow{ح}$ = - $\frac{1}{2}$ ق $\overrightarrow{س}$ + $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ق $\overrightarrow{ص}$

∴ ح = $\sqrt{\frac{1}{4}ق^2 + \frac{3}{4}ق^2}$ = $\sqrt{ق^2}$ ∴ ح = ق

، ظا هـ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{\sqrt{3}ق}{2}$ × $-\frac{2}{ق}$ = - $\sqrt{3}$

، ∵ س < ٠ ، ص > ٠ ∴ هـ = ١٨٠° - ٦٠° = ١٢٠°

أى أن المحصلة مقدارها ق وتقع بين القوتين الثانية والثالثة وتصنع زاوية قياسها ٣٠° مع القوة الثالثة.

• حاول حل هذا المثال باستخدام تحليل القوى فى اتجاهين متعامدين.

مثال ٥

ثلاث قوى مقاديرها ٢ ق ، ٤ ق ، ٦ ق تؤثر فى نقطة مادية فى اتجاهات موازية لأضلاع مثلث متساوى الأضلاع مأخوذة فى ترتيب دورى واحد. أوجد مقدار واتجاه المحصلة.

الحل

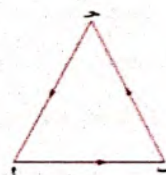
نفرض أن القوى تؤثر فى نقطة و فى الاتجاهات

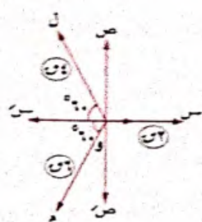
$\overrightarrow{وس}$ ، $\overrightarrow{ول}$ ، $\overrightarrow{وم}$ الموازية على الترتيب لاتجاهات

$\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{بح}$ ، $\overrightarrow{حأ}$ فى المثلث المتساوى الأضلاع

أ ب ح فتكون القوى فى الصورة القطبية هى :

(٢ق ، ٠°) ، (٤ق ، ١٢٠°) ، (٦ق ، ٢٤٠°)





∴ س = ٢ ق جتا ٠° + ٤ ق جتا ١٢٠° + ٦ ق جتا ٢٤٠°

= ٢ ق × ١ + ٤ ق × (-١/٢) + ٦ ق × (-١/٢) = -٣ ق

، ص = ٢ ق جا ٠° + ٤ ق جا ١٢٠° + ٦ ق جا ٢٤٠°

= ٢ ق × ٠ + ٤ ق × √٣/٢ + ٦ ق × (-√٣/٢) = - ق √٣

∴ ح = -٣ ق س - ق √٣ ص

∴ ح = √(س² + ص²) = √((-٣ ق)² + (- ق √٣)²) = √(١٢ ق²) = ٢ √٣ ق

، ظا هـ = ص/س = (- ق √٣)/(-٣ ق) = ١/√٣   ∴ هـ = ٣٠° أ، ٢١٠°

، ∵ س ، ص سالبتان.   ∴ هـ = ٢١٠°

أى أن المحصلة مقدارها ٢ √٣ ق وتقع بين القوتين ٦ ق ، ٤ ق وتميل بزاوية قياسها ٣٠° مع القوة ٦ ق

• حاول حل هذا المثال باستخدام تحليل القوى فى اتجاهين متعامدين.

مثال ٦

أ ب جـ د هـ و سداسى منتظم. أثرت قوى مقاديرها ٦ ، ٢ √٣ ، ٦ ، ٢ √٣ نيوتن فى أ ب ، أ جـ ، أ د ، أ هـ على الترتيب. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

الحل

نعتبر و س هو اتجاه القوة الأولى

فتكون القوى فى الصورة القطبية هى :

(٦ ، ٠°) ، (٢ √٣ ، ٣٠°) ، (٦ ، ٦٠°) ، (٢ √٣ ، ٩٠°)

∴ س = ٦ جتا ٠° + ٢ √٣ جتا ٣٠° + ٦ جتا ٦٠° + ٢ √٣ جتا ٩٠°

= ٦ × ١ + ٢ √٣ × √٣/٢ + ٦ × ١/٢ + ٢ √٣ × ٠ = ١٢ نيوتن.

، ص = ٦ جا ٠° + ٢ √٣ جا ٣٠° + ٦ جا ٦٠° + ٢ √٣ جا ٩٠°

= ٦ × صفر + ٢ √٣ × ١/٢ + ٦ × √٣/٢ + ٢ √٣ × ١ = ٦ √٣ نيوتن.

∴ ح = √(س² + ص²) = √((١٢)² + (٦ √٣)²) = ٦ √٧ نيوتن.

، ظا هـ = ص/س = ٦ √٣/١٢ = √٣/٢

، ∵ س > ٠ ، ص > ٠   ∴ ق(∠هـ) = ٤٠° ٥٣َ ٣٦ً

أى أن المحصلة مقدارها ٦ √٧ نيوتن وتقع بين أ جـ ، أ د وتصنع زاوية قياسها ١٠° ٥٣َ ٣٦ً مع أ جـ

حل آخر : باستخدام تحليل القوى فى اتجاهين متعامدين

∴ س = ٦ جتا ٦٠° + ٢ √٣ جتا ٣٠° + ٦

= ٦ × ١/٢ + ٢ √٣ × √٣/٢ + ٦ = ١٢ نيوتن.

، ص = ٦ جا ٦٠° + ٢ √٣ جا ٣٠° + ٢ √٣

= ٦ × √٣/٢ + ٢ √٣ × ١/٢ + ٢ √٣ = ٦ √٣ نيوتن.

∴ ح = √((١٢)² + (٦ √٣)²) = ٦ √٧ نيوتن.

، ظا هـ = ص/س = ٦ √٣/١٢ = √٣/٢

∴ ق(∠هـ) ≃ ٤٠° ٥٣َ ٣٦ً

أى أن المحصلة مقدارها ٦ √٧ نيوتن وتقع بين أ جـ ، أ د وتصنع زاوية قياسها ١٠° ٥٣َ ٣٦ً مع أ جـ

مثال ٧

أربع قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة مقاديرها ق١ ، ٦ √٢ ، ٨ √٢ ، ق٢ ثقل جرام والقوة الأولى فى اتجاه الشرق والثانية فى اتجاه الشمال الشرقى والثالثة فى اتجاه الشمال الغربى والرابعة تؤثر فى اتجاه الجنوب. فإذا كانت محصلة هذه القوى تساوى ٧ ثقل جرام وتؤثر فى اتجاه الشرق. **فأوجد قيمة كل من : ق١ ، ق٢**

الحل

∵ المحصلة تساوى ٧ ثقل جرام وفى اتجاه الشرق.

∴ س = ٧ ، ص = صفر

∴ ق١ جتا ٠° + ٦ √٢ جتا ٤٥° + ٨ √٢ جتا ١٣٥° + ق٢ جتا ٢٧٠° = ٧

∴ ق١ × ١ + ٦ √٢ × ١/√٢ + ٨ √٢ × (-١/√٢) + ق٢ × صفر = ٧

∴ ق١ + ٦ - ٨ = ٧   ∴ ق١ = ٩ ثقل جرام.

، ق١ جا ٠° + ٦ √٢ جا ٤٥° + ٨ √٢ جا ١٣٥° + ق٢ جا ٢٧٠° = صفر

∴ ق١ × صفر + ٦ √٢ × ١/√٢ + ٨ √٢ × ١/√٢ + ق٢ × (-١) = صفر

∴ ٦ + ٨ - ق٢ = صفر   ∴ ق٢ = ١٤ ثقل جرام.

• حاول حل هذا المثال باستخدام تحليل القوى فى اتجاهين متعامدين.

مثال ٨

خمس قوى مستوية ومتلاقية في نقطة مقاديرها ق ، ٩ ، ٥ $\sqrt{٢}$ ، ٧ $\sqrt{٢}$ ، ك ث.كجم وكان قياس الزاوية بين القوة الأولى والثانية ٩٠° وبين القوة الثانية والثالثة ٤٥° وبين الثالثة والرابعة ٩٠° وبين الرابعة والخامسة ٤٥°

فإذا كانت مجموعة القوى متزنة. أوجد قيمة كل من: ق ، ك

الحل

نعتبر و س→ في اتجاه القوة الأولى فتكون القوى في الصورة القطبية هي:

(ق ، ٠°) ، (٩ ، ٩٠°) ، (٥ $\sqrt{٢}$ ، ١٣٥°)

، (٧ $\sqrt{٢}$ ، ٢٢٥°) ، (ك ، ٢٧٠°)

، ∵ القوى متزنة

∴ س = ص = ٠

، ∵ س = ق جتا ٠° + ٩ جتا ٩٠° + ٥ $\sqrt{٢}$ جتا ١٣٥° + ٧ $\sqrt{٢}$ جتا ٢٢٥° + ك جتا ٢٧٠°

∴ ق + ٩ × ٠ + ٥ $\sqrt{٢}$ × $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٧ $\sqrt{٢}$ × $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ك × صفر = ٠

∴ ق = ١٢

، ∵ ص = ق جا ٠° + ٩ جا ٩٠° + ٥ $\sqrt{٢}$ جا ١٣٥° + ٧ $\sqrt{٢}$ جا ٢٢٥° + ك جا ٢٧٠°

∴ ١٢ × ٠ + ٩ × ١ + ٥ $\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٧ $\sqrt{٢}$ × $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ك × -١ = صفر

∴ ك = ٧

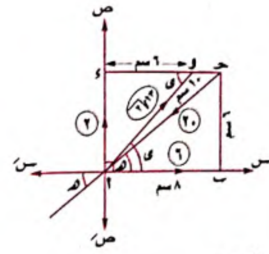
مثال ٩

أ ب ج د مستطيل فيه: أ ب = ٨ سم ، ب ج = ٦ سم ، و ∈ ج د بحيث د و = ٦ سم

أثرت القوى التي مقاديرها ٦ ، ٢٠ ، ١٣ $\sqrt{٢}$ ، ٢ نيوتن في أ ب→ ، ج أ→ ، أ و→ ، أ د→ على الترتيب.

أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

الحل



في Δ أ ب ج:

∵ (أ ج)² = (٦)² + (٨)² = ١٠٠ ∴ أ ج = ١٠ سم

∴ جا هـ = $\frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$ ، جتا هـ = $\frac{٨}{١٠} = \frac{٤}{٥}$

، ∵ Δ أ د و متساوي الساقين. ∴ ق(∠ ى) = ٤٥°

ونعتبر أ ب→ هو اتجاه القوة الأولى وفي اتجاه متجه الوحدة س→

وتكون الزوايا القطبية للقوى كالآتي: صفر° ، ١٨٠° + هـ ، ى ، ٩٠° على الترتيب.

∴ س = ٦ جتا ٠° + ٢٠ جتا (١٨٠° + هـ) + ١٣ $\sqrt{٢}$ جتا ى + ٢ جتا ٩٠°

= ٦ جتا ٠° - ٢٠ جتا هـ + ١٣ $\sqrt{٢}$ جتا ٤٥° + ٢ جتا ٩٠°

= ٦ × ١ - ٢٠ × $\frac{٤}{٥}$ + ١٣ $\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٢ × صفر = ٣ نيوتن.

، ص = ٦ جا ٠° + ٢٠ جا (١٨٠° + هـ) + ١٣ $\sqrt{٢}$ جا ى + ٢ جا ٩٠°

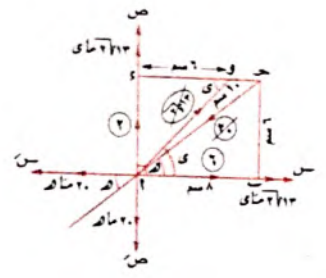
= ٦ جا ٠° - ٢٠ جا هـ + ١٣ $\sqrt{٢}$ جا ٤٥° + ٢ جا ٩٠°

= ٦ × ٠ - ٢٠ × $\frac{٣}{٥}$ + ١٣ $\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٢ × ١ = ٣ نيوتن.

∴ ح = $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$ = $\sqrt{(٣)^٢ + (٣)^٢}$ = ٣ $\sqrt{٢}$ نيوتن ، ظا ل = $\frac{ص}{س} = \frac{٣}{٣}$ = ١

، ∵ س > ٠ ، ص > ٠ ∴ ق(∠ ل) = ٤٥° أي أن المحصلة في اتجاه أو→

حل آخر: باستخدام تحليل القوى في اتجاهين متعامدين:



من فيثاغورس: أ ج = ١٠ سم

∴ جا هـ = $\frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$ ، جتا هـ = $\frac{٨}{١٠} = \frac{٤}{٥}$

، ∵ Δ أ د و متساوي الساقين.

∴ ق(∠ ى) = ٤٥°

∴ س = ١٣ $\sqrt{٢}$ جتا ى + ٦ - ٢٠ جتا هـ

= ١٣ $\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٦ - ٢٠ × $\frac{٤}{٥}$ = ٣ نيوتن.

، ص = ١٣ $\sqrt{٢}$ جا ى + ٢ - ٢٠ جا هـ = ١٣ $\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٢ - ٢٠ × $\frac{٣}{٥}$ = ٣ نيوتن.

∴ ح = $\sqrt{(٣)^٢ + (٣)^٢}$ = ٣ $\sqrt{٢}$ نيوتن.

، ظا ل = $\frac{٣}{٣}$ = ١ ، ∵ س > ٠ ، ص > ٠ ∴ ق(∠ ل) = ٤٥°

أي أن المحصلة تعمل في اتجاه أو→

على محصلة عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة



• تذكر • فهم • تطبيق ❖ مستويات عليا 📖 من أسئلة الكتاب المدرسى

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(حيث س ، ص متجها وحدة أساسيان فى اتجاهين متعامدين)

① إذا كان : $ق_1$ = س − ص ، $ق_2$ = ٢ س − ٤ ص ، محصلتهما ح = ٢ أ س − ٣ ب ص فإن : أ + ب = ...

(أ) ٢ (ب) ٢ $\frac{1}{2}$ (جـ) ٣ $\frac{1}{6}$ (د) ١٢

② 📖 إذا كان : $ق_1$ = ٣ س − ٢ ص ، $ق_2$ = أ س − ص ، $ق_3$ = ٤ س − ب ص ، محصلتهم ح = ٦ س − ٤ ص فإن : (أ ، ب) = ...

(أ) (١ ، −١) (ب) (−١ ، ١) (جـ) (−١ ، −١) (د) (١ ، ١)

③ إذا كان : $ق_1$ = ٤ س ، $ق_2$ = ٨ س − ٥ ص فإن : ‖ح‖ = ... وحدة قوة.

(أ) ١٢ (ب) ٥ (جـ) ١٣ (د) $\sqrt{٧٣}$

④ إذا كانت : $ق_1$ = ٣ س + ٢ ص ، $ق_2$ = أ س + ٧ ص ، $ق_3$ = −١٢ س + ب ص ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة وكانت المحصلة ح = (٦ $\sqrt{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$ π) فإن : أ − ب = ... نيوتن.

(أ) −٣ (ب) ٣ (جـ) صفر (د) ٦

⑤ إذا أثرت القوى : $ق_1$ = ٦ س + ٧ ص ، $ق_2$ = أ س − ٩ ص ، $ق_3$ = ٥ س + ب ص فى نقطة مادية وكانت القوى متزنة فإن : أ + ٢ ب = ...

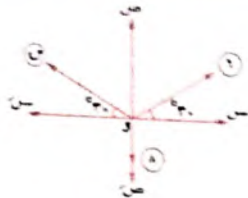
(أ) −٩ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) −٧

⑥ إذا كانت $ق_1$ ، $ق_2$ ، $ق_3$ ثلاث قوى متزنة ومتلاقية فى نقطة واحدة وكانت : $ق_1$ = ٢ س − ٢ ص ، $ق_2$ = ٣ س + ٥ ص فإن : $ق_3$ = ...

(أ) −٥ س − ٢ ص (ب) −٥ س + ٢ ص

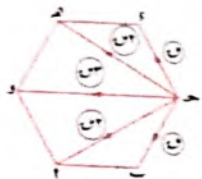
(جـ) ٥ س + ٢ ص (د) ٥ س − ٢ ص

⑦ إذا كانت محصلة القوى الموضحة بالشكل المقابل تؤثر فى محور الصادات فإن : ق = ... وحدة قوة.



(أ) ٢ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٤

⑧ محصلة القوى فى الشكل المقابل تؤثر فى اتجاه ....



(أ) حـ ء (ب) حـ هـ (جـ) حـ و (د) حـ أ

⑨ فى الشكل المقابل :

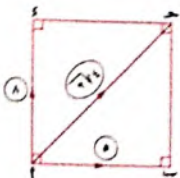


أربع قوى مقاديرها ١ ، ٢ ، ٤ $\sqrt{٣}$ ، ٣ $\sqrt{٣}$ نيوتن وتؤثر فى النقطة و فى اتجاهات و س ، و أ ، و ب ، و ص ، ق (∠ أ و حـ) = ٦٠° ، ق (∠ ب و ء) = ٣٠°

فإن مقدار واتجاه محصلة القوى يساوى ....

(أ) (٤ ، ١٨٠°) (ب) (٤ ، ٠°) (جـ) (٢ ، ٠°) (د) (٥ ، ٩٠°)

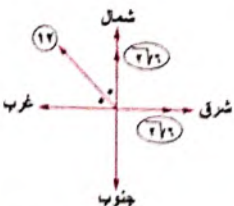
⑩ أ ب حـ ء مربع أثرت القوى ٥ ، ٨ ، ٤ $\sqrt{٢}$ نيوتن فى الاتجاهات أ ب ، أ ء ، أ حـ على الترتيب فإن المحصلة فى الصورة القطبية هى ....



(أ) (٥ ، ٥٤°) (ب) (١٥ ، ٦٠°)

(جـ) (١٥ ، ٨َ ٥٣°) (د) (١٣ ، ٩٠°)

⑪ فى الشكل المقابل : تكون محصلة القوى فى اتجاه ....



(أ) الجنوب. (ب) الشرق.

(جـ) الغرب. (د) الشمال.

(١٢) فى الشكل المقابل :

محصلة القوى (ح) = ... نيوتن.

(أ) ٢٠ (ب) $10\sqrt{2}$

(جـ) ١٠ (د) صفر

(١٣) أثرت خمس قوى متساوية فى المقدار ومقدار كل منها ١٠ نيوتن فى أحد رؤوس سداسى منتظم وفى اتجاهات النقط الأخرى للسداسى

فإن محصلة هذه القوى = ... نيوتن.

(أ) ٥٠ (ب) ٢٠

(جـ) $30\sqrt{3}$ (د) $20 + 10\sqrt{3}$

(١٤) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ د هـ و سداسى منتظم

أثرت القوى ١٥ ، $5\sqrt{3}$ ، $5\sqrt{3}$ ، ١٥ نيوتن

على الترتيب فى الاتجاهات $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{أجـ}$ ، $\overrightarrow{أهـ}$ ، $\overrightarrow{أو}$

فإن : مقدار المحصلة ح = ... نيوتن.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢٥ (د) صفر

(١٥) فى الشكل المقابل :

إذا كان أ ب جـ د هـ و شكل سداسى منتظم

تؤثر القوى ٢ ، $4\sqrt{3}$ ، ٨ ، $2\sqrt{3}$ ، ٤ ث كجم

فى الاتجاهات $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{أجـ}$ ، $\overrightarrow{أد}$ ، $\overrightarrow{أهـ}$ ، $\overrightarrow{أو}$ على الترتيب

أولًا : مقدار محصلة القوى = ... ث كجم.

(أ) $(14 + 6\sqrt{3})$ (ب) ٢٠

(جـ) $20\sqrt{3}$ (د) $(20 + \sqrt{3})$

ثانيًا : اتجاه محصلة هذه القوى تميل على $\overrightarrow{أب}$ بزاوية قياسها ....

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

(١٦) إذا كانت محصلة القوى الموضحة بالشكل تؤثر فى محور السينات

فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ١٠ (ب) ١٤

(جـ) ١٨ (د) ٦

(١٧) الشكل المقابل يمثل عدة قوى متلاقية فى نقطة فإن مقدار محصلة هذه القوى يساوى .... نيوتن.

(أ) $15\sqrt{2}$ (ب) ٥

(جـ) $5\sqrt{2} - 5$ (د) صفر

(١٨) ثلاث قوى مستوية متلاقية فى نقطة مقاديرها ٤٠ ، ٣٠ ، ٤٠ نيوتن تؤثر فى نقطة الأولى فى اتجاه ٦٠° غرب الشمال والثانية فى اتجاه الغرب والثالثة فى اتجاه ٣٠° شمال الشرق

فإن مقدار المحصلة يساوى .... نيوتن.

(أ) ٣٠ (ب) ١١٠ (جـ) ٦٠ (د) ٥٠

(١٩) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ د مستطيل فيه : أب = ٤ سم ، ب جـ = ٣ سم

أثرت القوى ٤ ، ١٠ ، ٦ نيوتن فى $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{أجـ}$ ، $\overrightarrow{أد}$ على الترتيب

محصلة القوى تصنع مع $\overrightarrow{أب}$ زاوية قياسها ....

(أ) ٤٥° (ب) ٦٠° (جـ) ٣٠° (د) ظا$^{-1}$ $\left(\frac{3}{5}\right)$

(٢٠) أ ب جـ د شبه منحرف قائم الزاوية عند كل من أ ، د فيه : أد = جـ د = ٤ سم ، أب = ٧ سم ، م ∈ $\overline{أب}$ حيث أم = ٤ سم أثرت القوى ٢٥ ، ق ، $15\sqrt{2}$ ث.جم فى $\overrightarrow{جـب}$ ، $\overrightarrow{جـم}$ ، $\overrightarrow{جـأ}$ على الترتيب وكان معيار محصلة هذه القوى يساوى ٤٥ ث.جم فإن : ق = ... ث.جم.

(أ) ١٠ (ب) ٥٠ (جـ) ٢٠ (د) ٣٠

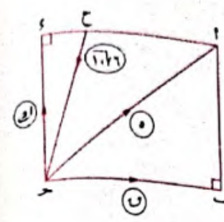
(٢١) أثرت قوى مقاديرها ق ، ١٢ ، $8\sqrt{2}$ ، $10\sqrt{2}$ ، ك نيوتن فى نقطة مادية فى اتجاهات الشرق ، الشمال ، الشمال الغربى ، الجنوب الغربى ، الجنوب على الترتيب

وكان مقدار محصلة القوى = ٤ نيوتن فى اتجاه الشمال فإن : ق − ك = ...

(أ) ٢٤ (ب) ٢٧ (جـ) ١٢ (د) ٦

(٢٢) في الشكل المقابل :

أثرت قوى مقاديرها ق ، ٥ ، ك ، ٦$\sqrt{10}$ في المستطيل أ ب حـ ء في الاتجاهات حـ ب ، حـ أ ، حـ ء ، ح حـ بحيث أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم ، أ ح = ٦ سم فإذا كانت مجموعة القوى متزنة فإن : ك = ... نيوتن.

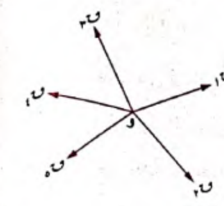


(أ) ١٢ (ب) ١٥ (جـ) ١٨ (د) ٢٠

(٢٣) أثرت القوى المستوية التي مقاديرها ٥ ، ٤ ، ق ، ٣ ، ك ، ٧ ث.كجم في نقطة مادية والزاوية بين كل قوتين متتاليتين منها ٦٠° إذا كانت المجموعة في حالة اتزان فإن : ق + ٢ ك = ... ث.كجم.

(أ) ٢١ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ١٥

(٢٤) الشكل المقابل يمثل مجموعة من القوى المتلاقية في نقطة (و) قام محمد باتخاذ إحداثيات متعامدة مركزها النقطة (و) والاتجاه الموجب لمحور س ينطبق على $ق_1$ فكان مقدار المحصلة $ح_1$ وتصنع زاوية قياسها (θ_1) مع الاتجاه الموجب لمحور س وقام إبراهيم باتخاذ إحداثيات متعامدة مركزها النقطة (و) والاتجاه الموجب لمحور س ينطبق على القوة $ق_2$ فكان مقدار المحصلة $ح_2$ وتصنع زاوية قياسها (θ_2) مع الاتجاه الموجب لمحور س فإن : ....



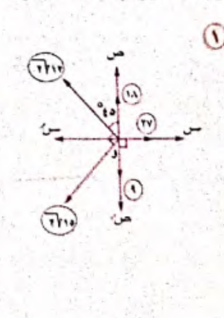
(أ) $ح_1 = ح_2$ ، $\theta_1 = \theta_2$ (ب) $ح_1 = ح_2$ ، $\theta_1 \neq \theta_2$

(جـ) $ح_1 \neq ح_2$ ، $\theta_1 = \theta_2$ (د) $ح_1 \neq ح_2$ ، $\theta_1 \neq \theta_2$

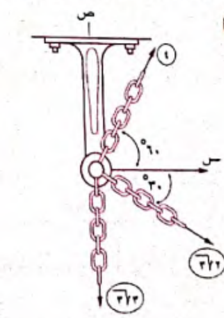
ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد مقدار واتجاه محصلة القوى المؤثرة في كل شكل من الشكلين الآتيين (علمًا بأن القوى المعطاة مقدرة بالنيوتن) :

(١)



(٢)



٢ ثلاث قوى مستوية مقاديرها ١ ، ٢ ، ٢$\sqrt{3}$ نيوتن تؤثر في نقطة م واتجاهاتها هي م أ ، م ب ، م حـ على الترتيب حيث ق(∠أ م ب) = ٦٠° ، ق(∠ب م حـ) = ٣٠° ، ق(∠أ م حـ) = ٩٠°.
أوجد المحصلة. «٤ نيوتن ، في اتجاه م ب»

٣ أثرت القوى ٨ ، ٤$\sqrt{3}$ ، ٦$\sqrt{3}$ ، ١٤ نيوتن في نقطة مادية وكان قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية ٣٠° وبين الثانية والثالثة ١٢٠° وبين الثالثة والرابعة ٩٠° مرتبة في اتجاه دوري واحد. أوجد محصلة هذه القوى مقدارًا واتجاهًا. «٤ نيوتن ، في اتجاه القوة الرابعة»

٤ تؤثر القوى المستوية التي مقاديرها ٢ ، ٣$\sqrt{2}$ ، ٢$\sqrt{3}$ ، $\sqrt{3}$ نيوتن في نقطة مادية فإذا كان قياس الزاوية بين القوة الأولى والقوة الثانية ٤٥° وبين القوة الثانية والقوة الثالثة ١٠٥° وبين القوة الثالثة والقوة الرابعة ١٢٠° مأخوذة في اتجاه دوري واحد. أوجد محصلة هذه القوى. «$\sqrt{13}$ نيوتن ، ١٩َ ١١° مع القوة الثانية»

٥ خمس قوى مستوية ومتلاقية في نقطة مقاديرها ٩ ، ٦ ، ٤$\sqrt{2}$ ، ٥$\sqrt{2}$ ، ٥ نيوتن وتعمل في اتجاهات الشرق ، الشمال ، الشمال الغربي ، الجنوب الغربي ، الجنوب على الترتيب. أثبت أن مجموعة القوى متزنة.

٦ ثلاث قوى مستوية مقاديرها ٦٠ ، ٨٨ ، ٦٠ ث.جم تؤثر في نقطة ، الأولى نحو الشمال والثانية في اتجاه ٣٠° جنوب الغرب والثالثة في اتجاه ٣٠° جنوب الشرق. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى. «٢٨ ث.جم ، ٣٠° جنوب الغرب»

٧ أربع قوى مستوية تؤثر في نقطة مادية ، الأولى مقدارها ٤ نيوتن وتؤثر في اتجاه الشرق والثانية مقدارها ٢ نيوتن وتؤثر في اتجاه ٣٠° شرق الشمال والثالثة مقدارها ٥ نيوتن في اتجاه ٦٠° شمال الغرب والرابعة مقدارها ٣$\sqrt{3}$ نيوتن في اتجاه ٦٠° غرب الجنوب. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى. «٤ نيوتن ، ١٢٠°»

٨ أثرت قوى مقاديرها ٢ ق ، ٣ ق ، ٤ ق نيوتن في نقطة مادية في اتجاهات موازية لأضلاع مثلث متساوي الأضلاع في ترتيب دوري واحد. أوجد محصلة القوى مقدارًا واتجاهًا. «$\sqrt{3}$ ق نيوتن ، عمودية على القوة ٢ ق»

٩ أ ب حـ مثلث متساوي الأضلاع فيه م هي نقطة تلاقي المتوسطات. أثرت القوى التي مقاديرها ١٥ ، ٢٠ ، ٢٥ نيوتن في نقطة مادية في الاتجاهات م حـ ، م ب ، م أ
أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى. «٥$\sqrt{3}$ نيوتن ، ٣٠° مع م أ»

١٠ أ ب حـ مثلث متساوي الساقين فيه : ق(∠ب أ حـ) = ١٢٠° ، أثرت قوى مقاديرها ٤ ، ٦$\sqrt{3}$ ، ٤ نيوتن في نقطة أ في اتجاهات أ ب ، حـ ب ، حـ أ على الترتيب. أوجد محصلة القوى مقدارًا واتجاهًا.

«١٠$\sqrt{3}$ نيوتن في اتجاه حـ ب»

١١ أربع قوى مقاديرها ٢ ، ١ ، ٤ ، ٣ ، ٢√٣ نيوتن تؤثر في نقطة مادية أ وتعمل في اتجاهات بحـ ، بأ ، حـأ ، أو على الترتيب حيث أ ب حـ مثلث متساوي الأضلاع ، و منتصف بحـ
أوجد مقدار المحصلة واتجاهها
١٠ نيوتن في اتجاه أحـ

١٢ أ ب حـ ء مستطيل فيه أ ب = ٤ سم ، ب حـ = ٣ سم ، أثرت القوى الثلاث ٢ ، ٥ ، ٣ ثقل كجم في نقطة أ في اتجاهات أ ب ، أ حـ ، أ ء على الترتيب. أوجد محصلة هذه القوى وقياس زاوية ميلها على أ ب
٦٠√٢ ثقل كجم ، ٤٥°

١٣ أ ب حـ ء مستطيل فيه أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ٦ سم ، و ∈ حـ ء بحيث : و ء = ٦ سم.
أثرت قوى مقاديرها ١٢ ، ٤٠ ، ٢٦ ، ٤√٢ نيوتن في أ ب ، حـ أ ، أ و ، أ ء على الترتيب.
أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.
٦٠√٢ نيوتن ، ٤٥°

١٤ أ ب حـ ء مستطيل فيه أ ب = ٢١ سم ، ب حـ = ٩ سم ، النقطة و ∈ أ ب حيث أ و = ٩ سم.
أربع قوى مقاديرها ٤ ، ١٠ ، ٦ ، ١٢√٢ ث.كجم تؤثر في النقطة (و) في اتجاهات و ب ، و حـ ، ب حـ ، و ء على الترتيب. أوجد مقدار محصلة هذه القوى وأثبت أنها توازي ب حـ
٢٤٠ ث.كجم

١٥ أ ب حـ ء هـ و سداسي منتظم أثرت قوى مقاديرها ٨ ، ٦√٣ ، ٥ ، ٤√٣ نيوتن في أ ب ، أ حـ ، أ ء ، أ هـ على الترتيب. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.
√١٥٦ نيوتن ، ٩٠ ٤٠° مع أ ب

١٦ أ ب حـ ء هـ و شكل سداسي منتظم تؤثر القوى التي مقاديرها ٢ ، ٤√٣ ، ٨ ، ٢√٣ ، ٤ ث.كجم في نقطة أ في الاتجاهات أ ب ، أ حـ ، أ ء ، أ هـ ، أ و على الترتيب.
أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.
٢٠ ث.كجم ، ٦٠° مع أ ب

١٧ أ ب حـ ء هـ م سداسي منتظم ، و نقطة تقاطع أقطاره. أثرت القوى ٤ ، ١ ، ٤ ، ٥ ، ٢ ، ٣ ثقل جرام في نقطة و في اتجاهات و أ ، و ب ، و حـ ، و ء ، و هـ ، و م
أوجد محصلة هذه القوى وأثبت أنها تؤثر في اتجاه و ء
٢٠ ث.جم

١٨ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب فيه : أ ب = ٨٠ سم ، ب حـ = ٦٠ سم ، النقطة ء ∈ أ حـ حيث ب ء = ء حـ ، أثرت أربع قوى مقاديرها ٨ ، ١٢ ، ١٥ ، ١٠ نيوتن في النقطة ب في الاتجاهات أ ب ، ب حـ ، حـ أ ، ب ء على الترتيب. أوجد مقدار محصلة هذه القوى وأثبت أنها تؤثر في ب ء
١٥٠ نيوتن

١٩ أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ١٢ سم ، هـ ∈ ب حـ بحيث ب هـ = ٥ سم. أثرت قوى مقاديرها ٢ ، ١٣ ، ٤√٢ ، ٩ ث.جم في الاتجاهات أ ب ، أ هـ ، حـ أ ، أ ء على الترتيب. أوجد محصلة هذه القوى.
١٠٠√٢ ث.جم وتعمل في اتجاه أ حـ

٢٠ أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ٦ سم ، النقطة هـ في منتصف ب حـ والنقطة و في منتصف ء حـ ، أثرت خمس قوى مقاديرها ١ ، ١١√٥ ، ٦√٢ ، ٤√٥ ، ٤ ث.كجم في النقطة أ في اتجاهات أ ب ، أ هـ ، حـ أ ، أ و ، أ ء على الترتيب. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.
٢٠ ث.كجم ، ٦٠° ، ٣٦

٢١ أ ب حـ ء مربع ، هـ ∈ أ ء أثرت أربع قوى متلاقية في ب مقاديرها ٤ ، ٤√٢ ، ١٠ ، ٢√٢ ، ق ثقل كجم وخطوط عملها في الاتجاهات ب أ ، ب هـ ، ء ب ، ب حـ فإذا كانت هذه القوى متزنة فأوجد قياس ∠ أ ب هـ وقيمة ق
٣٠٠ ، ٢ (٥ - ٣√٢) ث.كجم

٢٢ أثرت القوى المستوية ٥ ، ٤ ، ق ، ٣ ، ك ، ٧ ث.كجم في نقطة مادية وقياس الزاوية بين كل قوتين متتاليتين منها ٦٠° أوجد مقدار كل من ق ، ك حتى تكون المجموعة في حالة اتزان
٩ ، ٦ ث.كجم

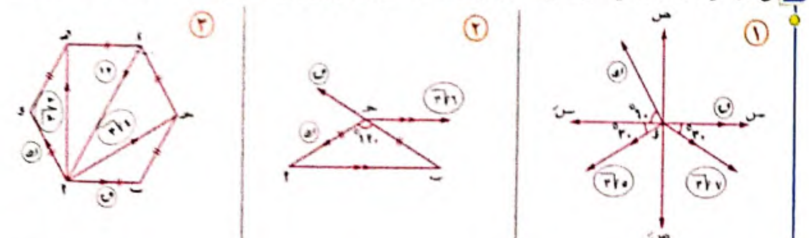
٢٣ أثرت قوى مقاديرها ق ، ٦ ، ٤√٢ ، ٥√٢ ، ك نيوتن في نقطة مادية في اتجاهات الشرق ، الشمال ، الشمال الغربي ، الجنوب الغربي ، والجنوب على الترتيب.
أوجد قيمتي : ق ، ك إذا كانت محصلة القوى = ٢ نيوتن في اتجاه الشمال.
٩ ، ٣ نيوتن

٢٤ تؤثر قوى مقاديرها ق ، ٤√٢ ، ١٢√٣ ، ٣٦ ثقل جم في نقطة مادية وكانت الثلاثة الأخيرة في اتجاهات الشمال ، ٦٠° غرب الشمال ، ٦٠° جنوب الشرق على الترتيب فإذا كانت محصلة القوى = ٨ ث.جم في اتجاه الشرق. فعين مقدار واتجاه ق
١٦ ث.جم ، ٦٠° شمال الشرق

٢٥ أثرت قوى مقاديرها ق ، ٨ ، ك ، ٥ ، ٨√٣ نيوتن في نقطة مادية في اتجاهات الشرق ، ٣٠° شرق الشمال ، الشمال ، الغرب ، والجنوب على الترتيب.
أوجد قيمتي : ق ، ك إذا كانت محصلة القوى = ٤ نيوتن في اتجاه ٦٠° شمال الشرق.
٢٠ ، ٦√٣ نيوتن

٢٦ أ ب حـ ء شبه منحرف قائم الزاوية عند كل من أ ، ء فيه أ ء = حـ ء = ٤٠ سم ، أ ب = ٧٠ سم ، م ∈ أ ب بحيث أ م = ٤٠ سم أثرت قوى مقاديرها ٢٥ ، ق ، ١٠√٢ ، ٣٥ ثقل جرام في حـ ب ، حـ م ، حـ أ ، حـ ء على الترتيب. وكان معيار محصلة هذه القوى يساوي ٥٠ ثقل جرام. أوجد ق
ق = ١٠ ث.جم

٢٧ في كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة كل من ق ، ك مقدرة بالنيوتن بحيث تصبح كل مجموعة مما يأتي متزنة :



٢٨ تؤثر القوى المستوية التي مقاديرها ق ، ٣$\sqrt{٢}$ ، ٢$\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٣}$ نيوتن في نقطة مادية بحيث كانت القوة الأولى تعمل في اتجاه الشرق وقياس الزاوية بين القوة الأولى والقوة الثانية ٤٥° وبين القوة الثانية والقوة الثالثة ١٠٥° وبين القوة الثالثة والقوة الرابعة ١٢٠° فإذا كان مقدار محصلة هذه القوى يساوي ٣$\sqrt{٢}$ نيوتن.

فأوجد قيمة ق ، قياس الزاوية بين خط عمل المحصلة وخط عمل القوة الأولى.

«٣ نيوتن ، ٤٥°»

---

٢٩ أ ب جـ ء هـ و سداسي منتظم. أثرت قوى مقاديرها ٤ ، ٢$\sqrt{٢}$ ، ق ، ٢$\sqrt{٣}$ ، ك ث.كجم تعمل في الاتجاهات $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{أجـ}$ ، $\overrightarrow{أء}$ ، $\overrightarrow{أهـ}$ ، $\overrightarrow{أو}$ على الترتيب فإذا كان مقدار محصلة المجموعة يساوي ٢٠ ث.كجم في اتجاه $\overrightarrow{أء}$ أوجد قيمتي : ق ، ك

«١٠ ، ٤ ث.كجم»

---

٣٠ الشكل المقابل يبين أربع قوى مستوية متلاقية في نقطة الأصل «و» في الاتجاهات الموضحة. حيث : جا هـ = $\frac{٤}{٥}$

وأن محصلة هذه القوى مقدارها ٨$\sqrt{٢}$ نيوتن

وتصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع $\overrightarrow{و س}$

أوجد قيمتي : ق ، ك

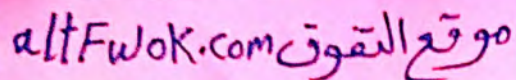


«٣٠ ، ١٤ نيوتن»

---

٣١ إذا كانت : $\overrightarrow{ق_١}$ = ٥ $\overrightarrow{س}$ + ٢ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ = أ $\overrightarrow{س}$ + ٦ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٣}$ = -١٤ $\overrightarrow{س}$ + ب $\overrightarrow{ص}$ ثلاث قوى مستوية ومتلاقية في نقطة وكانت المحصلة $\overrightarrow{ح}$ = (١٠$\sqrt{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$ π) أوجد قيمتي : أ ، ب

«-١ ، ١»



الدرس 4

اتزان جسم تحت تأثير قوتين / ثلاث قوى متلاقية في نقطة (قاعدة مثلث القوى - قاعدة لامي)

أولًا اتزان جسم جاسئ تحت تأثير قوتين

شروط اتزان جسم جاسئ تحت تأثير قوتين

* يتزن الجسم الجاسئ تحت تأثير قوتين فقط إذا كانت القوتان :

١ متساويتين في المقدار. ٢ متضادتين في الاتجاه.

٣ خطا عملهما على استقامة واحدة.

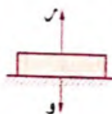
* **أمثلة على اتزان جسم تحت تأثير قوتين :**

١ جسم معلق بحبل خفيف :

إذا علق جسم وزنه (و) بحبل خفيف من إحدى نقطه فإنه يتزن تحت تأثير قوتين هما : الوزن (و) ويؤثر رأسيًا إلى أسفل ، الشد (ش) في الحبل ويؤثر رأسيًا إلى أعلى ونستنتج أن : ش = و

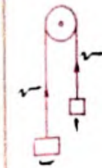
٢ جسم موضوع على نضد أفقي أملس :

إذا وضع جسم وزنه (و) على نضد أفقي أملس فإنه يتزن تحت تأثير قوتين هما : الوزن (و) ويؤثر رأسيًا إلى أسفل ، رد فعل النضد على الجسم (ر) ويؤثر رأسيًا إلى أعلى ونستنتج أن : ر = و

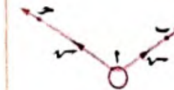


ملاحظــات

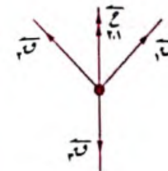
1. إذا أثرت على جسم متماسك قوتان متساويتان في المقدار ومتضادتان في الاتجاه وفي نفس الخط المستقيم فلا يكون لهما أي تأثير على الجسم سواء من ناحية السكون أو الحركة.
2. في الشكل المقابل : إذا مر خيط على بكرة ملساء وعلق في طرفي الخيط أ ، ب جسمان بحيث أصبح الخيط مشدودًا فإن الشدين عند طرفي الخيط يكونان متساويين.



3. في الشكل المقابل : إذا مر خيط في حلقة ملساء (معلقة فيه تعليقًا حرًا) فإن الشد في كل من جزأي الخيط $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ يكونان متساويين في المقدار.



ثانيًا اتزان جسم جاسئ تحت تأثير ثلاث قوى مستوية ومتلاقية في نقطة



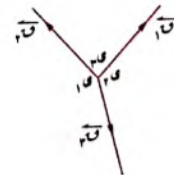
إذا اتزنت ثلاث قوى مستوية ومتلاقية في نقطة مثل $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ ، $\overrightarrow{ق_3}$ كما في الشكل وكانت $\overrightarrow{ح_{1,2}}$ هي محصلة القوتين $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ فإن القوتين $\overrightarrow{ح_{1,2}}$ ، $\overrightarrow{ق_3}$ تكونان متزنتين ، ومن شروط اتزان قوتين نستنتج أن $\overrightarrow{ح_{1,2}}$ ، $\overrightarrow{ق_3}$ متساويتان في المقدار ومتضادتان في الاتجاه ولهما نفس خط العمل.

- **وعمومًا** : إذا اتزنت ثلاث قوى مستوية ومتلاقية في نقطة فإن محصلة أي قوتين منها تكون مساوية للقوة الثالثة في المقدار ومضادة لها في الاتجاه ولهما نفس خط العمل.

مثال 1

$\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ ، $\overrightarrow{ق_3}$ ثلاث قوى مستوية ومتلاقية في نقطة مقاديرها ١٢ ، $١٢\sqrt{٣}$ ، ٢٤ نيوتن على الترتيب فإذا كانت هذه القوى متزنة فأوجد قياسات الزوايا بين خطوط عمل القوى الثلاث.

الحـــل



بفرض أن قياس الزاوية بين خطي عمل $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ = $ى_3$

، $\because$ القوى الثلاث متزنة.

$\therefore ح_{1,2} = ق_3 = ٢٤$ ومضادة لها في الاتجاه.

، $\because ح^2_{1,2} = ق^2_1 + ق^2_2 + ٢\, ق_1\, ق_2\, \text{جتا}\, ى_3$

$\therefore (٢٤)^2 = (١٢)^2 + (١٢\sqrt{٣})^2 + ٢ \times ١٢ \times ١٢\sqrt{٣}\, \text{جتا}\, ى_3$

$\therefore ٥٧٦ = ١٤٤ + ٤٣٢ + ٢٨٨\sqrt{٣}\, \text{جتا}\, ى_3$

$\therefore \text{جتا}\, ى_3 = ٠$ $\qquad \therefore ى_3 = ٩٠^\circ$

بالمثل بفرض أن قياس الزاوية بين خطي عمل $\overrightarrow{ق_2}$ ، $\overrightarrow{ق_3}$ = $ى_1$

، $\because$ القوى الثلاث متزنة $\qquad \therefore ح_{2,3} = ق_1 = ١٢$ ومضادة لها في الاتجاه.

، $\because ح^2_{2,3} = ق^2_2 + ق^2_3 + ٢\, ق_2\, ق_3\, \text{جتا}\, ى_1$

$\therefore ١٤٤ = ٤٣٢ + ٥٧٦ + ٢ \times ١٢\sqrt{٣} \times ٢٤\, \text{جتا}\, ى_1$

$\therefore \text{جتا}\, ى_1 = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ $\qquad \therefore ى_1 = ١٥٠^\circ$

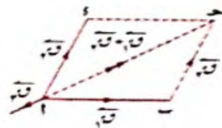
$\therefore ى_2$ (قياس الزاوية بين خطي عمل $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_3}$) $= ٣٦٠^\circ - (٩٠^\circ + ١٥٠^\circ) = ١٢٠^\circ$

- نعلم أن الشرط اللازم والكافي لاتزان جسم جاسئ تحت تأثير عدة قوى مستوية ومتلاقية في نقطة هو أن تمثل هذه القوى هندسيًا بمضلع مقفل وبالتالي نستنتج القاعدة التالية :

قاعدة 1

> إذا أمكن تمثيل ثلاث قوى مستوية ومتلاقية في نقطة بأضلاع مثلث مأخوذة في اتجاه دوري واحد فإن هذه القوى تكون متزنة.

ففي الشكل المقابل :



إذا كان : $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ ، $\overrightarrow{ق_3}$ ثلاث قوى مستوية ومتلاقية في أ وبإكمال متوازي الأضلاع أ ب جـ ء نجد أن المتجهات $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{بجـ}$ ، $\overrightarrow{جـأ}$ تمثل القوى الثلاث مقدارًا واتجاهًا.

، $\because \overrightarrow{أجـ} = \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بجـ}$ $\qquad \therefore$ المتجه $\overrightarrow{أجـ}$ يمثل محصلة القوتين $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$

ولكن المتجه $\overrightarrow{جـأ}$ يمثل القوة $\overrightarrow{ق_3}$ $\qquad$ ، $\because \overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{جـأ} = \vec{0}$

$\therefore \overrightarrow{ق_3}$ تساوي في المقدار وتضاد في الاتجاه محصلة $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$

أي أن $\overrightarrow{ق_3}$ متزنة مع محصلة $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$

$\therefore$ القوى الثلاث $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ ، $\overrightarrow{ق_3}$ متزنة.

ملاحظـــة

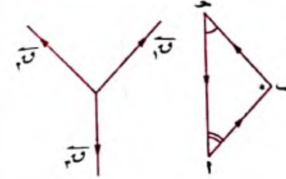
- لكى تتزن ثلاث قوى متلاقية فى نقطة وليست على استقامة واحدة يجب أن تكون مقاديرها تصلح لأن تكون أطوالاً لأضلاع مثلث ، بمعنى أنه لا بد أن يكون مقدار كبرى هذه القوى أصغر من مجموع مقدارى القوتين الآخرين لأنه فى أى مثلث يجب أن يكون أكبر الأضلاع طولاً أصغر من مجموع طولى الضلعين الآخرين.

فمثلاً القوى الثلاث التى مقاديرها ٣ ، ٤ ، ٩ وحدة قوة لا يمكن أن تتزن لأن الأعداد ٣ ، ٤ ، ٩ لا تصلح لأن تكون أطوالاً لأضلاع مثلث لأن ٩ > ٣ + ٤ أما القوى التى مقاديرها ٤ ، ٧ ، ٨ يمكن أن تتزن ولا نقول متزنة حيث إن الاتزان يعتمد على مقادير القوى واتجاهها أيضًا.

- تتزن الثلاث قوى المتلاقية فى نقطة إذا كان مقدار كبرى هذه القوى يساوى مجموع مقدارى القوتين الآخرين فى حالة أن تكون هذه القوى على استقامة واحدة.

قاعدة ٢ قاعدة مثلث القوى:

إذا اتزن جسم جاسئ تحت تأثير ثلاث قوى مستوية متلاقية فى نقطة ورسم مثلث أضلاعه توازى خطوط عمل القوى وفى اتجاه دورى واحد فإن أطوال أضلاع المثلث تكون متناسبة مع مقادير القوى المناظرة.



إذا رمزنا لمقادير القوى بالرموز $ق_1$ ، $ق_2$ ، $ق_3$ وكان Δ أ ب حـ هو المثلث الذى أضلاعه توازى خطوط عمل القوى الثلاث فإن $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{ب حـ}$ ، $\overrightarrow{حـ أ}$ تمثل القوى $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ ، $\overrightarrow{ق_3}$ على الترتيب مقدارًا واتجاهًا حيث أن الجسم متزن ويكون

$$\frac{ق_1}{أب} = \frac{ق_2}{ب حـ} = \frac{ق_3}{حـ أ}$$

ويسمى Δ أ ب حـ بـ «مثلث القوى» ويلاحظ أنه يمكن رسم عدد غير منته من المثلثات المتشابهة والتى كل منها يعتبر مثلثًا للقوى.

مثال ٢

ثلاث قوى متلاقية فى نقطة مقاديرها $ق_1$ ، $ق_2$ ، ٩٦ ث.كجم وأمكن تمثيلها بالقطع المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{ب حـ}$ ، $\overrightarrow{حـ أ}$ على الترتيب فى Δ أ ب حـ الذى فيه : أب = ٨ سم ، ب حـ = ١٠ سم ، حـ أ = ١٢ سم

أوجد قيمة كل من : $ق_1$ ، $ق_2$

الحـــل

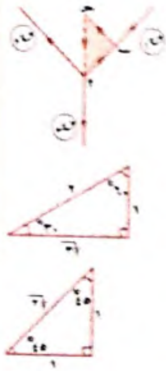
$\because$ القوى تمثل بأضلاع مثلث مأخوذة فى اتجاه دورى واحد.

$\therefore$ القوى متزنة وباستخدام قاعدة مثلث القوى :

$$\therefore \frac{ق_1}{أب} = \frac{ق_2}{ب حـ} = \frac{٩٦}{حـ أ} \qquad \therefore \frac{ق_1}{٨} = \frac{ق_2}{١٠} = \frac{٩٦}{١٢}$$

$\therefore$ $ق_1$ = ٦٤ ث.كجم ، $ق_2$ = ٨٠ ث.كجم.

ملاحظتان هامتان



١ من الممكن رسم مثلث القوى بحيث يكون ضلعان من أضلاعه محمولين على خطى عمل قوتين والضلع الثالث يوازى خط عمل القوة الثالثة.

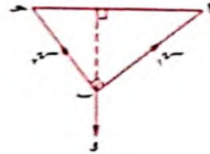
ففى الشكل المقابل : Δ أ ب حـ يكون مثلث قوى.

٢ • إذا كان مثلث القوى لثلاث قوى متزنة هو مثلث ثلاثينى ستينى كانت النسبة بين أطوال أضلاعه كنسبة ١ : ٢ : $\sqrt{٣}$

• وإذا كان مثلث القوى قائم الزاوية ومتساوى الساقين فالنسبة بين أطوال أضلاعه كنسبة ١ : ١ : $\sqrt{٢}$

معلومة إثرائية

إذا رسم مثلث أضلاعه عمودية على اتجاهات القوى المتزنة فإن النسبة بين كل قوة وطول ضلع المثلث العمودى عليها متساوية.



فى الشكل المقابل :

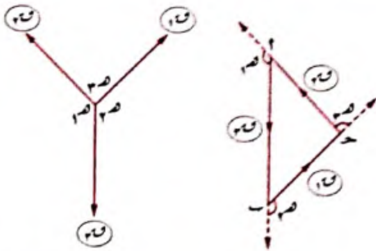
$\overrightarrow{و} \perp \overline{أحـ}$ ، $\overrightarrow{س_1} \perp \overline{ب حـ}$ ، $\overrightarrow{س_2} \perp \overline{أب}$

$$\therefore \frac{و}{أحـ} = \frac{س_1}{ب حـ} = \frac{س_2}{أب}$$

تسمى هذه القاعدة «مثلث القوى العمودى»

قاعدة ٣ قاعدة لامى:

إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى مستوية متلاقية فى نقطة فإن مقدار كل قوة يتناسب مع جيب الزاوية المحصورة بين القوتين الأخريين.



فإذا رمزنا لمقادير القوى بالرموز $ق_1$ ، $ق_2$ ، $ق_3$ وكانت $هـ_1$ ، $هـ_2$ ، $هـ_3$ هى قياسات الزوايا المقابلة لها على الترتيب كما فى الشكل المقابل.

فإن : Δ أ ب حـ هو مثلث القوى

$$\therefore \frac{ق_1}{ب حـ} = \frac{ق_2}{حـ أ} = \frac{ق_3}{أب} \qquad (١)$$

ومن قانون الجيب :

$$\therefore \frac{\text{ب ح}}{\text{جا}(١٨٠^\circ - \text{هـ}_1)} = \frac{\text{ح ا}}{\text{جا}(١٨٠^\circ - \text{هـ}_2)} = \frac{\text{ا ب}}{\text{جا}(١٨٠^\circ - \text{هـ}_3)}$$

أى أن $\boxed{\frac{\text{ب ح}}{\text{جا هـ}_1} = \frac{\text{ح ا}}{\text{جا هـ}_2} = \frac{\text{ا ب}}{\text{جا هـ}_3}}$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : $\boxed{\frac{\text{ق}_1}{\text{جا هـ}_1} = \frac{\text{ق}_2}{\text{جا هـ}_2} = \frac{\text{ق}_3}{\text{جا هـ}_3}}$

مثال ٣

ثلاث قوى مستوية مقاديرها ق_1 ، ق_2 ، ١٨ نيوتن متلاقية فى نقطة ومتزنة فإذا كان قياس الزاوية بين خطى عمل القوتين الأولى والثانية ٩٠° وبين الثانية والثالثة ١٢٠°

فأوجد قيمة كل من : ق_1 ، ق_2

الحل

قياس الزاوية بين خطى عمل القوتين الأولى والثالثة

$= ٣٦٠^\circ - (٩٠^\circ + ١٢٠^\circ) = ١٥٠^\circ$

وحسب قاعدة لامى يكون : $\frac{\text{ق}_1}{\text{جا } ١٢٠^\circ} = \frac{\text{ق}_2}{\text{جا } ١٥٠^\circ} = \frac{١٨}{\text{جا } ٩٠^\circ}$

$\therefore \frac{\text{ق}_1}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} = \frac{\text{ق}_2}{\frac{١}{٢}} = \frac{١٨}{١}$

$\therefore \text{ق}_1 = ١٨ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ٩\sqrt{٣}$ نيوتن. ، $\text{ق}_2 = ١٨ \times \frac{١}{٢} = ٩$ نيوتن.

اتزان جسم على مستوٍ مائل أملس

إذا وضع جسم وزنه (و) على مستوٍ مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ فإن الجسم يكون واقعًا تحت تأثير قوتين :

١ قوة الوزن ($\overrightarrow{\text{و}}$) واتجاهها رأسى إلى أسفل.

٢ قوة رد فعل المستوى المائل الأملس ($\overrightarrow{\text{ر}}$) وهى عمودية على المستوى

وهاتان القوتان لا يمكن أن تتزنا حيث إن خطى عملهما ليسا واحدًا

ولكى يحدث الاتزان لابد من وجود قوة ثالثة تؤثر على الجسم وتأخذ أحد الأشكال الآتية :

(أ) القوة فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى.

(ب) القوة أفقية.

(جـ) القوة فى اتجاه يميل بزاوية ى على المستوى لأعلى.

(د) القوة فى اتجاه يميل على الأفقى بزاوية ى لأعلى.

ملاحظة

رد فعل المستوى الأملس ($\overrightarrow{\text{ر}}$) يكون عموديًا على المستوى.

مثال ٤

وضع جسم وزنه ٥ ثقل كجم على مستوٍ مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ومنع الجسم من الانزلاق بالتأثير عليه بقوة قدرها ق تعمل فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى إلى أعلى. أوجد مقدار ق وكذا رد فعل المستوى على الجسم.

الحل

الجسم متزن بتأثير القوى التى مقاديرها ق ، ر ، ٥ ثقل كجم

كما فى الشكل وقياس الزاوية بين خطى عمل القوتين الأولى والثانية = ٩٠°

وبين الثانية والثالثة = ١٨٠° − ٣٠° = ١٥٠°

وبين الثالثة والأولى = ٩٠° + ٣٠° = ١٢٠°

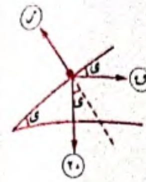
وبتطبيق قاعدة لامى يكون : $\frac{\text{ق}}{\text{جا } ١٥٠^\circ} = \frac{\text{ر}}{\text{جا } ١٢٠^\circ} = \frac{٥}{\text{جا } ٩٠^\circ}$

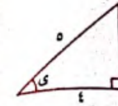
أى : $\frac{\text{ق}}{\frac{١}{٢}} = \frac{\text{ر}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} = \frac{٥}{١}$

$\therefore \text{ق} = ٥ \times \frac{١}{٢} = ٢{,}٥$ ثقل كجم. ، $\text{ر} = ٥ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{٥\sqrt{٣}}{٢}$ ثقل كجم.

مثال ٥

وضع ثقل قدره ٢٠ ثقل كجم على مستوٍ مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ى حيث جا ى = $\frac{٤}{٥}$ ومنع من الانزلاق بتأثير قوة أفقية قدرها (ق) أوجد مقدار ق وكذا رد فعل المستوى.





الحل

الثقل متزن بتأثير ثلاث قوى مقاديرها ق ، ر ، ٢٠ ثقل كجم

فيكون قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية = ٩٠° + ى

وبين القوتين الثانية والثالثة = ١٨٠° − ى وبين القوتين الثالثة والأولى = ٩٠°

وبتطبيق قاعدة لامى يكون :

$$\frac{\text{ق}}{\text{جا}(١٨٠^\circ - \text{ى})} = \frac{\text{ر}}{\text{جا}\,٩٠^\circ} = \frac{٢٠}{\text{جا}(٩٠^\circ + \text{ى})}$$

أى : $\frac{\text{ق}}{\text{جا ى}} = \frac{\text{ر}}{١} = \frac{٢٠}{\text{جتا ى}}$

وحيث إن جتا ى = $\frac{٤}{٥}$

∴ جا ى = $\frac{٣}{٥}$ ∴ $\frac{\text{ق}}{\frac{٣}{٥}} = \text{ر} = \frac{٢٠}{\frac{٤}{٥}}$

∴ ق = ٢٠ × $\frac{٣}{٥}$ × $\frac{٥}{٤}$ = ١٥ ثقل كجم. ، ر = ٢٠ × $\frac{٥}{٤}$ = ٢٥ ثقل كجم.

أمثلة عامة على توازن ثلاث قوى

مثال ٦

علق ثقل مقداره ٢٠٠ ث.جم بخيطين طولاهما ٩٠ سم ، ١٢٠ سم من نقطتين فى خط أفقى واحد البعد بينهما ١٥٠ سم أوجد مقدار الشد فى كل من الخيطين فى حالة الاتزان.

الحل

∵ $(٩٠)^2 + (١٢٠)^2 = (١٥٠)^2$

∴ Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى حـ

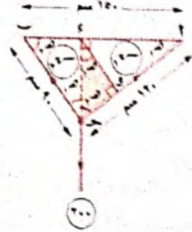
ومن هندسة الشكل نجد أن :

$\text{جا هـ}_1 = \frac{٩٠}{١٥٠} = \frac{٣}{٥}$ ، $\text{جا هـ}_2 = \frac{١٢٠}{١٥٠} = \frac{٤}{٥}$

وباستخدام قاعدة لامى : $\frac{\text{ش}_1}{\text{جا}(١٨٠^\circ - \text{هـ}_1)} = \frac{\text{ش}_2}{\text{جا}(١٨٠^\circ - \text{هـ}_2)} = \frac{٢٠٠}{\text{جا}\,٩٠^\circ}$

∴ $\frac{\text{ش}_1}{\text{جا هـ}_1} = \frac{\text{ش}_2}{\text{جا هـ}_2} = \frac{٢٠٠}{\text{جا}\,٩٠^\circ}$ ∴ $\frac{\text{ش}_1}{\frac{٣}{٥}} = \frac{\text{ش}_2}{\frac{٤}{٥}} = \frac{٢٠٠}{١}$

∴ ش_1 = ١٢٠ ث.جم ، ش_2 = ١٦٠ ث.جم.



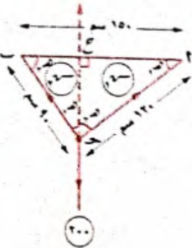
حل آخر : باستخدام قاعدة مثلث القوى :

نرسم ء و // حـ ب فيكون Δ ء و حـ هو مثلث القوى

∴ $\frac{\text{ش}_1}{\text{حـ و}} = \frac{\text{ش}_2}{\text{و ء}} = \frac{٢٠٠}{\text{ء حـ}}$

∴ $\text{ش}_1 = ٢٠٠ \times \frac{\text{حـ و}}{\text{ء حـ}} = ٢٠٠\ \text{جا هـ}_1 = ٢٠٠ \times \frac{٣}{٥} = ١٢٠$ ث.جم

، $\text{ش}_2 = ٢٠٠ \times \frac{\text{و ء}}{\text{ء حـ}} = ٢٠٠\ \text{جا هـ}_2 = ٢٠٠ \times \frac{٤}{٥} = ١٦٠$ ث.جم



حل ثالث : (بالتحليل) :

∵ القوى الثلاثة متزنة.

∴ محصلة قوتى الشد = القوة الثالثة مقدارًا وتضادها اتجاهًا

∴ $\overleftarrow{\text{ش}_1}$ ، $\overleftarrow{\text{ش}_2}$ هما مركبتا $\overleftarrow{\text{ح}}$ وهما مركبتان متعامدتان

∴ $\text{ش}_1 = \text{ح جتا هـ}_2 = ٢٠٠ \times \frac{٣}{٥} = ١٢٠$ ث.جم

، $\text{ش}_2 = \text{ح جا هـ}_2 = ٢٠٠ \times \frac{٤}{٥} = ١٦٠$ ث.جم

حل رابع : (باستخدام قاعدة مثلث القوى العمودى) :

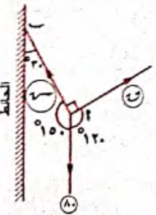
∵ Δ أ ب حـ مثلث القوى العمودى. ∴ $\frac{\text{ش}_1}{٩٠} = \frac{٢٠٠}{١٥٠} = \frac{\text{ش}_2}{١٢٠}$

∴ ش_1 = ١٢٠ث.جم ، ش_2 = ١٦٠ث.جم

مثال ٧

علق ثقل مقداره ٨٠ ثقل جم فى طرف خيط مثبت طرفه الآخر فى حائط رأسى ، أزيح الثقل بقوة عمودية على الخيط فاتزن عندما كان الخيط مائلاً على الحائط بزاوية قياسها ٣٠°

أوجد فى وضع الاتزان مقدار القوة وكذلك الشد فى الخيط عندئذٍ.

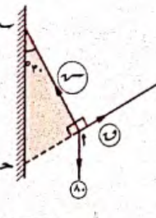


الحل

حسب قاعدة لامى يكون : $\frac{\text{ق}}{\text{جا}\,١٥٠^\circ} = \frac{\text{ش}}{\text{جا}\,١٢٠^\circ} = \frac{٨٠}{\text{جا}\,٩٠^\circ}$

∴ $\frac{\text{ق}}{\frac{١}{٢}} = \frac{\text{ش}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} = \frac{٨٠}{١}$

∴ ق = ٨٠ × $\frac{١}{٢}$ = ٤٠ ث.جم ، ش = ٨٠ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٤٠ $\sqrt{٣}$ ث.جم



حل آخر : (قاعدة مثلث القوى) :

نمد خط عمل $\overleftarrow{\text{ق}}$ ليلاقى الحائط فى حـ

فيكون Δ حـ أ ب هو مثلث القوى.

∴ حسب قاعدة مثلث القوى يكون : $\frac{\text{ق}}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{ش}}{\text{أ ب}} = \frac{٨٠}{\text{ب حـ}}$

، ∵ Δ حـ أ ب ثلاثينى ستينى.

∴ حـ ا : ا ب : ب حـ = ١ : $\sqrt{٣}$: ٢ ∴ $\frac{ق}{١} = \frac{ش}{\sqrt{٣}} = \frac{٨٠}{٢}$

∴ ق = ٤٠ ث.جم ، ش = ٤٠ $\sqrt{٣}$ ث.جم

مثال ❽

خيط خفيف $\overline{اب}$ طوله ٨ سم ثبت طرفه ا فى نقطة ثابتة وعلق وزن مقداره ٢٠٠ ث. جم من طرفه الآخر ب أوجد مقدار القوة اللازمة لحفظ التوازن على بعد ٤ سم من الخط الأفقى المار فى ا وأيضًا الشد فى الخيط فى كل من الحالتين الآتيتين :

١ إذا كانت القوة المؤثرة أفقية. ٢ إذا كان اتجاه القوة متعامدًا مع $\overleftarrow{اب}$

الحـــل

الحالة الأولى :

إذا كانت القوة المؤثرة أفقية :

يمكن اعتبار المثلث ا ب حـ مثلث القوى.

∴ $\frac{ش}{اب} = \frac{ق}{احـ} = \frac{٢٠٠}{بحـ}$

، ∵ ا حـ = $\sqrt{(٨)^٢ - (٤)^٢}$ = ٤ $\sqrt{٣}$ سم ∴ $\frac{ش}{٨} = \frac{ق}{٤\sqrt{٣}} = \frac{٢٠٠}{٤}$

∴ ش = ٦٠٠ ث.جم ، ق = ٢٠٠ $\sqrt{٣}$ ث.جم

الحالة الثانية :

إذا كان اتجاه القوة متعامدًا مع $\overleftarrow{اب}$

بتطبيق قاعدة لامى يكون : $\frac{ش}{\text{جا } ١٥٠^\circ} = \frac{ق}{\text{جا } ١٢٠^\circ} = \frac{٢٠٠}{\text{جا } ٩٠^\circ}$

∴ ش = $\frac{٢٠٠ \text{ جا } ١٥٠^\circ}{\text{جا } ٩٠^\circ}$ = ١٥٠ ث جم

، ق = $\frac{٢٠٠ \text{ جا } ١٢٠^\circ}{\text{جا } ٩٠^\circ}$ = ١٥٠ $\sqrt{٣}$ ث جم

ملاحظة

إذا مد خط عمل إحدى القوى الثلاث ليقسم الزاوية بين خطى عمل القوتين الأخريين إلى زاويتين فيمكن تطبيق قاعدة لامى كما يلى :

$\frac{ق_١}{\text{جا } ى_١} = \frac{ق_٢}{\text{جا } ى_٢} = \frac{ق_٣}{\text{جا } (ى_١ + ى_٢)}$

مثال ❾

وضع جسم وزنه ١٨ ثقل كجم على مستوٍ مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ومنع من الانزلاق بتأثير قوة قدرها (ق) تميل على اتجاه خط أكبر ميل للمستوى إلى أعلى بزاوية قياسها ٣٠° فأوجد مقدار هذه القوة ورد فعل المستوى على الجسم.

الحـــل

الجسم متزن بتأثير القوى الثلاث التى مقاديرها ق ، ر ، ١٨ ثقل كجم

حيث قياس الزاوية بين خطى عمل القوتين الأولى والثانية = ٦٠°

وبين الثانية والثالثة = ١٥٠°

وبين الثالثة والأولى = ٣٠° + ٩٠° + ٣٠° = ١٥٠° أيضًا

وبتطبيق قاعدة لامى يكون :

$\frac{ق}{\text{جا } ١٥٠^\circ} = \frac{ر}{\text{جا } ١٥٠^\circ} = \frac{١٨}{\text{جا } ٦٠^\circ}$ أى $\frac{ق}{\frac{١}{٢}} = \frac{ر}{\frac{١}{٢}} = \frac{١٨}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}$

∴ ق = ر = ١٨ × $\frac{١}{٢}$ ÷ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٦ $\sqrt{٣}$ ثقل كجم.

حل آخر :

∵ خط عمل قوة الوزن هو خط عمل محصلة القوتين $\overleftarrow{ق}$ ، $\overleftarrow{ر}$ وينصف الزاوية بينهما

∴ ق = ر ، ∵ ع = ٢ ق جتا $\frac{ى}{٢}$

∴ ١٨ = ٢ ق جتا $\frac{٦٠^\circ}{٢}$ ∴ ١٨ = ٢ ق جتا ٣٠°

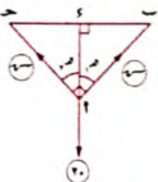
∴ ١٨ = ٢ ق × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ ق = $\frac{١٨}{\sqrt{٣}}$ = ٦ $\sqrt{٣}$ ثقل كجم.

∴ ق = ر = ٦ $\sqrt{٣}$ ثقل كجم.

مثال ❿

خيط خفيف ربط من طرفيه فى نقطتين ب ، حـ بحيث كان $\overline{بحـ}$ أفقيًا ثم انزلقت على الخيط حلقة صغيرة ملساء وزنها ٢٠ ث.جم فأصبح قياس الزاوية بين فرعى الخيط عند وضع التوازن ٩٠°

أثبت أن فرعى الخيط متساويان فى الطول ثم أوجد قيمة الشد فى كل منهما.



الحـــل

∵ الحلقة ملساء.

∴ مقدار الشد فى فرع الخيط $\overline{اب}$

= مقدار الشد فى فرع الخيط $\overline{احـ}$ = ش

وباستخدام قاعدة لامى

$\therefore \frac{\text{ش}}{\text{جا هـ}_1} = \frac{\text{ش}}{\text{جا هـ}_2} = \frac{٢٠}{\text{جا } ٩٠^\circ}$ $\therefore$ جا هـ$_1$ = جا هـ$_2$

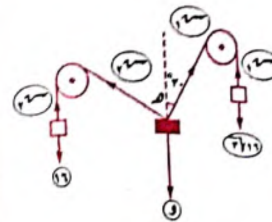
$\therefore$ هـ$_1$ = هـ$_2$ = $\frac{٩٠^\circ}{٢} = ٤٥^\circ$ $\therefore \frac{\text{ش}}{\text{جا } ٤٥^\circ} = \frac{٢٠}{\text{جا } ٩٠^\circ}$ $\therefore$ ش = ١٠$\sqrt{٢}$

، $\because$ $\overline{\text{أ د}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$ ، ق(∠ د هـ$_1$) = ق(∠ د هـ$_2$) = ٤٥°

$\therefore$ أ ب = أ حـ $\therefore$ فرعا الخيط متساويان فى الطول.

مثال ١١

علق جسم وزنه (و) نيوتن بواسطة خيطين يميل أولهما على الرأسى بزاوية قياسها ٣٠° ويمر على بكرة صغيرة ملساء مثبتة ويحمل الطرف الآخر لهذا الخيط جسمًا وزنه ١٦$\sqrt{٣}$ نيوتن، ويميل الخيط الثانى على الرأسى بزاوية قياسها هـ ويمر على بكرة ملساء أخرى مثبتة ويحمل الطرف الآخر لهذا الخيط جسمًا وزنه ١٦ نيوتن. أوجد فى وضع التوازن قيمة الوزن (و) وقيمة هـ



الحل

باستخدام قاعدة لامى :

$\therefore \frac{\text{ش}}{\text{جا هـ}} = \frac{\text{ش}}{\text{جا } ٣٠^\circ} = \frac{\text{و}}{\text{جا(هـ} + ٣٠^\circ)}$

$\therefore \frac{١٦\sqrt{٣}}{\text{جا هـ}} = \frac{١٦}{\text{جا } ٣٠^\circ} = \frac{\text{و}}{\text{جا(هـ} + ٣٠^\circ)}$

$\therefore$ جا هـ = $\frac{١٦\sqrt{٣} \times \text{جا } ٣٠^\circ}{١٦} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ $\therefore$ ق(∠ هـ) = ٦٠°

$\therefore \frac{١٦}{\text{جا } ٣٠^\circ} = \frac{\text{و}}{\text{جا}(٦٠^\circ + ٣٠^\circ)}$ $\therefore$ و = ٣٢ نيوتن.

تمارين 4 على اتزان جسم تحت تأثير قوتين / ثلاث قوى متلاقية فى نقطة (قاعدة مثلث القوى - قاعدة لامى)



اختبر نفسك

• تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا • من أسئلة الكتاب المدرسى

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية فى نقطة فإن مقدار كل قوة يتناسب مع .... الزاوية المحصورة بين القوتين الآخريين.

(أ) جيب تمام (ب) جيب (جـ) ظل (د) ظل تمام

(٢) إذا اتزن جسم تحت تأثير قوتين $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ فإن : ....

(أ) $\overrightarrow{ق_1} = \overrightarrow{ق_2}$ (ب) ق$_1$ = ق$_2$

(جـ) $\overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2} \neq \overrightarrow{0}$ (د) $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ ليسا على استقامة واحدة.

(٣) إذا اتزن جسم تحت تأثير عدة قوى مستوية فإن أقل عدد من القوى تحدث الاتزان يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٤) أقل عدد من القوى المستوية غير المتساوية يمكن أن يتزن هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٥) إذا كانت : $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ ، $\overrightarrow{ق_3}$ ثلاث قوى متلاقية فى نقطة ومتزنة فإن مقدار محصلة $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ يساوى ....

(أ) ق$_1$ (ب) ق$_1$ + ق$_2$ (جـ) ق$_3$ (د) صفر

(٦) ثلاث قوى متساوية فى المقدار ومتلاقية فى نقطة ومتزنة فإن قياس الزاوية بين أى قوتين = ...

(أ) ٦٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

(٧) إذا كانت ق تتزن مع قوتين متعامدتين مقداراهما ٨ نيوتن ، ١٥ نيوتن

فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٧ (ب) ١٧ (جـ) ٢٣ (د) ٧$\sqrt{٢}$

(٨) إذا كانت القوة التى مقدارها ق تتزن مع قوتين مقداراهما ٥ ، ٣ نيوتن واللتان تحصران بينهما زاوية قياسها ٦٠° فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) $\sqrt{١٩}$ (ب) $\sqrt{٣٤}$ (جـ) ٧ (د) ١٥

(٩) أى من مجموعات القوى الآتية يمكن أن تكون متزنة ؟

① ٨ نيوتن ، ٨ نيوتن ، ٨ نيوتن.

② ٨ نيوتن ، ٨ نيوتن ، ١٦ نيوتن.

③ ٨ نيوتن ، ٨ نيوتن ، ٢٠ نيوتن.

(أ) ① فقط. (ب) ② فقط. (جـ) ① ، ② (د) ② ، ③

(١٠) أى من مجموعات القوى الآتية لا يمكن أن تكون متزنة ؟

(أ) ١٠ نيوتن ، ١٠ نيوتن ، ٥ نيوتن. (ب) ٤ نيوتن ، ٦ نيوتن ، ١٠ نيوتن.

(جـ) ١١ نيوتن ، ٧ نيوتن ، ٨ نيوتن. (د) ٨ نيوتن ، ٤ نيوتن ، ١٤ نيوتن.

(١١) ثلاث قوى ليست على استقامة واحدة مستوية ومتلاقية فى نقطة متزنة فإذا كان مقدارى قوتين منهم هما ٧ ، ٣ نيوتن فإن مقدار القوة الثالثة يمكن أن يساوى .... نيوتن.

(أ) ١٠ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٣

(١٢) ثلاث قوى مستوية ومتزنة تؤثر فى نقطة مادية قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية ٦٠° ، بين الثانية والثالثة ١٥٠° فإن النسبة بين مقادير القوى هى ....

(أ) ١ : ١ : $\sqrt{٣}$ (ب) ١ : ٢ : $\sqrt{٣}$ (جـ) $\sqrt{٢}$: $\sqrt{٢}$: ١ (د) $\sqrt{٣}$: $\sqrt{٣}$: ١

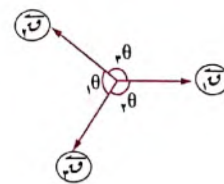
(١٣) القوة التى تتزن مع القوتين المتعامدتين ق ، ق نيوتن قياس زاوية ميلها على إحدى القوتين = ...°

(أ) ٩٠ (ب) ١٢٠ (جـ) ١٣٥ (د) ١٥٠

(١٤) ثلاث قوى مستوية مقاديرها ٥ ، ٦ ، ٧ نيوتن تؤثر فى نقطة مادية فإذا كانت القوى متزنة فإن جيب تمام الزاوية بين القوتين الثانية والثالثة = ...

(أ) $\frac{٧}{٥}$ (ب) $\frac{-٥}{٧}$ (جـ) $\frac{١٥}{١٧}$ (د) $\frac{١}{٢}$

(١٥) إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى بالشكل المقابل فأى الجمل الآتية صحيحة ؟



① $ق_١ + ق_٢ + ق_٣ =$ صفر

② $\overrightarrow{ق_١} + \overrightarrow{ق_٢} + \overrightarrow{ق_٣} =$ صفر

③ $\frac{ق_١}{جا \theta_١} = \frac{ق_٢}{جا \theta_٢} = \frac{ق_٣}{جا \theta_٣}$

(أ) ① ، ② فقط. (ب) ② ، ③ فقط. (جـ) ③ فقط. (د) ① ، ② ، ③

(١٦) فى الشكل المقابل :



إذا كانت المجموعة متزنة

فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ١٠ (ب) ١٢ (جـ) ٢٠ (د) ١٣

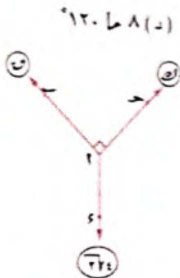
(١٧) ا نقطة مادية متزنة تحت تأثير القوى الثلاثة الموضحة بالشكل المقابل حيث $\overrightarrow{ق}$ تتزن مع قوتين مقدار كل منهما ٨ نيوتن وتصنع مع كل منهما زاوية قياسها ١٢٠°



فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) صفر (ب) ٨ (جـ) ١٦ (د) ٨ جا ١٢٠°

(١٨) فى الشكل المقابل :



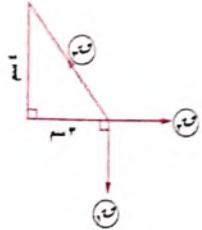
ثلاث قوى متزنة مقاديرها ق ، ك ، ٤$\sqrt{٢}$ نيوتن

، ق(∠ب ا حـ) = ٩٠° ، ق(∠ب ا ء) = ١٣٥°

فإن : (ق ، ك) = ...

(أ) (٤ ، ٤) (ب) (٤ ، $\sqrt{٢}$) (جـ) ($\sqrt{٢}$ ، ٤) (د) (٢ ، ٢)

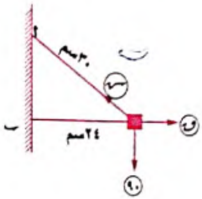
(١٩) إذا كان الشكل المقابل يوضح اتزان جسم تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية فى نقطة مقاديرها $ق_١$ ، $ق_٢$ ، $ق_٣$ نيوتن وأضلاع المثلث القائم توازى خطوط عمل هذه القوى وفى ترتيب دورى واحد



فإن $ق_١ : ق_٢ : ق_٣ =$ ....

(أ) ٣ : ٤ : ٥ (ب) ٣ : ٥ : ٤ (جـ) ٤ : ٥ : ٣ (د) ٤ : ٣ : ٥

(٢٠) فى الشكل المقابل :



جسم وزنه ٩٠ ث.جم معلق فى نهاية خيط طوله ٣٠ سم جذب الجسم بتأثير قوة أفقية حتى اتزن وهو على بعد ٢٤ سم من الحائط

فإن : ش − ق = ... ث.جم.

(أ) ١٥٠ (ب) ١٢٠ (جـ) ٥٠ (د) ٣٠

(٢١) في الشكل المقابل :

مصباح وزنه ٢٨٠ ث.جم معلق في نهاية خيط اتزن بتأثير قوة عمودية على الخيط عندما يميل الخيط على الرأسي بزاوية قياسها ٦٠°

فإن : $\frac{ق}{ش}$ = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{1}{2}$ (جـ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (د) $\sqrt{3}$

(٢٢) في الشكل المقابل :

علق ثقل مقداره (و) نيوتن في طرف خيط مثبت طرفه الآخر في حائط رأسي وشد الثقل بقوة أفقية مقدارها (ق) نيوتن فاتزن عندما كان الخيط مائلاً على الحائط بزاوية قياسها θ أي الجمل الآتية غير صحيح في وضع الاتزان ؟

(أ) ق = و ظا θ (ب) $\overrightarrow{و} + \overrightarrow{ق} + \overrightarrow{ش} = \overrightarrow{صفر}$

(جـ) ش² = ق² + و² (د) ش = ق + و

(٢٣) في الشكل المقابل :

جسم وزنه ٢٠ ث.كجم متزن

فإن : $\frac{ش_1}{ش_2}$ = ...

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(جـ) $\frac{2}{3}$ (د) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(٢٤) في الشكل المقابل :

الجسم متزن على مستوى مائل أملس

فإن : ق (د θ) = ...

(أ) ٦٠° (ب) ٤٥°

(جـ) ٣٠° (د) ٧٥°

(٢٥) في الشكل المقابل :

إذا كان الجسم متزنًا تحت تأثير القوى المبينة بالشكل فإن : ق (د هـ) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠°

(جـ) ٤٥° (د) ١٥°

(٢٦) في الشكل المقابل :

جسم وزنه ١٨ نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° يتزن بتأثير قوة أفقية ق نيوتن.

فإن : ق + ر = ... نيوتن.

(أ) $6\sqrt{3}$ (ب) $12\sqrt{3}$

(جـ) $18\sqrt{3}$ (د) $24\sqrt{3}$

(٢٧) في الشكل المقابل :

جسم وزنه ١٨ نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° يتزن بتأثير قوة ق نيوتن في اتجاه المستوى لأعلى

فإن : ق + ر = ... نيوتن.

(أ) $6\sqrt{3}$ (ب) $9\sqrt{3}$

(جـ) $18\sqrt{3}$ (د) $9 + 9\sqrt{3}$

(٢٨) وضع جسم وزنه ٦ ث.كجم على مستوى مائل أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ في حالة توازن بواسطة قوة أفقية فإن مقدار هذه القوة الأفقية = ...

(أ) $\sqrt{3}$ (ب) $2\sqrt{3}$ (جـ) $4\sqrt{3}$ (د) ٦

(٢٩) وضع جسم وزنه ٦ نيوتن على مستوى أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ في حالة توازن بقوة مقدارها ٤٩ نيوتن وتصنع مع اتجاه خط أكبر ميل للمستوى زاوية قياسها θ

فإن : جتا θ = ...

(أ) $\frac{3}{49}$ (ب) $\frac{3}{4}$ (جـ) $\frac{3}{5}$ (د) $\frac{4}{5}$

(٣٠) وضع جسم يزن ٢٠ ث.كجم على مستوى مائل أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ى حيث جا ى = $\frac{3}{5}$ ومنع من الانزلاق بواسطة قوة أفقية ق فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٣٠ (ب) ١٥ (جـ) ١٠ (د) $5\sqrt{3}$

(٣١) في الشكل المقابل :

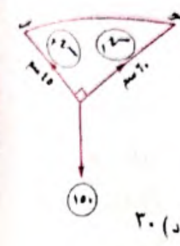
ثقل مقداره (و) معلق بخيطين يميلان على الأفقي بالزاويتين الموضحتين

فإن : $ش_1$ = ...

(أ) $\frac{1}{2}$ و (ب) $\frac{1}{2}$ و

(جـ) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ و (د) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ و

(٣٢) في الشكل المقابل :



جسم وزنه ١٥٠ ث.جم متزن بربطه بخيطين متعامدين طولاهما ٦٠ سم ، ٤٥ سم وطرفا الخيطين حـ ، ب على خط أفقي واحد

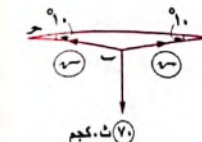
فإن : $ش_2 - ش_1 = ...$ ث.جم.

(أ) ١٢٠ (ب) ٩٠ (جـ) ٦٠ (د) ٣٠

(٣٣) جسم وزنه ٢٨ ث.كجم معلق بواسطة خيطين مثبت طرفاهما الأخران ، فإذا كان الخيطان متعامدين وقياس الزاوية بين أحدهما وخط عمل وزن الجسم ١٢٠° فإن مقدار الشد في هذا الخيط = ...

(أ) ١٤ (ب) ٢٨ (جـ) $١٤\sqrt{٣}$ (د) $٢٨\sqrt{٣}$

(٣٤) في الشكل المقابل :

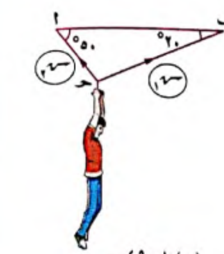


يسير رجل وزنه ٧٠ ث.كجم على حبل فإذا انخفض طرفا الحبل عن الأفقي بزاوية قياسها ١٠° عندما وصل الرجل إلى منتصف الحبل

فإن قيمة الشد في الحبل (ش) = ...

(أ) $\frac{٧٠ \text{ جا } ٢٠°}{\text{جا } ١٠٠°}$ (ب) $\frac{٧٠ \text{ جا } ١٠٠°}{\text{جا } ١٦٠°}$ (جـ) $\frac{٧٠ \text{ جا } ١٠٠°}{\text{جا } ١٦٠°}$ (د) $\frac{\text{جا } ١٠٠°}{٧٠ \text{ جا } ١٦٠°}$

(٣٥) في الشكل المقابل :



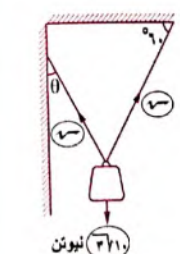
تعلق رجل وزنه (و) ث.كجم رأسيًا من نقطة حـ ومثبت بواسطة حبلين $\overline{حـ ب}$ ، $\overline{حـ أ}$ كما بالشكل

وكان $ش_2 = ٦٠$ ث.كجم

فإن : (و) = ... ث.كجم.

(أ) ٨٧,٧ (ب) ٧٠,٦ (جـ) ٦٠ (د) ٤٩,٨

(٣٦) علق جسم وزنه $١٠\sqrt{٣}$ نيوتن بواسطة خيطين كما بالشكل المقابل فإن قيمة θ التي تجعل الشد في الخيطين متساوٍ هي ....



(أ) ١٥° (ب) ٣٠°

(جـ) ٤٥° (د) ٦٠°

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ ثلاث قوى متلاقية في نقطة مقاديرها $ق_1$ ، $ق_2$ ، ٧٥ نيوتن وأمكن تمثيلها بالقطع $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{حـ أ}$ على الترتيب من Δ أ ب حـ الذي فيه : أ ب = ٣ سم ، ب حـ = ٤ سم ، حـ أ = ٥ سم

أوجد قيمة كل من : $ق_1$ ، $ق_2$ «٤٥ ، ٦٠ نيوتن»

---

٢ ثلاث قوى مقاديرها ٦٠ ، ق ، ك نيوتن متزنة ومتلاقية في نقطة فإذا كان قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية ١٢٠° وبين الثانية والثالثة ٩٠° فأوجد مقدار كل من : ق ، ك «٣٠ ، $٢٠\sqrt{٣}$ نيوتن»

---

٣ وضع جسم وزنه ١٢ ثقل.كجم على مستوى أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ توازن الجسم بواسطة قوة أفقية. أوجد مقدار القوة ورد فعل المستوى. «$٤\sqrt{٣}$ ، $٨\sqrt{٣}$ ث.كجم»

---

٤ وضع جسم وزنه (و) نيوتن على مستوى أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ الجسم في حالة توازن بتأثير قوة مقدارها ٣٦ نيوتن تعمل في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى. احسب مقدار وزن الجسم ومقدار رد فعل المستوى. «٧٢ ، $٣٦\sqrt{٣}$ نيوتن»

---

٥ ثلاث قوى مستوية ومتلاقية في نقطة مقاديرها $ق_1 = ٨$ ث.جم ، $ق_2 = ٤\sqrt{٣}$ ث.جم ، $ق_3 = ٤$ ث.جم

أوجد قياسات الزوايا الثلاثة بين خطوط عمل القوى الثلاثة. علمًا بأن المجموعة متزنة. «٩٠° ، ١٢٠° ، ١٥٠°»

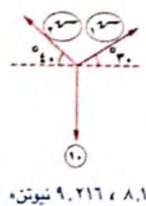
---

٦ إذا كانت م هي نقطة تقاطع قطرى المربع أ ب حـ ء ، هـ منتصف $\overline{أ ب}$ ، و منتصف $\overline{ب حـ}$ ، وكانت $ق_1$ ، $ق_2$ ، ٤٢ ث.جم هي مقادير ثلاث قوى متزنة تؤثر في $\overrightarrow{م هـ}$ ، $\overrightarrow{م و}$ ، $\overrightarrow{م ء}$

احسب قيمة كل من : $ق_1$ ، $ق_2$ «$٢١\sqrt{٢}$ ، $٢١\sqrt{٢}$ ث.جم»

---

٧ في الشكل المقابل :



ثقل مقداره ١٠ نيوتن معلق بخيطين يميل الأول على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° ويميل الآخر على الأفقي بزاوية قياسها ٤٠°

أوجد مقدار كل من : $ش_1$ ، $ش_2$ في حالة الاتزان.

«٨,١٥٠ ، ٩,٢١٦ نيوتن»

---

٨ ثبت خيط طوله ٤٠ سم من نهايتيه في نقطتين على مستقيم أفقي واحد البعد بينهما ٣٢ سم وعلق في منتصف الخيط جسم وزنه ١٨٠ ث.كجم. أوجد مقدار الشد في كل من جزأى الخيط. «١٥٠ ، ١٥٠ ث.كجم»

---

٩ جسم وزنه ١٥ ثقل كجم موضوع على مستوٍ مائل أملس يميل على الأفقي بزاوية جيبها $\frac{1}{2}$ ، أثرت عليه قوة تميل على الأفقي بزاوية قياسها ٦٠° فحفظته في حالة توازن.

أوجد مقدار القوة ورد الفعل العمودى على المستوى. «$٥\sqrt{٣}$ ، $٥\sqrt{٣}$ ث.كجم»

١٠ وضع جسم وزنه (و) ثقل كجم على مستوٍ أملس يميل على الأفقي بزاوية جيب تمامها $\frac{١}{٢}$ وحفظ فى حالة توازن بقوة تميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° إلى أعلى.
أوجد مقدار القوة وكذلك رد فعل المستوى بدلالة (و). «ق = ر = و»

---

١١ علق ثقل مقداره ٢٠٠ ث.جم بخيطين طولاهما ٦٠ سم ، ٨٠ سم من نقطتين على خط أفقى واحد البعد بينهما ١٠٠ سم. أوجد مقدار الشد فى كل من الخيطين فى وضع الاتزان. «١٦٠ ، ١٢٠ ث.جم»

---

١٢ علق جسم وزنه ٦,٥ نيوتن بواسطة خيطين طول أحدهما ٠,٥ متر وطول الآخر ١,٢ متر وربط الخيطان فى نقطتين من مستقيم أفقى بحيث كانا متعامدين. أوجد مقدار الشد فى كل من الخيطين فى وضع الاتزان. «٦ ، ٢,٥ نيوتن»

---

١٣ علق ثقل قدره ٥٠ ثقل جرام بواسطة خيطين متعامدين فإذا كان الشد فى الخيطين هما ٢٥ $\sqrt{٣}$ ، ٢٥ ثقل جرام. فأوجد قياس الزاوية التى يميل بها كل من الخيطين على الرأسى فى وضع الاتزان. «٣٠° ، ٦٠°»

---

١٤ علق ثقل مقداره ٢٠٠ ث.جم من طرف خيط خفيف مثبت طرفه الآخر فى سقف حجرة ثم جذب الثقل بقوة أفقية حتى أصبح الخيط مائلًا على الرأسى بزاوية قياسها ٣٠°
عين مقدار كل من القوة الأفقية والشد فى الخيط. «$\frac{٢٠٠\sqrt{٣}}{٣}$ ، $\frac{٤٠٠\sqrt{٣}}{٣}$ ث.جم»

---

١٥ ثقل قدره ٦٠ ثقل جم مربوط فى أحد طرفى خيط خفيف والطرف الآخر مثبت فى نقطة من حائط رأسى. أثرت قوة أفقية مقدارها ق على الثقل فى اتجاه عمودى على الحائط فاتزن الثقل عندما كان الخيط يميل على الحائط بزاوية قياسها هـ حيث ظا هـ = $\frac{٣}{٤}$ أوجد مقدار ق والشد فى الخيط. «٤٥ ، ٧٥ ث.جم»

---

١٦ علق ثقل مقداره ١٦ نيوتن فى أحد طرفى خيط خفيف مثبت طرفه الآخر فى نقطة من حائط رأسى ، أزيح الثقل بقوة فى اتجاه عمودى على الخيط حتى أصبح الخيط فى وضع التوازن يميل على الحائط بزاوية قياسها ٣٠° أوجد مقدار القوة والشد فى الخيط. «٨ ، ٨ $\sqrt{٣}$ نيوتن»

---

١٧ أُزيحت كرة بندول وزنها ٦٠٠ ث.جم حتى صار الخيط يصنع زاوية قياسها ٣٠° مع الرأسى تحت تأثير قوة على الكرة فى اتجاه عمودى على الخيط.
أوجد مقدار القوة ومقدار الشد فى الخيط فى وضع الاتزان. «٣٠٠ ، ٣٠٠ $\sqrt{٣}$ ث.جم»

---

١٨ خيط خفيف طوله ١٧٠ سم ثبت طرفه أ فى سقف حجرة وعلق من الطرف الآخر ب مصباح وزنه ٣٤ ث.جم.
أوجد مقدار الشد والقوة اللازمة لجعل المصباح متزنًا وهو على بعد ٨٠ سم أسفل سقف الحجرة فى كل من الحالتين الآتيتين :

① إذا كانت القوة أفقية. «٧٢,٢٥ ، ٦٣,٧٥ ث.جم»

② إذا كانت القوة عمودية على $\overline{أب}$ «١٦ ، ٣٠ ث.جم»

١٩ وضع جسم وزنه ٦ نيوتن على مستوى أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها هـ وحفظ توازنه بواسطة قوة مقدارها ٢ $\sqrt{٣}$ نيوتن وتميل على خط أكبر ميل للمستوى بزاوية لها نفس القياس هـ لأعلى. أوجد قيمة هـ ورد فعل المستوى على الجسم. «٣٠° ، ٢ $\sqrt{٣}$ نيوتن»

---

٢٠ جسم فى حالة توازن على مستوى مائل أملس تحت تأثير قوة تعمل فى اتجاه المستوى إلى أعلى ومقدارها يساوى نصف مقدار وزن الجسم. أوجد قياس زاوية ميل المستوى على الأفقي ورد فعل المستوى. «٣٠° ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ و»

---

٢١ فى الشكل المقابل :



جسم وزنه ٦ ث.كجم موضوع على مستوى أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ توازنه بواسطة قوة شد ش مقدارها ٢ $\sqrt{٣}$ ث.كجم تعمل فى خيط مثبت أحد طرفيه بالجسم والطرف الآخر فى حائط رأسى. أوجد قياس الزاوية التى يصنعها الخيط مع المستوى ومقدار رد فعل المستوى على الجسم. «٣٠° ، ٢ $\sqrt{٣}$ ث.كجم»

---

٢٢ وضع جسم وزنه ٣٠٠ ثقل جرام على مستوٍ مائل أملس يميل على الأفقي بزاوية ظلها $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ومنع من الانزلاق بواسطة قوة تصنع مع اتجاه خط أكبر ميل للمستوى زاوية قياسها ٣٠° إلى أعلى.
أوجد مقدار هذه القوة ومقدار رد فعل المستوى. «١٠٠ $\sqrt{٣}$ ، ١٠٠ $\sqrt{٣}$ ث.جم»

---

٢٣ وضع جسم وزنه ٨٠٠ ث.جم على مستوى أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها هـ حيث جا هـ = ٠,٦ وحفظ الجسم فى حالة توازن بواسطة قوة أفقية.
أوجد مقدار هذه القوة ورد فعل المستوى على الجسم. «٦٠٠ ، ١٠٠٠ ث.جم»

---

٢٤ خيط أملس طوله ٣٠ سم ، ربط من طرفيه فى نقطتين أ ، ب بحيث كان $\overline{أب}$ أفقيًا وطوله = ١٨ سم فإذا انزلقت حلقة ملساء وزنها ١٥٠ ثقل جم على الخيط.
أثبت أنه فى وضع التوازن يكون طولا فرعى الخيط متساويين ثم أوجد الشد فى كل منهما. «٩٣,٧٥ ث.جم»

---

٢٥ جسم وزنه ٢٤ نيوتن معلق فى أحد طرفى خيط طوله ١٣٠ سم. وطرفه الآخر مثبت فى نقطة من حائط رأسى.
أوجد مقدار القوة والشد فى الخيط إذا أثرت على الجسم قوة أفقية فاتزن :

① عندما يكون الجسم على بعد ٥٠ سم من الحائط. «١٠ ، ٢٦ نيوتن»

② عندما يميل الخيط على الرأسى بزاوية قياسها ٣٠° «٨ $\sqrt{٣}$ ، ١٦ $\sqrt{٣}$ نيوتن»

٢٦ علق وزن مقداره ٧٢ ثقل جرام فى أحد طرفى خيط وثبت الطرف الثانى للخيط فى نقطة أ على حائط رأسى. ربط خيط ثان عند نقطة ب من الخيط الأول تبعد عن أ بمقدار ٢٥ سم وشد فى اتجاه أفقى حتى صارت النقطة ب على بعد ٧ سم من الحائط.

أوجد قوة الشد فى الخيط الأفقى وفى كل من جزأى الخيط الأول. «٢١ ، ٧٥ ، ٧٢ ث جم»

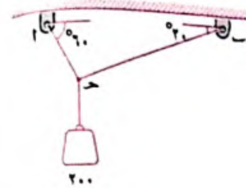
---

٢٧ علق جسم وزنه ٢٠٠ ث.جم بواسطة خيطين خفيفين يميل أحدهما على الرأسى بزاوية قياسها هـ ويميل الخيط الآخر على الرأسى بزاوية قياسها ٣٠°، فإذا كان مقدار الشد فى الخيط الأول يساوى ١٠٠ ث.جم.

فأوجد هـ ومقدار الشد فى الخيط الثانى. «٦٠° ، ١٠٠ $\sqrt{3}$ ث.جم»

---

٢٨ الشكل المقابل يبين ثقل مقداره ٢٠٠ نيوتن معلق رأسيًا من نقطة حـ ومثبت بواسطة حبلين $\overline{بحـ}$ ، $\overline{أحـ}$ يصنعان مع الأفقى زاويتين قياساهما ٢٠° ، ٦٠° فإذا كانت المجموعة متزنة ، أوجد الشد فى كل من الحبلين لأقرب نيوتن.



«١٠٢ ، ١٩١ نيوتن»

---

٢٩ الربط بالملاحة البحرية :

يجرى إنقاذ بحار باستخدام كرسى القبطان وذلك بتعليقه فى بكرة يمر عليها حبلان $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ كما فى الشكل المجاور فإذا كان قياسا زاويتى α ، β مع الأفقى ٢٥° ، ١٥° على الترتيب وكان الشد فى الخيط $\overline{أب}$ يساوى ٨٠ نيوتن.

فأوجد وزنى البحار والكرسى معًا ، وكذلك الشد فى الخيط $\overline{أحـ}$ فى وضع الاتزان.

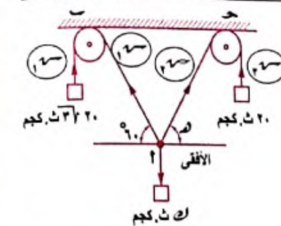
«٥٣ ، ٧٥ نيوتن»

---

٣٠ فى الشكل المقابل :

ثقل مقداره ك معلق فى طرف خيط وينتهى طرف الخيط بخيطين يمران على بكرتين ملساوين عند ب ، حـ ويحملان ثقلين مقداراهما ٢٠ $\sqrt{3}$ ، ٢٠ ث.كجم

أوجد مقدار الثقل ك ، قياس زاوية هـ فى وضع الاتزان.



«٤٠ ث.كجم ، ٣٠°»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ جسم وزنه ٤٠٠ ثقل جرام معلق من نقطة أ بواسطة خيط ، ربط خيط فى نقطة ب من الخيط وشد أفقيًا بخيط ثان $\overline{بحـ}$ يمر على بكرة صغيرة ملساء مثبتة ويتدلى فى نهايته ثقل مقداره ٣٠٠ ثقل جرام.

أوجد ميل $\overline{أب}$ على الرأسى والشد فى كل من الخيطين $\overline{أب}$ ، $\overline{بحـ}$ «[illegible]»

---

٢ $\overline{أب}$ خيط خفيف مثبت طرفاه فى نقطتين من مستقيم أفقى ، علق فى نقطتين حـ ، ء من الخيط ثقلان مقداراهما ك ، ٢٠ ثقل كجم على الترتيب فإذا اتزنت المجموعة فى وضع كان فيه $\overline{حـء}$ أفقيًا وكان جزءا الخيط $\overline{أحـ}$ ، $\overline{بء}$ يميلان على الرأسى بزاويتين قياساهما ٣٠° ، ٦٠° على الترتيب.

فأوجد الشد فى كل من أجزاء الخيط الثلاثة وقيمة ك «٤٠ $\sqrt{3}$ ، ٢٠ $\sqrt{3}$ ، ٤٠ ث.كجم ، ك = ٦٠ ث.كجم»

---

٣ علق صندوق وزنه ٢٠ نيوتن بين طرفى حبل يمر على بكرة ملساء كما هو موضح بالشكل المقابل ، فإذا أمكن تثبيت الصندوق بالحبل بطريقتين أحدهما من أ ، ب والأخر من حـ ، ء فأى الطريقتين يمكن أن ينتج عنها أقل شد فى الحبل بحيث تتزن المجموعة ؟





5 الدرس — تابع الاتزان (تلاقي خطوط عمل ثلاث قوى متزنة)

قاعدة ١

إذا اتزن جسم جاسئ تحت تأثير ثلاث قوى غير متوازية ومستوية فإن خطوط عمل هذه القوى تتلاقى في نقطة واحدة.

فمثلاً في الشكل المقابل :

إذا اتزن قضيب منتظم وزنه (و) على حائط رأسي أملس وأرض أفقية خشنة فإن :

١ وزن القضيب يؤثر في منتصفه واتجاهه رأسياً لأسفل (مركز ثقله).

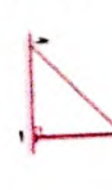
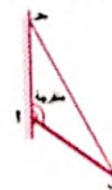
٢ رد فعل الحائط الرأسي الأملس ($ر_١$) يكون عمودياً على الحائط ويعمل في $\overleftarrow{\text{ب ء}}$

٣ رد فعل الأرض الأفقية الخشنة ($ر_٢$) غير محدد الاتجاه ولتحديد اتجاهه نرسم $\overrightarrow{\text{ا ء}}$ الذي يمر بالنقطة ء (نقطة تلاقي خطي عمل $\overrightarrow{و}$ ، $\overrightarrow{ر_١}$)

ملاحظــات

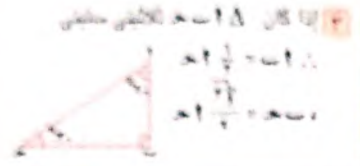
١ وزن الكرة المتجانسة يؤثر في مركزها الهندسي (مركز ثقل الكرة).

٢ إذا كان $\overline{\text{اب}}$ قضيباً يتصل طرفه ا بمفصل في حائط وربط الطرف ب بواسطة خيط ثبت في النقطة حـ التي تقع أعلى ا تماماً وكان :

$(\text{ب حـ})^2 = (\text{اب})^2 + (\text{احـ})^2$ فإن : ∠ ب ا حـ قائمة.	$(\text{ب حـ})^2 < (\text{اب})^2 + (\text{احـ})^2$ فإن : ∠ ب ا حـ حادة.	$(\text{ب حـ})^2 > (\text{اب})^2 + (\text{احـ})^2$ فإن : ∠ ب ا حـ منفرجة.
		

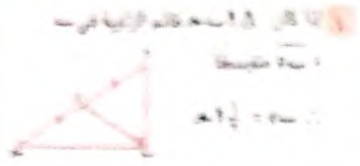
٣ إذا كان Δ اب حـ ثلاثيني ستيني

∴ اب = $\frac{1}{2}$ احـ ، ب حـ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ احـ



٤ إذا كان Δ اب حـ قائم الزاوية في ب ، $\overline{\text{ب ء}}$ متوسط

∴ ب ء = $\frac{1}{2}$ احـ



مثال ١

كرة معدنية وزنها ٢ ثقل كجم وطول نصف قطرها ٣٠ سم ربطت من نقطة ب على سطحها بخيط طوله ٣٠ سم ومربوط طرفه الآخر ا من نقطة في حائط رأسي أملس فاتزنت الكرة وهي مستندة على الحائط. أوجد مقدار الشد في الخيط ومقدار رد فعل الحائط.

الحـل

الكرة متزنة بتأثير القوى الثلاث

١ وزن الكرة ومقداره ٢ ثقل كجم ويؤثر رأسياً إلى أسفل من مركز الكرة (م).

٢ رد فعل الحائط ومقداره ر ويؤثر عند نقطة ارتكاز الكرة على الحائط وهي نقطة حـ وفي اتجاه عمودي على الحائط فهو يمر بمركز الكرة (م).

٣ الشد في الخيط ومقداره (ش) ويعمل في الخيط في اتجاه $\overrightarrow{\text{ب ا}}$

∵ خطي عمل قوتي الوزن ورد فعل الحائط يتقاطعان في (م)

∴ قوة الشد في الخيط يجب أن يمر خط عملها بالنقطة (م)

أي أن $\overleftrightarrow{\text{اب}}$ يمر بالنقطة (م) ويكون Δ م ا حـ هو مثلث القوى حيث

م ا = م ب + ب ا = ٦٠ سم ، حـ م = ٣٠ سم ∴ Δ ا م حـ ثلاثيني ستيني.

∴ احـ = $٣٠\sqrt{٣}$ سم ∴ $\frac{ش}{٦٠} = \frac{ر}{٣٠} = \frac{٢}{٣٠\sqrt{٣}}$

∴ ش = $\frac{٤\sqrt{٣}}{٣}$ ثقل كجم ، ر = $\frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$ ثقل كجم.

• حاول أن تحل هذا المثال باستخدام قاعدة لامي.

مثال ٢

$\overline{\text{اب}}$ قضيب منتظم طوله ٦٠ سم ووزنه ٢٤ ثقل كجم يؤثر في نقطة (ء) منتصف $\overline{\text{اب}}$ ، والقضيب متصل طرفه (ا) بمفصل في حائط رأسي وطرفه ب مربوط في إحدى نهايتي خيط خفيف مثبت نهايته الأخرى في نقطة (حـ) على الحائط تقع فوق ا تماماً وعلى بُعد ٨٠ سم من ا فإذا اتزن القضيب في وضع أفقي. فأوجد مقدار الشد في الخيط ومقدار واتجاه رد فعل المفصل عند ا



الحل

من Δ أ ب حـ : ب حـ = $\sqrt{(٦٠)^٢ + (٨٠)^٢}$ = ١٠٠ سم

القضيب متزن بتأثير ثلاث قوى :

١ وزنه ومقداره ٢٤ ث.كجم رأسى إلى أسفل
ويؤثر عند (ء) منتصف $\overline{أب}$

٢ الشد فى الخيط ومقداره (ش) ويعمل فى اتجاه $\overleftarrow{ب حـ}$

٣ رد فعل المفصل عند أ ومقداره (ر).

، ∵ خطى عمل قوتى الوزن والشد يتلاقيان فى نقطة م

∴ خط عمل قوة رد فعل المفصل يمر بالنقطة م أيضًا

∵ ء منتصف $\overline{أب}$ ، $\overleftrightarrow{ءم}$ // $\overline{أحـ}$ ∴ م منتصف $\overline{ب حـ}$

∴ $\overline{أم}$ متوسط فى Δ أ ب حـ القائم الزاوية فى أ   ∴ أ م = $\frac{١}{٢}$ ب حـ = ٥٠ سم

، ∵ Δ أ م حـ هو مثلث القوى : ∴ $\frac{ش}{م حـ} = \frac{ر}{أ م} = \frac{٢٤}{أ حـ}$ أى $\frac{ش}{٥٠} = \frac{ر}{٥٠} = \frac{٢٤}{٨٠}$

∴ ر = ش = ٢٤ × $\frac{٥٠}{٨٠}$ = ١٥ ث.كجم

، من Δ أ م ء : ظا هـ = $\frac{٤٠}{٣٠} = \frac{٤}{٣}$ ∴ هـ ≃ ٨َ ٥٣°

∴ رد فعل المفصل عند أ يميل على القضيب بزاوية قياسها ٨َ ٥٣°

مثال ٣

قضيب منتظم طوله ٥٠ سم ووزنه ١٢٠ ث.جم علق من طرفيه تعليقًا خالصاً بواسطة خيطين ثبت طرفاهما فى نقطة واحدة فإذا كان طولا الخيطين ٣٠ سم ، ٤٠ سم على الترتيب.
فأوجد مقدار الشد فى كل منهما.

الحل

القضيب متزن بتأثير ثلاث قوى مقاديرها :

$ش_١$ ، $ش_٢$ ، ١٢٠ ث.جم حيث $\overleftarrow{أحـ}$ خط عمل
$\overrightarrow{ش_١}$ ، $\overleftarrow{ب حـ}$ خط عمل $\overrightarrow{ش_٢}$ وهما متقاطعان فى حـ

∴ قوة الوزن لابد وأن يمر خط عملها بنقطة حـ أيضًا.

، ∵ $(أب)^٢$ = ٢٥٠٠ ، $(أحـ)^٢ + (حـ ب)^٢$ = ٩٠٠ + ١٦٠٠ = ٢٥٠٠

∴ ق(∠ أ حـ ب) = ٩٠°

، ∵ ء منتصف الوتر $\overline{أب}$ ∴ ء حـ = ء أ = ء ب

∴ ق(∠ أ حـ ء) = ق(∠ ء أ حـ) ، ق(∠ ء حـ ب) = ق(∠ ء ب حـ)

وبتطبيق قاعدة لامى يكون : $\frac{ش_١}{جا (ى)} = \frac{ش_٢}{جا (هـ)} = \frac{١٢٠}{جا ٩٠°}$

∴ $\frac{ش_١}{\frac{٣٠}{٥٠}} = \frac{ش_٢}{\frac{٤٠}{٥٠}}$ = ١٢٠

∴ $ش_١$ = ١٢٠ × $\frac{٣٠}{٥٠}$ = ٧٢ ثقل جم ، $ش_٢$ = ١٢٠ × $\frac{٤٠}{٥٠}$ = ٩٦ ثقل جم.

مثال ٤

$\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ١٤٠ سم ووزنه ٤٨٠ ث.جم يتصل طرفه أ بمفصل مثبت فى حائط رأسى. أثرت فى طرفه الآخر ب القوة $\overrightarrow{ق}$ فى الاتجاه الأفقى فاتزن القضيب فى وضع يكون فيه مائلًا على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠°
أوجد مقدار القوة $\overrightarrow{ق}$ ومقدار واتجاه رد فعل المفصل عند أ

الحل

القضيب متزن بتأثير ثلاث قوى :

١ وزنه ومقداره ٤٨٠ ث.جم رأسيًا إلى أسفل
ويؤثر عند (ء) منتصف $\overline{أب}$

٢ القوة الأفقية $\overrightarrow{ق}$ عند ب

٣ رد فعل المفصل عند أ ومقداره (ر)

، ∵ خطى عمل قوتى الوزن والقوة الأفقية يتلاقيان فى النقطة م

∴ خط عمل قوة رد فعل المفصل يمر بالنقطة م أيضًا (أى فى اتجاه $\overrightarrow{م أ}$)

∴ Δ حـ م أ هو مثلث القوى.   ∴ $\frac{ق}{حـ م} = \frac{ر}{م أ} = \frac{٤٨٠}{أ حـ}$

، ∵ ق(∠ أ ب حـ) = ٣٠°   ∴ أ حـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب = ٧٠ سم

، ب حـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ أ ب = ٧٠ $\sqrt{٣}$ سم

، ∵ ء منتصف $\overline{أب}$ ، $\overleftrightarrow{ءم}$ // $\overline{أحـ}$ ∴ م منتصف $\overline{ب حـ}$

∴ م حـ = ٣٥ $\sqrt{٣}$ سم   ∴ أ م = $\sqrt{(٧٠)^٢ + (٣٥\sqrt{٣})^٢}$ = ٣٥ $\sqrt{٧}$ سم

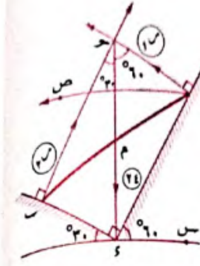
∴ $\frac{ق}{٣٥\sqrt{٣}} = \frac{ر}{٣٥\sqrt{٧}} = \frac{٤٨٠}{٧٠}$ ∴ ق = ٢٤٠ $\sqrt{٣}$ ث.جم ، ر = ٢٤٠ $\sqrt{٧}$ ث.جم.

، ∵ Δ أ م حـ قائم الزاوية فى حـ   ∴ ظا (∠ أ م حـ) = $\frac{أ حـ}{م حـ} = \frac{٧٠}{٣٥\sqrt{٣}} = \frac{٢}{\sqrt{٣}}$

∴ ق(∠ أ م حـ) = ٦َ ٤٩°   ∴ رد فعل المفصل يصنع زاوية قياسها ٦َ ٤٩° مع الأفقى.

مثال ٥

قضيب منتظم يرتكز بطرفيه على مستويين أملسين مائلين يصنعان مع الأفقى زاويتين قياساهما ٦٠° ، ٣٠° أوجد قياس الزاوية التى يصنعها القضيب مع الأفقى فى وضع التوازن وإذا كان مقدار وزن القضيب يساوى ٢٤ نيوتن عين مقدار رد فعل كل من المستويين.



الحـل

القضيب متزن بتأثير ثلاث قوى :

1. الوزن ٢٤ نيوتن رأسيًا إلى أسفل ويؤثر عند (م) منتصف $\overline{أب}$
2. رد فعل المستوى الأول $ر_1$
3. رد فعل المستوى الثانى $ر_2$

، ∵ خطى عمل قوتى رد الفعل يتلاقيان فى النقطة حـ

∴ خط عمل قوة الوزن يمر بالنقطة حـ أيضًا.

فإذا كانت ء هى نقطة تلاقى المستويين فإن ∠أ ، ∠ء ، ∠ب قوائم.

∴ أحـ ب ء مستطيل ، إذا كانت م هى منتصف $\overline{أب}$

∴ م هى نقطة تلاقى قطرى المستطيل ∴ $\overline{حـ ء}$ قطر المستطيل يمر بالنقطة م

، ∵ $\overline{حـ ء}$ رأسى. ∴ ق(∠حـ ء س) = ٩٠°

∴ ق(∠م ء أ) = ٣٠°

، ∵ م ء = م أ ∴ ق(∠ء أ م) = ٣٠°

، ∵ ق(∠ص أ ء) = ٦٠° ∴ ق(∠ص أ م) = ٣٠°

∴ القضيب يصنع زاوية قياسها ٣٠° مع الأفقى.

ومن Δ أ ء حـ : ∴ ق(∠أ حـ ء) = ٦٠°

وبتطبيق قاعدة لامى يكون : ∴ $\frac{ر_1}{جا ١٥٠°} = \frac{ر_2}{جا ١٢٠°} = \frac{٢٤}{جا ٩٠°}$

∴ $ر_1$ = ١٢ نيوتن ، $ر_2$ = ١٢ $\sqrt{٣}$ نيوتن.

مثال ٦

$\overline{أب}$ سلم منتظم وزنه ٨ $\sqrt{٣}$ ثقل كجم ، يرتكز بطرفه العلوى أ على حائط رأسى أملس وبطرفه السفلى ب على أرض أفقية خشنة بحيث كان الطرف العلوى للسلم يبعد عن سطح الأرض بمقدار $\sqrt{٣}$ مترًا والطرف السفلى يبعد عن الحائط مسافة ٢ متر.

أوجد مقدار الضغط على كل من الحائط والأرض فى وضع الاتزان.

الحـل

السلم متزن بتأثير ثلاث قوى

1. وزن السلم ومقداره ٨ $\sqrt{٣}$ ثقل كجم ويؤثر رأسيًا إلى أسفل من منتصف السلم (م).
2. رد فعل الحائط الأملس ومقداره ($ر_1$) وهو عمودى على الحائط عند أ
3. رد فعل الأرض الخشنة ومقداره ($ر_2$)

، ∵ خطى عمل قوتى الوزن ورد فعل الحائط يتقاطعان فى نقطة (هـ) مثلاً.

∴ خط عمل قوة رد فعل الأرض لابد وأن يمر بالنقطة هـ أيضًا ويكون Δ ء ب هـ هو مثلث القوى حيث :

ء هـ = أ حـ = $\sqrt{٣}$ مترًا ، ب ء = $\frac{١}{٢}$ ب حـ = ١ مترًا.

، ب هـ = $\sqrt{(١)^2 + (\sqrt{٣})^2}$ = ٢ متر.

وبتطبيق قاعدة مثلث القوى يكون :

$\frac{ر_1}{ء ب} = \frac{ر_2}{ب هـ} = \frac{٨\sqrt{٣}}{هـ ء}$

∴ $\frac{ر_1}{١} = \frac{ر_2}{٢} = \frac{٨\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}}$

∴ $ر_1$ = ٨ ثقل كجم ، $ر_2$ = ١٦ ثقل كجم.

∴ الضغط على الحائط = ٨ ثقل كجم ، الضغط على الأرض = ١٦ ثقل كجم.

ملاحظـة

ضغط طرفى السلم على كل من الأرض والحائط يساوى مقدارًا ردى فعل الأرض والحائط على طرفى السلم.

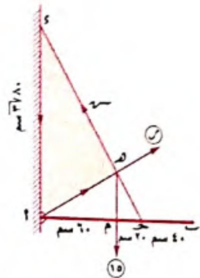
مثال ٧

$\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ١٢٠ سم ووزنه ١٥ ث.كجم ، يتصل طرفه أ بمفصل مثبت فى حائط رأسى، حفظ القضيب فى وضع أفقى بربطه من إحدى نقطه حـ حيث أحـ = ٨٠ سم بأحد طرفى خيط ، ثبت الطرف الثانى للخيط فى نقطة ء على الحائط الرأسى فوق أ وعلى بعد ٨٠ $\sqrt{٣}$ سم منها.

احسب مقدار كل من الشد فى الخيط ورد فعل المفصل.

الحـل

القضيب متزن بتأثير ثلاث قوى :



1. وزنه ١٥ ث.كجم ويؤثر رأسيًا إلى أسفل عند (م) منتصف $\overline{أب}$
2. قوة الشد فى الخيط شـ
3. رد فعل المفصل (ر)

، ∵ خطى عمل قوتى الوزن والشد يتلاقيان فى نقطة هـ

∴ خط عمل رد فعل المفصل يمر بالنقطة هـ أيضًا

∴ Δ أ هـ ء هو مثلث القوى.

، ∵ جـ ء = $\sqrt{(80)^2 + (80\sqrt{3})^2}$ = 160 سم

، ∵ Δ جـ م هـ ~ Δ جـ أ ء

∴ $\frac{\text{جـ م}}{\text{جـ أ}} = \frac{\text{جـ هـ}}{\text{جـ ء}} = \frac{\text{م هـ}}{\text{أ ء}}$ ∴ $\frac{20}{80} = \frac{\text{جـ هـ}}{160} = \frac{\text{م هـ}}{80\sqrt{3}}$

∴ جـ هـ = 40 سم ، م هـ = $20\sqrt{3}$ سم

∴ هـ ء = 120 سم ، أ هـ = $\sqrt{(60)^2 + (20\sqrt{3})^2}$ = $40\sqrt{3}$ سم

وبتطبيق قاعدة مثلث القوى : ∴ $\frac{\text{ر}}{40\sqrt{3}} = \frac{\text{ش}}{120} = \frac{15}{80\sqrt{3}}$

∴ ر = 7.5 ث كجم ، ش = $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ ث كجم

مثال 8

خيط طوله 24 سم مثبت من نهايتيه في مسمارين أ ، ب في خط أفقي واحد البعد بينهما 12 سم. لضمت حلقة صغيرة ملساء وزنها 144 داين في الخيط ثم جذبت بقوة أفقية $\overrightarrow{\text{ق}}$ حتى اتزنت رأسيًا أسفل ب أوجد مقدار الشد في كل من فرعي الخيط ومقدار القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$

الحل

بفرض أن ب م = ل سم

∴ م أ = (24 − ل) سم

، ∵ ق (∠ أ ب م) = 90°

∴ $(24 - \text{ل})^2 = \text{ل}^2 + (12)^2$

∴ 576 − 48 ل + ل² = ل² + 144

∴ ل = 9 سم

∴ م ب = 9 سم ، أ م = 15 سم

، وبفرض أن ق (∠ م أ ب) = هـ

∴ جتا هـ = $\frac{4}{5}$ ، جا هـ = $\frac{3}{5}$

، ∵ الحلقة ملساء

∴ قوتا الشد في الفرعين $\overline{\text{م ب}}$ ، $\overline{\text{م أ}}$ متساويتان في المقدار

∴ الحلقة متزنة تحت تأثير أربع قوى هي :

(ق ، 0°) ، (ش ، 90°) ، (ش ، 180° − هـ)، (144 ، 270°)

لاحظ أن

الحلقة متزنة تحت تأثير أربع قوى وبالتالي تحل باستخدام طريقة التحليل السابق دراستها في الدرس الثالث س = 0 ، ص = 0

، ∵ س = صفر

∴ ق جتا 0° + ش جتا 90° + ش جتا (180° − هـ) + 144 جتا 270° = صفر

∴ ق + ش × صفر − ش جتا هـ + 144 × صفر = صفر

∴ ق − $\frac{4}{5}$ ش = 0 (1)

، ∵ ص = صفر

∴ ق جا 0° + ش جا 90° + ش جا (180° − هـ) + 144 جا 270° = صفر

∴ ق × صفر + ش × 1 + ش جا هـ + 144 × −1 = صفر

∴ ش + $\frac{3}{5}$ ش − 144 = 0 ∴ ش $(1 + \frac{3}{5})$ = 144

∴ ش = 90 داين.

ومن (1) : ∴ ق = $\frac{4}{5}$ × 90 = 72 داين.

حل آخر:

∵ الوزن والشد الرأسي على استقامة واحدة

∴ يمكن تحصيلهما في القوة (144 − ش) ونستخدم قاعدة لامي.

∴ $\frac{\text{ق}}{\text{جا}(90^\circ + \text{هـ})} = \frac{\text{ش}}{\text{جا}\,90^\circ} = \frac{144 - \text{ش}}{\text{جا}(180^\circ - \text{هـ})}$

∴ $\frac{\text{ق}}{\text{جتا هـ}} = \frac{\text{ش}}{1} = \frac{144 - \text{ش}}{\text{جا هـ}}$

∴ $\frac{\text{ق}}{\frac{4}{5}} = \text{ش} = \frac{144 - \text{ش}}{\frac{3}{5}}$

∴ $\frac{3}{5}$ ش = 144 − ش

∴ $\frac{8}{5}$ ش = 144 ∴ ش = 90 داين.

، ق = 90 × $\frac{4}{5}$ = 72 داين.

حل ثالث :

∵ الوزن والشد الرأسي على استقامة واحدة.

∴ يمكن تحصيلهما في القوة (144 − ش)

ويصبح Δ أ ب م هو مثلث القوى.

∴ $\frac{144 - \text{ش}}{9} = \frac{\text{ش}}{15} = \frac{\text{ق}}{12}$

∴ $\frac{144 - \text{ش}}{3} = \frac{\text{ش}}{5}$

∴ 3 ش = 720 − 5 ش ∴ 8 ش = 720

∴ ش = 90 داين. ∴ $\frac{90}{15} = \frac{\text{ق}}{12}$ ∴ ق = 72 داين.

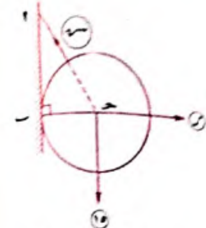
على تلاقى خطوط عمل ثلاث قوى متزنة

• تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا • من أسئلة الكتاب المدرسي

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① كرة مصمتة وزنها ٥ ث جم طول نصف قطرها ١٠ سم متزنة بتأثير خيط طوله ١٠ سم متصل بنقطة على سطحها وطرفه الآخر متصل بنقطة فى المستوى الرأسى الأملس فوق نقطة التماس فإن : (ر ، ش) = ...



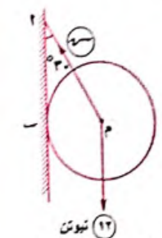
(أ) $(٤\sqrt{٣} ، ٨\sqrt{٣})$ (ب) $(٥\sqrt{٣} ، ١٠\sqrt{٣})$ (جـ) (٥ ، ١٠) (د) $(٥\sqrt{٣} ، ٨\sqrt{٣})$

② فى الشكل المقابل :

إذا كانت الكرة فى وضع اتزان والحائط أملس

فإن : ش − ر = ... نيوتن.

(حيث ر مقدار رد فعل الحائط على الكرة)



(أ) $٨\sqrt{٣}$ (ب) $٤\sqrt{٣}$

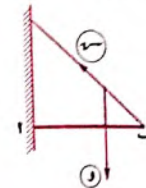
(جـ) ٤ (د) ٨

③ كرة مصمتة ملساء وزنها ٢٠ ث جم طول نصف قطرها ٥ سم متزنة بربطها بخيط طوله ٥ سم مربوط بنقطة على سطحها وطرفه الآخر بنقطة فى المستوى الرأسى الأملس فوق نقطة التماس فإن رد فعل المستوى الرأسى ر = ... ث جم.

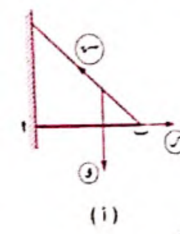
(أ) $\frac{٢٠}{\sqrt{٣}}$ (ب) ٢٠ (جـ) $\frac{٢٠}{\sqrt{٥}}$ (د) صفر

④ فى الشكل المقابل :

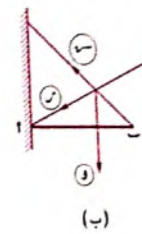
قضيب أب مثبت بمفصل عند أ من حائط رأسى أملس فإذا كان القضيب متزن



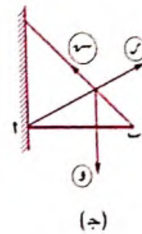
فأى من الأشكال الآتية يوضح اتجاه رد فعل المفصل ؟



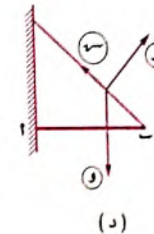
(أ)



(ب)



(جـ)



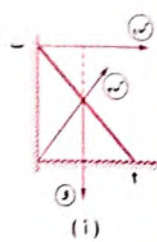
(د)

⑤ فى الشكل المقابل :

أب قضيب منتظم وزنه و يستند بطرفه أ على أرض أفقية خشنة وبطرفه ب على حائط رأسى أملس

فأى من الأشكال الآتية يوضح الاتجاه الصحيح لرد فعل الأرض ؟

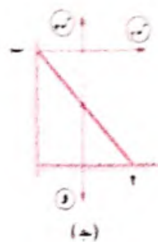




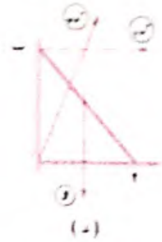
(أ)



(ب)



(جـ)



(د)

⑥ فى الشكل المقابل :

اتجاه رد فعل المفصل على القضيب عند أ ....



(أ) فى اتجاه أب

(ب) فى اتجاه أحـ

(جـ) ينصف ب حـ

(د) عمودى على ب حـ

⑦ فى الشكل المقابل :

ش₁ : ش₂ : و = ...

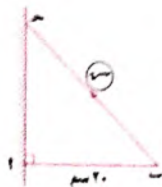


(أ) ٥ : ٣ : ٤ (ب) ٣ : ٥ : ٤

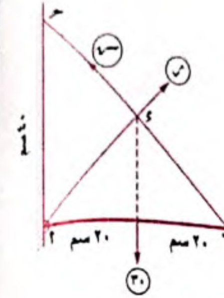
(جـ) ٤ : ٣ : ٥ (د) ٥ : ٤ : ٣

⑧ فى الشكل المقابل :

أب قضيب منتظم طوله ٢٠ سم ووزنه ٣٠ نيوتن ، متصل بمفصل مثبت فى حائط رأسى عند أ ، والطرف ب مربوط بخيط خفيف طوله $٢٠\sqrt{٢}$ سم ، ومثبت طرفه الآخر عند حـ على الحائط أعلى أ ، اتزن القضيب فى وضع أفقى ، فإن رد فعل المفصل = ... نيوتن.



(أ) $١٠\sqrt{٢}$ (ب) ١٠ (جـ) ١٥ (د) $١٥\sqrt{٢}$



(٩) في الشكل المقابل :

أب قضيب منتظم طوله ٤٠ سم ، ووزنه ٣٠ نيوتن متصل بمفصل عند أ ويتزن أفقيًا بخيط طرفاه عند ب وعند حـ حيث حـ تقع رأسيًا فوق أ ، أحـ = ٤٠ سم

أولًا : رد فعل المفصل ر = ... نيوتن.

(أ) ٣٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٤٠ √٢ (د) ١٥ √٢

ثانيًا : الشد في الخيط ش = ... نيوتن.

(أ) ١٥ √٢ (ب) ٣٠ (جـ) ٢٠ (د) ٤٠ √٢

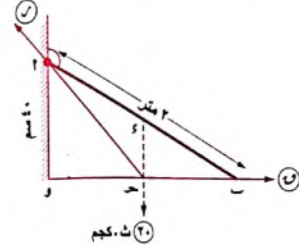
(١٠) ساق منتظمة وزنها ٢٠ نيوتن قابلة للحركة حول مفصل عند أحد طرفيها شدت جانبًا بقوة أفقية مقدارها ١٠ نيوتن تؤثر في طرفها الآخر فإن قياس زاوية ميل الساق على الرأسي عندما تتزن = ...

(أ) ٦٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٣٠° (د) ٩٠°

(١١) قضيب منتظم وزنه ٢٤ نيوتن يرتكز بطرفيه على مستويين أملسين مائلين يصنعان مع الأفقي زاويتين قياساهما ٦٠° ، ٣٠° فإن مقدار رد فعل كل من المستويين .... نيوتن.

(أ) ١٢ ، ١٥ (ب) ١٢ ، ١٢ √٣ (جـ) ١٢ √٣ ، ١٠ (د) ١٥ ، ١٣

(١٢) في الشكل المقابل :



أب قضيب منتظم طوله ٢ متر ووزنه ٢٠ ث.كجم متصل بمفصل على حائط رأسي عند أ أثرت قوة أفقية عند الطرف ب فإذا حفظ القضيب في وضع يميل على الرأسي بزاوية قياسها ٦٠°

فإن قوة رد فعل المفصل على القضيب = ... ث.كجم.

(أ) ١٠ √٣ (ب) ١٠ √٥ (جـ) ١٠ √٧ (د) ٢٠ √٢

ثانيًا الأسئلة المقالية

(١) كرة ملساء طول نصف قطرها ٣٠ سم ووزنها ٢٠٠ ثقل جرام تستند على حائط رأسي أملس ومعلقة بخيط طوله ٢٠ سم مثبت أحد طرفيه على سطح الكرة ومثبت طرفه الآخر في نقطة من الحائط تقع رأسيًا فوق نقطة تماس الكرة بالحائط.

أوجد مقدار الشد في الخيط ورد فعل الحائط في وضع الاتزان. «٢٥٠ ، ١٥٠ ثقل جم»

(٢) كرة ملساء وزنها ١٠ √٣ ثقل جم تستند على حائط رأسي أملس ومعلقة من إحدى نقط سطحها بخيط مثبت طرفه الآخر في نقطة من الحائط تقع رأسيًا فوق نقطة التماس وكان الخيط يصنع مع الرأسي زاوية قياسها ٣٠° أوجد الشد في الخيط ورد فعل الحائط في وضع الاتزان. «٢٠ ، ١٠ ثقل جم»

(٣) كرة ملساء وزنها ١٥ نيوتن تستند على حائط أملس ومعلقة بخيط مثبت أحد طرفيه في نقطة على سطحها وطرفه الآخر مربوط في الحائط في نقطة أعلى نقطة تماس الكرة تمامًا. فإذا كان طول الخيط يساوي طول نصف قطر الكرة. أوجد الضغط على الحائط والشد في الخيط في وضع الاتزان. «٥ √٣ ، ١٠ √٣ نيوتن»

(٤) كرة معدنية وزنها ١٥ ثقل كجم موضوعة بحيث تمس مستويين أملسين أحدهما رأسي والآخر يميل على الرأسي بزاوية قياسها ٣٠° أوجد رد فعل كل من المستويين. «١٥ √٣ ، ٣٠ ثقل كجم»

(٥) علق قضيب منتظم أب طوله ١٠٠ سم ووزنه ٣٠ ثقل كجم من طرفيه أ ، ب بحبلين ثبت طرفاهما في مسمار في السقف في نقطة حـ فإذا كان الحبلان متعامدين وطول أحـ = ٥٠ سم فأوجد في وضع التوازن الشد في كل من الحبلين. «١٥ ، ١٥ √٣ ثقل كجم»

(٦) علق قضيب منتظم طوله ١٣٠ سم ووزنه ٢٦ نيوتن من طرفيه تعليقًا مطلقًا في خيطين مربوطين في نقطة واحدة وكان طول أحدهما ٥٠ سم وطول الآخر ١٢٠ سم. ما هو الوضع الذي يكون فيه القضيب متزنًا ؟ وما هو مقدار الشد في كل من الخيطين ؟ «٢٤ ، ١٠ نيوتن»

(٧) أب قضيب منتظم طوله ٦٠ سم ووزنه ٤٠ نيوتن متصل بمفصل في حائط رأسي عند أ ، حفظ القضيب في وضع أفقي بواسطة خيط خفيف يتصل بطرف القضيب عند ب ، وبنقطة حـ على الحائط تعلو أ رأسيًا بمسافة ٦٠ سم. أوجد كلاً من الشد في الخيط ورد فعل المفصل عند أ «٢٠ √٢ ، ٢٠ √٢ نيوتن»

(٨) أب ساق منتظمة طولها ٨٠ سم ووزنها ٢٤ ثقل كجم والطرف أ مثبت في مفصل مثبت في حائط رأسي والطرف ب مربوط بخيط خفيف طوله ٨٠ √٣ سم مثبت طرفه الآخر في نقطة حـ على الحائط تقع رأسيًا فوق أ وعلى بُعد من أ يساوي ٨٠ سم فإذا اتزنت الساق فأوجد مقدار الشد في الخيط ورد فعل المفصل. «١٢ √٣ ، ١٢ ثقل كجم»

(٩) كرة منتظمة ترتكز على قضيبين متوازيين يقعان في مستوى أفقي واحد البعد بينهما يساوي طول نصف قطر الكرة. أوجد الضغط على كل من القضيبين إذا كان وزن الكرة يساوي ٦٠ نيوتن في وضع الاتزان. «٢٠ √٣ ، ٢٠ √٣ نيوتن»

١٠ كرة مركزها (م) وطول نصف قطرها ١٢ سم ووزنها (و) نيوتن تستند عند نقطة ب على حائط رأسي أملس ومربوطة من نقطة حـ على سطحها بخيط مثبت طرفه الآخر في نقطة أ من الحائط تقع رأسيًا أعلى نقطة ب فإذا كان الشد في الخيط مقداره ٥٠ نيوتن فأوجد طول الخيط ووزن الكرة عندما يكون رد فعل الحائط على الكرة يساوى ٢٥ نيوتن.

«١٢ سم ، ٢٥ $\sqrt{3}$ نيوتن»

---

١١ قضيب منتظم طوله ٨٠ سم ووزنه ١٢ نيوتن علق من طرفيه بحبلين ثبت طرفاهما في مسمار في السقف فإذا كان الحبلان متعامدين وطول أحدهما ٤٨ سم فما مقدار الشد في كل من الحبلين عندما يكون القضيب معلقًا تعليقًا مطلقًا وفي حالة توازن؟

«٧,٢ ، ٩,٦ نيوتن»

---

١٢ $\overline{أب}$ سلم منتظم وزنه ٣٦ ثقل كجم يرتكز بأحد طرفيه (أ) على حائط رأسي أملس وبطرفه الآخر (ب) على أرض أفقية خشنة فإذا كان السلم في وضع التوازن عندما يكون طرفه (أ) على بُعد ٣ أمتار من الأرض وطرفه (ب) على بُعد ٢.٥ متر من الحائط. أوجد رد فعل كل من الأرض والحائط على السلم.

«١٥ ، ٣٩ ثقل كجم»

---

١٣ $\overline{أب}$ قضيب غير منتظم طوله ٦٠ سم ووزنه ١٦ ثقل كجم يؤثر عند نقطة ء من القضيب حيث أء = ٢٠ سم ثبت القضيب في مفصل عند أ والمفصل مثبت في حائط رأسي وربط الطرف ب للقضيب بخيط خفيف مثبت نهايته في نقطة حـ على الحائط تقع رأسيًا فوق أ وعلى بُعد ٨٠ سم من أ فاتزن القضيب بحيث كان عموديًا على الحائط. أوجد الشد في الخيط ورد فعل المفصل.

«$6\frac{2}{3}$ ، $\frac{4\sqrt{73}}{3}$ ثقل كجم»

---

١٤ $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٢ ل سم ووزنه ٨ ثقل كجم يؤثر في منتصفه ويتصل طرفه أ بمفصل مثبت في حائط رأسي وطرفه ب مربوط في إحدى نهايتي خيط خفيف والنهاية الأخرى للخيط مثبتة في نقطة حـ على الحائط وتقع رأسيًا أعلى أ فإذا كان أب = أحـ = بحـ في وضع الاتزان. فأوجد مقدار الشد في الخيط ورد فعل المفصل عند أ؟

«٤ ، ٤ $\sqrt{3}$ ثقل كجم»

---

١٥ $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٦٠ سم ووزنه (و) ثقل كجم. ثبت طرفه أ في مفصل مثبت في حائط رأسي والطرف ب مربوط بخيط طوله ٨٠ سم مثبت نهايته في نقطة على الحائط رأسيًا فوق أ وعلى بُعد ١٠٠ سم منها فاتزن القضيب. أوجد الشد في الخيط ، رد فعل المفصل وكذلك قياس زاوية ميل رد فعل المفصل على القضيب.

«$\frac{2}{5}$و ، $\frac{\sqrt{13}}{5}$ و ثقل كجم ، ٤١َ ٣٣°»

---

١٦ قضيب منتظم $\overline{أب}$ طوله ٩٠ سم ووزنه (و) ثقل كجم. ثبت طرفه (أ) في حائط رأسي بواسطة مفصل وحفظ القضيب في حالة توازن وهو في وضع أفقي بواسطة خيط طوله ٥٠ سم ربط أحد طرفيه بنقطة (حـ) على القضيب تبعد عن أ بمقدار ٣٠ سم وثبت الطرف الثاني للخيط في نقطة (ء) على الحائط تقع رأسيًا فوق أ؟ احسب الشد في الخيط ورد فعل المفصل على القضيب.

«$\frac{15}{8}$و ، $\frac{\sqrt{97}}{8}$ و ثقل كجم»

١٧ قضيب منتظم $\overline{أب}$ يتصل طرفه أ بمفصل مثبت في حائط رأسي. أثرت في الطرف ب قوة أفقية فاتزن القضيب عندما كان يميل على الحائط بزاوية قياسها ٤٥° فإذا كان وزن القضيب ٤ ث.كجم ويؤثر في منتصفه أوجد مقدار القوة ورد فعل المفصل على القضيب.

«٢ ، ٢ $\sqrt{5}$ ث.كجم»

---

١٨ ساق منتظمة قابلة للحركة حول أحد طرفيها شدت جانبًا بقوة أفقية تؤثر في طرفها الآخر وتساوى نصف ثقل الساق. أوجد قياس زاوية ميل الساق على الرأسي عندما تتزن وكذلك رد الفعل عند الطرف الأول.

«٤٥° ، $\frac{\sqrt{5}}{2}$ وزن الساق»

---

١٩ وضع قضيب منتظم وزنه ٤ نيوتن على مستويين أملسين متقابلين ويميلان على الأفقي بزاويتين قياساهما ٣٠° ، ٦٠° بحيث يقع القضيب وخطا أكبر ميل للمستويين في مستوى رأسي واحد. أوجد مقدار الضغط على كل من المستويين وكذا قياس زاوية ميل القضيب على الأفقي في حالة التوازن.

«٢ $\sqrt{3}$ ، ٢ نيوتن ، ٣٠°»

---

٢٠ كرة ملساء من الحديد وزنها (و) ثقل كجم مستقرة بين حائط رأسي أملس ، مستوى مائل أملس يميل على الأفقي بزاوية هـ حيث جا هـ = $\frac{3}{5}$ فإذا اتزنت الكرة فأوجد الضغط على كل من الحائط والمستوى المائل.

«$\frac{3}{4}$و ، $\frac{5}{4}$و ثقل كجم»

---

٢١ قضيب منتظم وزنه ٢٠ ثقل كجم يستند بأحد طرفيه على مستوى رأسي أملس وبالطرف الآخر على مستوى مائل أملس يميل على الرأسي بزاوية قياسها ٦٠° أوجد في وضع التوازن مقدار كل من ردى فعل المستويين وكذلك قياس زاوية ميل القضيب على الرأسي.

«$\frac{20\sqrt{3}}{3}$ ، $\frac{40\sqrt{3}}{3}$ ث.كجم ، ٦ َ ١٩°»

---

٢٢ $\overline{أب}$ قضيب منتظم وزنه ٨ نيوتن يؤثر في منتصفه وضع على مستويين أملسين مائلين على الأفقي ومتقابلين ومتعامدين بحيث يقع القضيب وخطا أكبر ميل للمستويين في مستو رأسي واحد عمودي على خط تقاطع المستويين. فإذا كان مقدار الضغط على المستوى عند الطرف ب يساوى ٤ نيوتن. فأوجد في وضع التوازن مقدار الضغط على المستوى الآخر وقياسي زاويتي ميل كل من المستويين على الأفقي.

«٤ $\sqrt{3}$ نيوتن ، ٣٠° ، ٦٠°»

---

٢٣ كرة ملساء جوفاء طول نصف قطرها (نق) ووزنها ١٢ $\sqrt{3}$ ثقل كجم موضوعة على مستوى مائل أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° حفظت الكرة من الانزلاق على المستوى بواسطة ربطها بخيط من نقطة على سطحها وطول الخيط يساوى طول نصف قطر الكرة وثبتت نهاية الخيط في نقطة على المستوى المائل. أثبت أنه في وضع التوازن يكون هذا الخيط أفقيًا ثم أوجد مقدار الشد في الخيط ، رد فعل السطح المائل على الكرة.

«١٢ ، ٢٤ ثقل كجم»

الـوحـدة 2

الهندسة والقياس

الدرس 1

الدرس 2

الدرس 3

الدرس 4



٢٤ قضيب منتظم $\overline{أب}$ يمكنه الدوران بغير عائق فى مستوى رأسى حول مفصل فى أ ، ربط طرفه الآخر ب بخيط يمر على بكرة ملساء عند حـ أعلى أ تمامًا ويحمل ثقلًا يساوى نصف ثقل القضيب. أوجد قياس زاوية ميل القضيب على الأفقى فى حالة التوازن إذا علم أن أحـ = أب

«٢٠°»

---

٢٥ $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٤٠ سم ووزنه ١٢ نيوتن يستند بطرفه أ على حائط رأسى أملس ومحمول بواسطة خيط خفيف مربوط أحد طرفيه فى نقطة حـ من نقط القضيب حيث ب حـ = ١٠ سم ومربوط طرفه الآخر فى نقطة ء تقع على الحائط رأسيًا فوق أ إذا كان القضيب يميل على الرأسى بزاوية قياسها ٦٠° فى وضع التوازن فأوجد مقدار الشد فى الخيط ، رد فعل الحائط.

«$٨\sqrt{٣}$ ، $٤\sqrt{٣}$ نيوتن»

---

٢٦ قضيب منتظم $\overline{أب}$ طوله ٦ أمتار ووزنه ٨ ثقل كجم يتصل طرفه (أ) بحائط رأسى بواسطة مفصل ، حفظ القضيب فى وضع أفقى ، بربطه من إحدى نقطه (حـ) حيث أحـ = ٤ أمتار بأحد طرفى خيط ثم ثبت الطرف الثانى للخيط فى نقطة (ء) على الحائط الرأسى فوق (أ) وعلى بُعد ٤ أمتار منها. احسب مقدار الشد فى الخيط ورد فعل المفصل فى وضع الاتزان.

«$٦\sqrt{٢}$ ، $٢\sqrt{١٠}$ ثقل كجم»

مسائل تحل باستخدام التحليل

٢٧ وضع جسم وزنه ١٠٠ نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ حيث جا هـ = $\frac{٣}{٥}$ وحفظ الجسم فى حالة الاتزان بواسطة قوة تميل على خط أكبر ميل بزاوية قياسها ى حيث جتا ى = $\frac{١٢}{١٣}$ أوجد ق ورد فعل المستوى.

«٦٥ ، ٥٥ نيوتن»

---

٢٨ وضع جسم على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ فى حالة توازن على المستوى بواسطة قوتين إحداهما فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى إلى أعلى ومقدارها ٥٠ نيوتن والثانية تميل على خط أكبر ميل إلى أعلى بزاوية قياسها ٣٠° ومقدارها $٢٠\sqrt{٣}$ نيوتن. أوجد كلًا من وزن الجسم ورد فعل المستوى.

«١٦٠ ، $٧٠\sqrt{٣}$ نيوتن»

---

٢٩ حلقة ملساء يمر خلالها خيط خفيف طوله ٤٠ سم. مثبت طرفاه فى نقطتين أ ، ب على خط أفقى واحد البعد بينهما ٢٠ سم. أثرت على الحلقة قوة أفقية $\overleftarrow{ق}$ فاتزنت الحلقة رأسيًا أسفل ب وكان الخيط مشدودًا. أوجد قيمة ق ومقدار قوة الشد فى الخيط علمًا بأن وزن الحلقة ٤٠٠ ثقل جم

«٢٠٠ ، ٢٥٠ ث.جم»



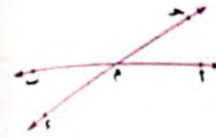
الدرس 1 المستقيمات والمستويات فى الفراغ

مفاهيم ومسلمات هندسية

١ الخـط المستقيم

هو مجموعة غير منتهية من النقط ويتحدد تحديدًا تامًا إذا علم أى نقطتين مختلفتين عليه.

فمثلًا : فى الشكل المقابل :



النقطتان أ ، ب يمر بهما مستقيم واحد وواحد فقط هو $\overleftrightarrow{أب}$ بينما النقطتان حـ ، ء يمر بهما مستقيم آخر $\overleftrightarrow{حـ ء}$

أى أن المستقيم يتعين بنقطتين مختلفتين عليه.

ملاحظة $\overleftrightarrow{أب} \supset \overrightarrow{أب} \supset \overline{أب}$

٢ المستـوى

هو مجموعة غير منتهية من النقط تمثل سطحًا لا حدود له بحيث إن المستقيم المار بأى نقطتين فيه يقع بأكمله على ذلك السطح.

ويرمز للمستوى بأحد الحروف الكبيرة مثل س أو ص أو ...

كما يمكن أن نرمز له بثلاث نقط على الأقل تقع فى المستوى بشرط أن تكون النقط ليست على استقامة واحدة مثل : أ ب حـ

أى أن المستوى يتعين بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة.

ملاحظات

١ الأشكال الهندسية مثل المثلث والمربع والدائرة و ... هى مجموعات غير منتهية من النقط ومثل هذه الأشكال تسمى أشكالاً هندسية مستوية لأن كلا منها مجموعة جزئية من مستوى.

٢ حيث إن المستوى ممتد من جميع جهاته بلا حدود لذلك سنكتفى عند تمثيله بتمثيل جزء منه بشكل هندسى مستوى مثل المربع أو الدائرة أو متوازى الأضلاع ... وهكذا.

٣ الفـــراغ (الفضاء)



هو مجموعة غير منتهية من النقط وهو الذى يحتوى جميع المستقيمات والمستويات والمجسمات محل الدراسة.

فالمجسمات مثل الكرة والأسطوانة والمكعب ، ... هى مجموعات غير منتهية من النقط ولكنها ليست محتواة فى مستوى واحد ولكن محتواة فى الفراغ الكبير المحيط بنا وسطوح هذه المجسمات تتكون من عدة أجزاء مستوية كما فى المكعب أو غير مستوية كما فى الكرة.

ملاحظـات



١ أى نقطة فى الفراغ يمر بها عدد لا نهائى من المستقيمات.

٢ أى نقطة فى الفراغ يمر بها عدد لا نهائى من المستويات.

٣ أى نقطتين فى الفراغ يمر بها مستقيم واحد فقط.

٤ أى نقطتين فى الفراغ يمر بهما عدد لا نهائى من المستويات.

تعيين المستوى فى الفراغ

يتحدد المستوى تحديدًا تامًا فى الفراغ بإحدى الحالات الآتية

١ ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة



ففى الشكل المقابل :

النقط أ ، ب ، حـ ليست على استقامة واحدة

لذلك يتعين المستوى س أو أ ب حـ

ومن ذلك يمكن استنتاج أن :

أى ثلاثة نقط ليست على استقامة واحدة فى الفراغ يمر بها مستوى واحد فقط.

٢ مستقيم ونقطة لا تنتمي إليه

في الشكل المقابل :

أ ∉ $\overleftrightarrow{ب جـ}$ وكذلك النقطة أ

والمستقيم $\overleftrightarrow{ب جـ}$ يعينان المستوى س أو أ ب جـ

٣ مستقيمان متقاطعان

في الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{أ ب} \cap \overleftrightarrow{جـ د} = \{هـ\}$

لذلك $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{جـ د}$ يعينان المستوى ع

٤ مستقيمان متوازيان غير متطابقين

في الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{أ ب} \parallel \overleftrightarrow{جـ د}$ ، $\overleftrightarrow{أ ب} \cap \overleftrightarrow{جـ د} = \emptyset$

لذلك $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{جـ د}$ يعينان المستوى ل



مثال ❶

في الشكل المقابل :

إذا كانت م ∉ المستوى أ ب جـ د

فاذكر ما يلي :

[١] أربع مستقيمات تمر بالنقطة أ

[٢] ثلاثة مستويات تمر بالنقطة أ

[٣] المستقيمات التي تمر بالنقطتين أ ، ب معًا.

[٤] مستويين كل منهما يمر بالنقطتين أ ، ب معًا.

[٥] أربع مستويات تمر بالنقطة م

[٦] عدد المستويات التي تحدد سطح المجسم في الشكل.

الحل

[١] $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{أ جـ}$ ، $\overleftrightarrow{أ د}$ ، $\overleftrightarrow{أ م}$

[٢] أ ب جـ د ، أ ب م ، أ د م

[٣] $\overleftrightarrow{أ ب}$

[٤] أ ب جـ د ، أ ب م

[٥] م أ ب ، م ب جـ ، م جـ د ، م د أ

[٦] خمسة مستويات.

الأوضاع النسبية للمستقيمات والمستويات في الفراغ

١ الأوضاع النسبية لمستقيمين مختلفين في الفراغ

المستقيمان المتقاطعان	المستقيمان المتوازيان	المستقيمان المتخالفان
هما مستقيمان يقعان في نفس المستوى ويشتركان في نقطة واحدة.	هما مستقيمان يقعان في نفس المستوى ولا يشتركان في أي نقطة.	هما مستقيمان لا يجمعهما مستوٍ واحد.
• ل١ ، ل٢ متقاطعان	• ل١ // ل٢	• ل١ ، ل٢ متخالفان
• $ل_1 \cap ل_2 = \{أ\}$	• $ل_1 \cap ل_2 = \emptyset$	• $ل_1 \cap ل_2 = \emptyset$
• يجمعهما مستوٍ واحد	• يجمعهما مستوٍ واحد	• لا يجمعهما مستوٍ واحد

لاحظ أن
المستقيمان المتخالفان غير متوازيين وغير متقاطعين لأنه لا يجمعهما مستوٍ واحد.

٢ الأوضاع النسبية لمستقيم ومستوٍ في الفراغ

المستقيم يوازي المستوى	المستقيم قاطع للمستوى	المستقيم محتوى في المستوى
المستقيم ل // المستوى س	المستقيم ل يقطع المستوى س في نقطة واحدة	المستقيم ل يقع بأكمله في المستوى س (ل ⊂ س)
أي : $ل \cap س = \emptyset$	أي : $ل \cap س = \{أ\}$	أي : $ل \cap س = ل$

لاحظ أنه
إذا اشترك مستقيم ومستوٍ في أكثر من نقطة واحدة فإن المستقيم يقع بتمامه داخل المستوى.

٣ الأوضاع النسبية لمستويين في الفراغ

المستويان المتوازيان	المستويان المتقاطعان	المستويان المنطبقان
المستوى س // المستوى ص	المستويان س ، ص متقاطعان فى خط مستقيم ل	المستويان س ، ص يشتركان فى جميع النقط (منطبقان)
أى : س ∩ ص = ∅	أى : س ∩ ص = ل	أى : س ∩ ص = س = ص

ملاحظات

١ إذا اشترك مستويان مختلفان فى نقطة فإنهما يشتركان فى مستقيم يمر بهذه النقطة.

فى الشكل المقابل : المستويان س ، ص يشتركان فى نقطة أ

∴ المستويان س ، ص يشتركان فى المستقيم ل

أى أن : س ∩ ص = ل حيث أ ∈ ل

٢ إذا تقاطعت ثلاثة مستويات مثنى مثنى فإن مستقيمات تقاطعها إما أن تكون متوازية أو متقاطعة جميعًا فى نقطة واحدة.

ل١ // ل٢ // ل٣ ل١ ∩ ل٢ ∩ ل٣ = {أ}

٣ المستقيمان الموازيان لثالث فى الفراغ متوازيان



أى أن : لأى ثلاثة مستقيمات ل١ ، ل٢ ، ل٣ فى الفراغ

إذا كان : ل١ // ل٢ ، ل٢ // ل٣

فإن : ل١ // ل٣

٤ المستقيمات الرأسية فى الفراغ كلها متوازية ولكن ليس بالضرورة أن تكون المستقيمات الأفقية كلها متوازية.



المستقيمات الرأسية ل١ ، ل٢ ، ل٣ ، ل٤ كلها متوازية.

المستقيمات الأفقية ل١ ، ل٢ ، ل٣ ، ... ليس بالضرورة متوازية.

٥ إذا تقاطع المستقيمان الحاملان لقطرى الشكل الرباعى فى نقطة فإن أضلاعه تقع جميعًا فى مستوى واحد.



الشكل الرباعى أ ب حـ ء أضلاعه تقع فى مستوى واحد لأن : أحـ ∩ ب ء = {م}

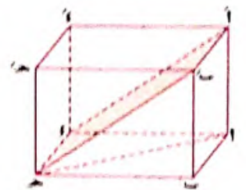
الشكل الرباعى أ ب حـ ء أضلاعه لا تقع جميعًا فى مستوى واحد لأن : أحـ ∩ ب ء = ∅ (أحـ ، ب ء متخالفان)

مثال ٢

فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء أَ بَ حـَ ءَ متوازى مستطيلات

أكمل ما يأتى :



١ ب حـ // المستوى ....

٢ أ أَ ، .... مستقيمان متخالفان.

٣ المستوى أ ب بَ أَ // المستوى ....

٤ المستوى ا ب ب َ أ َ ∩ المستوى أ َ ب َ حـ َ ء = ...

٥ المستوى ا ب حـ ∩ المستوى أ َ ب َ ء = ...

٦ المستوى ا أ َ ء َ ء ∩ المستوى ا ب ب َ أ َ ∩ المستوى ا ب حـ ء = ...

الحل

١ ا أ َ ء َ ء أو أ َ ب َ حـ َ ء َ   ٢ ء ء َ أو أ ء َ (استنتج إجابات أخرى).   ٣ ء حـ حـ َ ء َ

٤ أ َ ب َ   ٥ ء حـ   ٦ {ا}



مثال ٣

في الشكل المقابل:

المستوى س ∩ المستوى ص = المستقيم ل

، ا ∈ س ، حـ ∈ ص ، ب ∈ ل

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

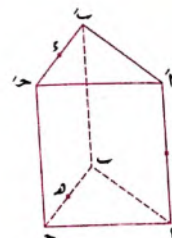
١ المستوى ا ب حـ ∩ المستوى س = ... (ا ب ، ب حـ ، حـ ا ، {ب})

٢ المستوى ا ب حـ ∩ المستوى ص = ... (ا ب ، ب حـ ، حـ ا ، {ب})

٣ المستوى ا ب حـ ∩ المستوى س ∩ المستوى ص = ... (ا ب ، ب حـ ، حـ ا ، {ب})

الحل

١ ا ب   ٢ ب حـ   ٣ {ب}



مثال ٤

في الشكل المقابل:

إذا كان المستوى ا ب حـ // المستوى أ َ ب َ حـ َ

، ء ، هـ منتصفي ب َ حـ َ

، ب حـ على الترتيب

، و ∈ ا أ َ ، ء هـ // ا أ َ

١ اذكر أربعة مستويات تمر بالنقطة ا

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) ا ...... المستوى ء و هـ (∈ ، ∉ ، ⊂ ، ⊄)

(٢) ا أ َ ...... المستوى ء و هـ (∈ ، ∉ ، ⊂ ، ⊄)

(٣) ا أ َ ، ب حـ مستقيمان ...... (متوازيان أ ، متخالفان أ ، متقاطعان أ ، متعامدان)

(٤) المستوى ء و هـ ∩ المستوى أ َ ب َ حـ َ = ... (ا ء َ ، ا هـ ، ء هـ ، و هـ)

(٥) المستوى ء و هـ ∩ المستوى ا ب ب َ أ َ = ... (ا أ َ ، ا هـ ، ا ء ، ء هـ)

(٦) المستوى ا هـ أ َ ∩ المستوى ب َ ب حـ حـ َ = ... (ء هـ ، ا هـ ، ا ء ، ا أ َ)

الحل

١ المستويات هي: ا أ َ ب َ ب ، ا أ َ حـ َ حـ ، ا أ َ هـ ، ا ب حـ

٢ (١) ∈   (٢) ⊂

(٣) متخالفان.   (٤) ا ء

(٥) ا أ َ   (٦) ء هـ

تمارين 6 على المستقيمات والمستويات فى الفراغ



اختبر نفسك

📖 من أسئلة الكتاب المدرسى • مستويات عليا • تطبيق • فهم • تذكر

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① عدد المستقيمات التى تمر بنقطة معلومة هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) عدد لا نهائى.

② عدد المستقيمات التى تمر بنقطتين معلومتين هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) عدد لا نهائى.

③ عدد المستويات التى تمر بنقطتين معلومتين هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) عدد لا نهائى.

④ عدد المستويات التى تمر بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) عدد لا نهائى.

⑤ عدد المستويات التى تمر بثلاث نقط على استقامة واحدة هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٣ (د) عدد لا نهائى.

⑥ جميع الحالات الآتية تعين مستوى ماعدا ....

(أ) مستقيم ونقطة لا تنتمى إليه. (ب) مستقيمين متوازيين وغير منطبقين.

(جـ) مستقيمين متقاطعين. (د) مستقيمين متخالفين.

⑦ جميع الحالات الآتية تعين مستوى ماعدا ....

(أ) مستقيمين متقاطعين. (ب) مستقيمين متوازيين مختلفين.

(جـ) مستقيم ونقطة تنتمى إليه. (د) ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة.

⑧ عدد المستويات التى تمر بمستقيمين متوازيين مختلفين = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) عدد لا نهائى.

⑨ المستقيمان المتخالفان هما المستقيمان اللذان ....

(أ) لا يتقاطعان. (ب) لا يتعامدان.

(جـ) لا يتوازيان. (د) لا يتقاطعان ولا يتوازيان.

⑩ يكون المستقيمان متخالفين إذا كانا ....

(أ) غير متوازيين. (ب) غير متقاطعين.

(جـ) غير منطبقين. (د) لا يجمعهما مستوى واحد.

⑪ 📖 إذا كان المستقيم ل // المستوى س ، أ ∈ س فإن : ل ∩ س = ...

(أ) ∅ (ب) ل (جـ) س (د) {أ}

⑫ 📖 إذا كان المستقيم ل ⊂ المستوى س ، أ ∈ س فإن : ل ∩ س = ...

(أ) ∅ (ب) ل (جـ) س (د) {أ}

⑬ إذا كان المستقيمان ل١ ، ل٢ متخالفين فإن : ل١ ∩ ل٢ = ...

(أ) ∅ (ب) ل١

(جـ) ل٢ (د) المستوى الذى يجمع ل١ ، ل٢

⑭ المستويان غير المتوازيين يتقاطعان فى ....

(أ) نقطة. (ب) خط مستقيم. (جـ) مستوى. (د) شعاع.

⑮ إذا كان : س ، ص مستويين بحيث س ∩ ص = ∅ فإن : س .... ص

(أ) ⊥ (ب) // (جـ) = (د) ⊂

⑯ ينطبق المستويان إذا اشتركا فى ....

(أ) نقطة واحدة. (ب) نقطتين.

(جـ) ثلاث نقاط على استقامة واحدة. (د) ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة.

⑰ إذا اشترك المستقيم والمستوى فى نقطتين فإن المستقيم ....

(أ) يوازى المستوى. (ب) يقطع المستوى فى نقطة وحيدة.

(جـ) يقع بأكمله داخل المستوى. (د) يقطع المستوى فى نقطتين فقط.

⑱ إذا كانت : أ ، ب ، حـ ثلاث نقط تعين مستوى فإن : ....

(أ) أب = ب حـ = أ حـ (ب) أب + ب حـ = أ حـ

(جـ) أب + ب حـ > أ حـ (د) أب + ب حـ < أ حـ

⑲ المستقيمات الرأسية المختلفة فى الفراغ تكون ....

(أ) متوازية. (ب) متخالفة.

(جـ) يجمعها مستوى واحد. (د) متقاطعة.

⑳ الأوضاع النسبية لزوج من المستقيمات فى المستوى الواحد هى كل ما يلى ما عدا ....

(أ) متوازيان. (ب) متقاطعان. (جـ) متخالفان. (د) منطبقان.

㉑ إذا كانت : س ، ص ، ع مستويات فى الفراغ بحيث : س ∩ ص ∩ ع = {أ}

، س ∩ ص = المستقيم ل. أى الجمل الآتية غير صحيحة ؟

(أ) أ ∈ ل (ب) ل ∩ ع = {أ} (جـ) ل // ع (د) أ ∈ ع

(٢٢) إذا كانت م نقطة لا تنتمى للمستوى الذى يضم النقط أ ، ب ، حـ فإن : $\overleftrightarrow{\text{م أ}}$ ....

(أ) يقع بأكمله داخل المستوى. (ب) يقطع المستوى فى نقطة.

(جـ) يقطع المستوى فى نقطتين. (د) يوازى المستوى.

(٢٣) إذا كان $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ⊂ المستوى س ، $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ // المستوى س فإن : $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ....

(أ) متوازيان فقط. (ب) متخالفان فقط.

(جـ) متوازيان أو متخالفان. (د) متقاطعان.

(٢٤) أى أربع نقط ليست فى مستوى واحد تعين ....

(أ) مستوى. (ب) مستويان. (جـ) ثلاثة مستويات. (د) أربعة مستويات.

(٢٥) أقل عدد من المستويات التى يمكن أن تحدد سطح مجسم هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٢٦) أ ب حـ ء أَ بَ حَ ءَ متوازى مستطيلات كم مستقيم يحمل حرفًا من أحرف الشكل يكون مخالفًا للمستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ؟

(أ) لا يوجد. (ب) واحد. (جـ) اثنان. (د) أربعة.

(٢٧) أى الجمل الآتية غير صحيحة ؟

(أ) أى نقطتين فى الفراغ يمر بهما مستوى واحد فقط.

(ب) أى ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة فى الفراغ تعين مستوى.

(جـ) رؤوس المثلث تعين مستوى.

(د) كل مستقيمين متقاطعين يحتويهما مستوى واحد فقط.

(٢٨) أى الجمل الآتية غير صحيحة ؟

(أ) أى مستقيمين مختلفين ومتوازيين يعينان مستويًا.

(ب) كل مستقيمين مختلفين متقاطعين يشتركان فى نقطة واحدة.

(جـ) المستقيمان المتخالفان لا يجمعهما مستوى واحد.

(د) أى ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة يمر بها مستوى واحد على الأقل.

(٢٩) أى الجمل الآتية غير صحيحة ؟ حيث $ل_١$ ، $ل_٢$ مستقيمان ، س ، ص مستويان.

(أ) إذا كان : $ل_١ \cap ل_٢ = \emptyset$ فإن : $ل_١$ // $ل_٢$ أو $ل_١$ ، $ل_٢$ متخالفان.

(ب) إذا كان : $ل_١ \cap س = \emptyset$ فإن : $ل_١$ // س

(جـ) إذا كان : $ل_١ \cap س = ل_١$ فإن : $ل_١ \subset س$

(د) إذا كان : $ل_١ \subset ص$ فإن : $ل_١ \cap ص = \emptyset$

(٣٠) باستخدام الشكل المقابل :

أى الجمل الآتية غير صحيحة ؟

(أ) ل ⊂ س (ب) أ ∈ ل ، أ ∉ س

(جـ) حـ ∈ س ، حـ ∉ ل (د) $\overline{\text{أ حـ}}$ ∩ ل = {أ}

(٣١) فى الشكل المقابل :

المستوى أ ب ء ∩ المستوى م حـ ء = ...

(أ) $\overleftrightarrow{\text{أ م}}$

(ب) $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$

(جـ) {ء}

(د) $\overleftrightarrow{\text{م حـ}}$

(٣٢) فى الشكل المقابل :

المستوى أ أَ بَ ∩ المستوى أَ حـ حَ = ...

(أ) $\overleftrightarrow{\text{أ أَ}}$ (ب) $\overleftrightarrow{\text{ب بَ}}$

(جـ) $\overleftrightarrow{\text{حـ حَ}}$ (د) $\overleftrightarrow{\text{أَ حـ}}$

(٣٣) فى الشكل المقابل :

المستوى س ∩ المستوى ص = ...

(أ) {ب}

(ب) {أ ، ب ، حـ}

(جـ) المستقيم ل

(د) ∅

(٣٤) فى الشكل المقابل :

أولًا : ل .... س

(أ) ∈ (ب) ∉

(جـ) ⊂ (د) ⊄

ثانيًا : أ .... س

(أ) ∈ (ب) ∉ (جـ) ⊂ (د) ⊄

ثالثًا : حـ .... ص

(أ) ∈ (ب) ∉ (جـ) ⊂ (د) ⊄

رابعًا : $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ .... ص

(أ) ∈ (ب) ∉ (جـ) ⊂ (د) ⊄

(٣٥) في الشكل المقابل:

أولاً: المستوى أ ب ب' أ' ∩ المستوى ب حـ حـ' ب' = ...

(أ) ب ب'　(ب) ∅　(جـ) {ب'}　(د) أ ب

ثانيًا: المستوى أ ب حـ ∩ المستوى أ' ب' حـ' = ...

(أ) ب ب'　(ب) ∅　(جـ) أ أ'　(د) أ' ب'

ثالثًا: أ حـ ∩ أ' حـ' = ...

(أ) {أ}　(ب) {حـ}　(جـ) أ أ' ∩ ب ب'　(د) أ حـ

رابعًا: ب ب' ∩ المستوى أ ب حـ = ...

(أ) ب ب'　(ب) {ب'}　(جـ) {ب}　(د) ∅

(٣٦) في الشكل المقابل:

أولاً: المستوى م أ ب ∩ المستوى م ب حـ = ...

(أ) أ ب　(ب) م ب　(جـ) ∅　(د) {م}

ثانيًا: المستوى م ب حـ ∩ المستوى أ ب حـ = ...

(أ) {ب}　(ب) ∅　(جـ) أ ب　(د) ب حـ

ثالثًا: م ب ∩ المستوى أ ب حـ = ...

(أ) م ب　(ب) ∅　(جـ) {ب}　(د) م ب

رابعًا: المستوى م أ ب ∩ المستوى م ب حـ ∩ المستوى م أ حـ = ...

(أ) م ب　(ب) م حـ　(جـ) المجسم م أ ب حـ　(د) {م}

(٣٧) في الشكل الموضح أ ∉ المستوى ب حـ ء:

أولاً: س ∩ ص = ...

(أ) أ حـ　(ب) ∅　(جـ) {أ}　(د) {حـ}

ثانيًا: س ∩ ع = ...

(أ) ∅　(ب) ب حـ　(جـ) أ حـ　(د) {حـ}

ثالثًا: ص ∩ ع = ...

(أ) {حـ}　(ب) ب حـ　(جـ) حـ ء　(د) ∅

رابعًا: أ ب ∩ س = ...

(أ) أ ب　(ب) ∅　(جـ) أ حـ　(د) {ب}

خامسًا: بفرض أن: ق(∠ ب حـ ء) = ٩٠° ، ب حـ = ٣ سم ، حـ ء = ٤ سم

فإن: ب ء = ... سم

(أ) ٦　(ب) ٥　(جـ) ٤　(د) ٧

(٣٨) في الشكل المقابل:

س ، ص مستويان متقاطعان في المستقيم ل ، أ ∈ ل ، ب ∈ س ، ب ∉ ص ، حـ ∈ ص ، حـ ∉ س

أولاً: المستوى س ∩ المستوى أ ب حـ = ...

(أ) أ ب　(ب) أ حـ　(جـ) ب حـ　(د) المستقيم ل

ثانيًا: المستوى ص ∩ المستوى أ ب حـ = ...

(أ) أ ب　(ب) {أ}　(جـ) ب حـ　(د) أ حـ

ثالثًا: المستوى س ∩ المستوى ص ∩ المستوى أ ب حـ = ...

(أ) ∅　(ب) المستقيم ل　(جـ) {أ}　(د) {ب}

(٣٩) في الشكل المقابل:

أولاً: المستوى أ ب حـ ء // المستوى ....

(أ) أ ب حـ'　(ب) أ' ب' ء'　(جـ) أ ب ب'　(د) أ' ب' حـ

ثانيًا: المستوى ب حـ حـ' ب' // المستوى ....

(أ) أ ب حـ　(ب) أ' ب' حـ'　(جـ) أ ب ء　(د) أ أ' ء

ثالثًا: المستوى أ ب ب' أ' ∩ المستوى أ ب حـ ء = ...

(أ) {ب}　(ب) {أ ، ب}　(جـ) أ ب　(د) أ ب

رابعًا: المستوى أ ب ب' أ' ∩ المستوى ء حـ حـ' ء' = ...

(أ) حـ حـ'　(ب) أ ء'　(جـ) ∅　(د) {حـ}

خامسًا: المستوى ء حـ حـ' ء' ∩ المستوى أ ب حـ ء ∩ المستوى أ ء ء' أ' = ...

(أ) ∅　(ب) أ ب　(جـ) {حـ}　(د) {ء}



(١٠) في الشكل المقابل :

أ ب حـ أَ بَ حـَ

، أ حـ حـَ أَ ثلاثة مستطيلات متقاطعة مثنى مثنى ومتطابقة

، ء منتصف $\overline{\text{حـ حـَ}}$ فإذا كان : أ ب = ٥ سم ، أ أَ = ١٠ سم

أولًا : المستوى أ ء أَ ∩ المستوى ب ء بَ = ...

(أ) $\overleftrightarrow{\text{حـ حـَ}}$ (ب) $\overleftrightarrow{\text{ب بَ}}$

(جـ) {ء} (د) $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$

ثانيًا : المستوى أ ء ب ∩ المستوى أ ب حـ = ...

(أ) ∅ (ب) $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ (جـ) {ب} (د) $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$

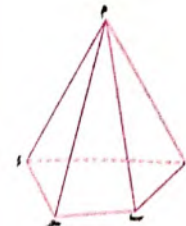
ثالثًا : المستوى أ ء ب ∩ المستوى ب حـ حـَ بَ = ...

(أ) {ب} (ب) $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ (جـ) $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ (د) ∅

رابعًا : ق (∠ ب ء بَ) = ...°

(أ) ٦٠ (ب) ١٢٠ (جـ) ٩٠ (د) ١٠٠

ثانيًا الأسئلة المقالية



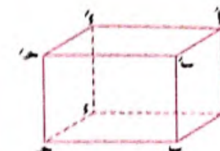
١ تأمل الشكل المقابل ، ثم أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) كم عدد المستقيمات التي تحمل أحرف بالشكل ؟

(٢) اذكر المستقيمات التي تحمل أحرف وتمر بنقطة أ

(٣) كم عدد المستويات التي تحمل أوجه بالشكل ؟

(٤) اذكر ثلاثة مستويات تمر بالنقطة أ



٢ تأمل الشكل المقابل ، ثم أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) اكتب ثلاثة مستقيمات تمر بالنقطة أ

(٢) اكتب المستقيمات التي تمر بالنقطتين أ ، ب معًا.

(٣) اكتب ثلاثة مستويات تمر بالنقطة أ

(٤) اكتب ثلاثة مستويات تمر بالنقطتين أ ، ب معًا.



٣ في الشكل الموضح الذي يمثل حجرة الدراسة أوجد :

(١) المستقيمات التي تحمل أحرف وكل منها يتقاطع مع $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

(٢) المستقيمات التي تحمل أحرف وتوازي $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

(٣) المستقيمات التي تحمل أحرف وكل منها يكون متخالفًا مع $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

٤ اذكر عدد المستويات التي تمر بكل من :

(١) نقطة واحدة معلومة. (٢) نقطتين مختلفتين.

(٣) ثلاث نقط على استقامة واحدة. (٤) ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة.



٥ في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء أَ بَ حـَ ءَ مكعب طول حرفه ٦ سم

(١) عين الأوضاع النسبية لكل زوج من المستقيمات الآتية :

(١) $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ء ءَ}}$ (٢) $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ء حـَ}}$

(٣) $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ءَ}}$ (٤) $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ حـَ}}$

(٥) $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ء حـَ}}$ (٦) $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ أَ}}$

(٢) عين الأوضاع النسبية لكل زوج من المستويات الآتية :

(١) أ ب بَ أَ ، ء حـ حـَ ءَ (٢) أ ب بَ أ ، أ بَ حـ ء

(٣) أ ب حـ ، ءَ بَ ء

(٣) إذا علمت أن : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أ ءَ}}$ فأوجد طول $\overline{\text{ب ءَ}}$

٦ إذا كانت س ترمز لمستوى ، ل ترمز لمستقيم ، أ ترمز لنقطة

فارسم الأشكال التي تمثل الحالات الآتية (كل على حدة) :

(١) أ ∈ ل (٢) ل ⊂ س

(٣) ل ∩ س = {أ} (٤) ل // س

(٥) أ ∈ س ، أ ∉ ل ، ل ⊂ س



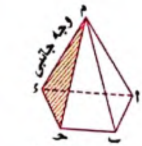
الدرس 2 الهـــرم

تعريف الهرم

هو مجسم له قاعدة واحدة على شكل مضلع وجميع أوجهه الأخرى مثلثات تشترك فى رأس واحدة ويسمى الهرم ثلاثيًا أو رباعيًا أو خماسيًا أو .... وفقًا لعدد أضلاع قاعدته.



هرم ثلاثى قاعدته على شكل مثلث



هرم رباعى قاعدته على شكل مضلع رباعى



هرم خماسى قاعدته على شكل مضلع خماسى

بالاستعانة بالشكل المقابل يمكن توضيح بعض المفاهيم الخاصة بالهرم :



- م أ ب جـ د هرم رباعى أوجهه الجانبية سطوح المثلثات م أ ب ، م ب جـ ، م جـ د ، م أ د وقاعدته سطح المضلع أ ب جـ د
- **الأوجه الجانبية للهرم :** هى دائمًا سطوح مثلثات بينما القاعدة قد تكون سطح مثلث أو مضلع رباعى أو خماسى أو ...
- **رأس الهرم :** هى النقطة المشتركة بين جميع أوجهه الجانبية وتمثلها نقطة م بالشكل.
- **الحرف الجانبى للهرم :** هو القطعة المستقيمة الواصلة بين رأس الهرم وأى رأس من رؤوس قاعدته. (مثل م أ ، م ب ، م جـ ، م د بالشكل)
- **ارتفاع الهرم :** هو بُعد رأس الهرم عن مستوى قاعدته أى أنه طول العمود الساقط من رأسه على مستوى قاعدته. (م ن هو ارتفاع الهرم بالشكل)

- **الارتفاع الجانبى للهرم :** هو بُعد رأس الهرم عن أحد أضلاع قاعدته أى أنه طول العمود الساقط من رأس الهرم على ضلع من أضلاع قاعدة الهرم.

(م س هو ارتفاع جانبى للهرم م أ ب جـ د حيث : م س ⊥ أ ب)

ملاحظات

- المستقيم العمودى على مستوى يكون عموديًا على أى مستقيم فى هذا المستوى ومنها فإن المستقيم العمودى على قاعدة الهرم يكون عموديًا على أى مستقيم فيها.
- المضلع المنتظم هو مضلع أضلاعه متساوية فى الطول وزواياه متساوية فى القياس.
- المركز الهندسى لمضلع منتظم هو مركز الدائرة الداخلة أو الخارجة له.
- المركز الهندسى لمتوازى الأضلاع وحالاته الخاصة هو نقطة تقاطع القطرين.
- المركز الهندسى للمثلث هو نقطة تقاطع متوسطاته.

حالات خاصة من الهرم

١ الهرم القائم

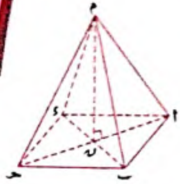
يكون الهرم قائمًا إذا كان موقع العمود المرسوم من رأس الهرم على قاعدته يمر بمركزها الهندسى.

فمثلًا : فى الهرم م أ ب جـ د الموضح بالشكل :

إذا كانت ن هى المركز الهندسى للقاعدة أ ب جـ د

وكان : م ن ⊥ مستوى القاعدة أ ب جـ د

فإن : الهرم م أ ب جـ د يسمى هرمًا قائمًا.



٢ الهرم المنتظم

هو الهرم الذى قاعدته مضلع منتظم مركزه هو موقع العمود المرسوم من رأس الهرم عليها.

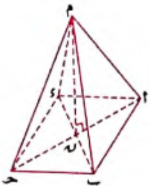
أى أنه هرم قائم قاعدته مضلع منتظم.

فمثلًا : فى الهرم م أ ب جـ د الموضح بالشكل :

إذا كانت ن هى المركز الهندسى لقاعدته المنتظمة أ ب جـ د «على شكل مربع».

وكان : م ن ⊥ مستوى القاعدة.

فإن : الهرم م أ ب جـ د يسمى هرمًا منتظمًا.



• خواص الهرم المنتظم :

١ أحرفه الجانبية متساوية الطول.
٢ ارتفاعاته الجانبية متساوية الطول.
٣ أوجهه الجانبية سطوح مثلثات متطابقة متساوية الساقين.

ملاحظـات

- كل هرم منتظم هو هرم قائم ولكن ليس كل هرم قائم يكون هرمًا منتظمًا.
- ليس بالضرورة أن تكون الأحرف الجانبية للهرم القائم متساوية الطول.
- ليس بالضرورة أن تكون الارتفاعات الجانبية للهرم القائم متساوية الطول.
- يسمى الهرم الثلاثى المنتظم هرمًا ثلاثيًا منتظم الوجوه إذا كانت جميع أوجهه مثلثات متساوية الأضلاع ويكون أى منها قاعدة له.

مثال ١

م أ ب حـ ء هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٢ سم وارتفاعه ٨ سم أوجد ارتفاعه الجانبى.

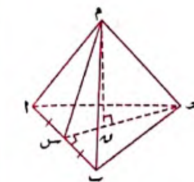
الحـل

بفرض أن : س منتصف $\overline{أب}$
، ∵ م أ ب حـ ء هرم رباعى منتظم
∴ م أ = م ب ∴ $\overline{مس} \perp \overline{أب}$
∴ م س الارتفاع الجانبى للهرم.
، ∵ فى $\triangle$ أ ب حـ : س منتصف $\overline{أب}$ ، ن منتصف $\overline{أحـ}$
∴ س ن = $\frac{1}{2}$ ب حـ ∴ س ن = ٦ سم
، ∵ $\overline{من} \perp$ المستوى أ ب حـ ء ∴ $\overline{من} \perp \overline{سن}$
∴ $\triangle$ م س ن قائم الزاوية فى ن ∴ (س م)^{٢} = (س ن)^{٢} + (م ن)^{٢}
∴ (س م)^{٢} = ٣٦ + ٦٤ = ١٠٠ ∴ س م = ١٠ سم

مثال ٢

م أ ب حـ هرم ثلاثى منتظم قاعدته $\triangle$ أ ب حـ طول ضلع قاعدته ٦ سم ، وارتفاعه ٤ سم أوجد طول حرفه وارتفاعه الجانبى.

الحـل



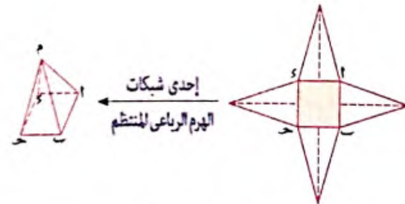
بفرض أن : س منتصف $\overline{أب}$
∵ م أ ب حـ هرم ثلاثى منتظم
∴ أ ب حـ متساوى الأضلاع
، ∵ س منتصف $\overline{أب}$ ∴ $\overline{حـس} \perp \overline{أب}$

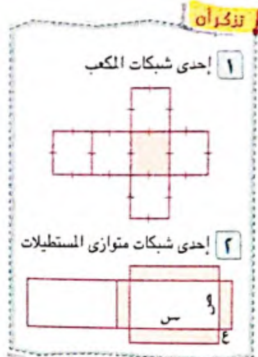
∴ $\triangle$ ب س حـ قائم الزاوية فى س
∴ (س حـ)^{٢} = (ب حـ)^{٢} − (ب س)^{٢} = ٣٦ − ٩ = ٢٧
∴ س حـ = $\sqrt{٢٧}$ = ٣ $\sqrt{٣}$ سم ، ∵ ن مركز المثلث أ ب حـ
∴ ن نقطة تلاقى متوسطات $\triangle$ أ ب حـ ∴ ن س : ن حـ = ١ : ٢
∴ ن س = $\sqrt{٣}$ سم ، ن حـ = ٢ $\sqrt{٣}$ سم
، ∵ $\overline{من} \perp$ المستوى أ ب حـ ∴ $\overline{من} \perp \overline{سحـ}$
∴ $\triangle$ م ن حـ قائم الزاوية فى ن ∴ (م حـ)^{٢} = (م ن)^{٢} + (ن حـ)^{٢} = ١٦ + ١٢ = ٢٨
∴ م حـ = $\sqrt{٢٨}$ = ٢ $\sqrt{٧}$ سم ∴ طول حرف الهرم = ٢ $\sqrt{٧}$ سم
، ∵ $\triangle$ م ن س قائم الزاوية فى ن
∴ (م س)^{٢} = (م ن)^{٢} + (ن س)^{٢} = ١٦ + ٣ = ١٩
∴ م س = $\sqrt{١٩}$ سم ، ∵ س منتصف $\overline{أب}$ ∴ $\overline{مس} \perp \overline{أب}$
∴ (م س) الارتفاع الجانبى للهرم = $\sqrt{١٩}$ سم

شبكة الهرم

تستخدم شبكة المجسمات فى تصنيع المجسم وذلك بتخطيط شكل المجسم على سطح مستوى ثم طى هذا السطح لتكوين المجسم المطلوب.

فمثلًا :





ونلاحظ من شبكة الهرم الرباعى المنتظم أن

١ عدد الأوجه = ٥ أوجه منهم أربعة جانبية ووجه واحد للقاعدة.
٢ عدد الأحرف = ٨ منهم ٤ أحرف جانبية.
٣ عدد الرؤوس = ٥ منهم رأس واحدة م تسمى رأس الهرم.

معلومة إثرائية

علاقة أويلر: لأي مجسم قاعدته منطقة مضلعة يكون

(عدد الأوجه + عدد الرؤوس = عدد الأحرف + ٢)

فمثلاً في الهرم الخماسي:

عدد الأوجه = ٦ أوجه ، عدد الرؤوس = ٦ رؤوس ، عدد الأحرف = ١٠ أحرف

أي أن عدد الأوجه + عدد الرؤوس = ٦ + ٦ = ١٢ ، عدد الأحرف + ٢ = ١٠ + ٢ = ١٢

∴ عدد الأوجه + عدد الرؤوس = عدد الأحرف + ٢



مثال ٣

الشبكة في الشكل المقابل تمثل شبكة لهرم رباعي منتظم.

أوجد: ١ ارتفاع الهرم.
٢ الارتفاع الجانبي للهرم.

الحل

الشبكة تمثل هرمًا رباعيًا منتظمًا قاعدته المربع أ ب حـ ء

، ورأسه م وارتفاعه م ن حيث ن نقطة تقاطع قطري القاعدة

∵ أ ب حـ ء مربع

∴ طول قطره = طول ضلعه × $\sqrt{2}$

∴ أ حـ = ٢٠ × $\sqrt{2}$ = ٢٠$\sqrt{2}$ سم ∴ أ ن = ١٠$\sqrt{2}$ سم

، ∵ م أ ب حـ ء هرم رباعي قائم ∴ $\overline{\text{م ن}}$ ⊥ مستوى القاعدة أ ب حـ ء

∴ $\overline{\text{م ن}}$ ⊥ $\overline{\text{ن أ}}$ ∴ Δ م ن أ فيه: ق(∠ م ن أ) = ٩٠°

∴ (م ن)^2 = (م أ)^2 − (أ ن)^2 = (٢٦)^2 − (١٠$\sqrt{2}$)^2 = ٤٧٦

∴ م ن = $\sqrt{476}$ = ٢$\sqrt{119}$ سم ∴ ارتفاع الهرم = ٢$\sqrt{119}$ سم

وبفرض أن: س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ أ س = ١٠ سم

، ∵ م أ = م ب ∴ $\overline{\text{م س}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$

∴ Δ أ س م فيه: ق(∠ أ س م) = ٩٠°

∴ (م س)^2 = (م أ)^2 − (أ س)^2 = (٢٦)^2 − (١٠)^2 = ٥٧٦

∴ م س = $\sqrt{576}$ = ٢٤ سم ∴ الارتفاع الجانبي للهرم = ٢٤ سم

(المساحة الجانبية للهرم المنتظم - المساحة الكلية للهرم - حجم الهرم)

- المساحة الجانبية للهرم = مجموع مساحات الأوجه الجانبية
- المساحة الجانبية للهرم المنتظم = $\frac{1}{2}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي
- المساحة الكلية للهرم = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة
- حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

استنتاج المساحة الجانبية للهرم المنتظم

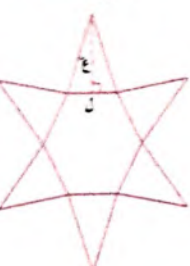
إذا كان هرم منتظم طول ضلع قاعدته المنتظمة ل وعدد أضلاع القاعدة ن ، ارتفاعه الجانبي ع فإن من شبكة هذا الهرم فإن له ن من الأوجه الجانبية المتطابقة والمتساوية الساقين

وتكون مساحة كل منها $\frac{1}{2}$ × ل × عَ



∴ المساحة الجانبية للهرم المنتظم = مساحة الوجه الواحد × ن

= $\frac{1}{2}$ × ل × عَ × ن



، ∵ محيط القاعدة = ن × ل

∴ المساحة الجانبية للهرم المنتظم = $\frac{1}{2}$ × محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

استنتاج حجم الهرم

تجربة عملية



- أحضر وعاء مفرغ على شكل منشور قائم ووعاء آخر على شكل هرم قائم بحيث تكون قواعدهم متطابقة ولهما نفس الارتفاع كما بالشكل المقابل.
- املأ الوعاء الهرمي بحبات الأرز أو الرمل ثم قم بتفريغ ما به في المنشور.
- لاحظ أنه بتكرار هذه العملية ثلاث مرات فإن المنشور سوف يمتلئ تمامًا بحبات الأرز أو الرمل.

وهذا يعني أن: حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ حجم المنشور المتحد معه في القاعدة والارتفاع

، ∵ حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع

فإن حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

ملاحظات

١ في الهرم الثلاثي المنتظم الوجوه يكون ضعف مربع طول حرفه = ٣ أمثال مربع ارتفاعه

أي أن ٢ ل^٢ = ٣ ع^٢ حيث ل = طول الحرف ، ع = الارتفاع

٢ المساحة الكلية للهرم الثلاثي المنتظم الوجوه = ل^٢ $\sqrt{٣}$ حيث ل طول الحرف.

٣ حجم الهرم الثلاثي المنتظم الوجوه = $\frac{\sqrt{٢}}{١٢}$ ل^٢ حيث ل طول حرفه.

مثال ٤

هرم رباعي منتظم طول قطر قاعدته ٦٠ $\sqrt{٢}$ سم وارتفاعه الجانبي ٥٠ سم

أوجد : ١ ارتفاع الهرم. ٢ المساحة الجانبية والكلية للهرم. ٣ حجم الهرم.

الحل

بفرض م أ ب حـ ء هرم رباعي منتظم تقاطع قطرا قاعدته في ن ، هـ منتصف $\overline{أب}$

١ ∵ الهرم رباعي منتظم

∴ قاعدته مربعة الشكل ، طول ضلع القاعدة = $\frac{٦٠\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$ = ٦٠ سم

، $\overline{من}$ ⊥ المستوى أ ب حـ ء

∴ $\overline{من}$ ⊥ $\overline{هـن}$

∴ Δ م هـ ن قائم الزاوية في ن

، ∵ هـ منتصف $\overline{أب}$ ، ن منتصف $\overline{أحـ}$

∴ هـ ن = $\frac{١}{٢}$ ب حـ = ٣٠ سم ∴ ع = $\sqrt{(٥٠)^٢ - (٣٠)^٢}$ = ٤٠ سم

٢ المساحة الجانبية للهرم = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

= $\frac{١}{٢}$ × (٦٠ × ٤) × ٥٠ = ٦٠٠٠ سم^٢

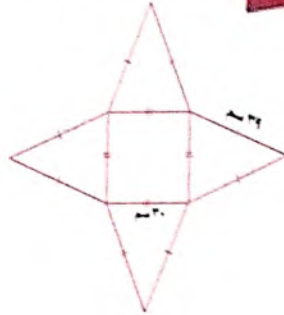
، ∵ مساحة القاعدة = ٦٠ × ٦٠ = ٣٦٠٠ سم^٢

∴ المساحة الكلية للهرم = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

= ٦٠٠٠ + ٣٦٠٠ = ٩٦٠٠ سم^٢

٣ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع = $\frac{١}{٣}$ × ٣٦٠٠ × ٤٠ = ٤٨٠٠٠ سم^٣

مثال ٥



باستخدام الشبكة التي أمامك صف المجسم

ثم أوجد مساحته الكلية وحجمه.

الحل

الشبكة لهرم رباعي منتظم قاعدته مربعة الشكل طول ضلعها = ٣٠ سم

وطول حرفه الجانبي = ٣٩ سم وبفرض الهرم م أ ب حـ ء

، ن نقطة تقاطع قطري قاعدته ، هـ منتصف $\overline{أب}$

، ∵ الوجه الجانبي م أ ب مثلث متساوي الساقين

∴ $\overline{مهـ}$ ارتفاع جانبي ، أ هـ = ١٥ سم

∴ في Δ أ هـ م القائم الزاوية في هـ :

م هـ = $\sqrt{(م أ)^٢ - (أ هـ)^٢}$ = $\sqrt{(٣٩)^٢ - (١٥)^٢}$ = ٣٦ سم

، ∵ $\overline{من}$ ⊥ المستوى أ ب حـ ء ∴ $\overline{من}$ ⊥ $\overline{هـن}$

، ∵ هـ ن = $\frac{١}{٢}$ ب حـ = ١٥ سم ∴ في Δ م هـ ن القائم الزاوية في ن :

م ن = $\sqrt{(م هـ)^٢ - (هـ ن)^٢}$ = $\sqrt{(٣٦)^٢ - (١٥)^٢}$ = ٣ $\sqrt{١١٩}$ سم

∴ المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

= $\frac{١}{٢}$ × (٣٠ × ٤) × ٣٦ = ٢١٦٠ سم^٢

، مساحة القاعدة = ٣٠ × ٣٠ = ٩٠٠ سم^٢

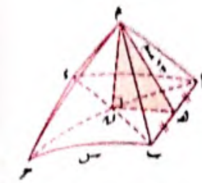
∴ المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة = ٢١٦٠ + ٩٠٠ = ٣٠٦٠ سم^٢

، الحجم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع = $\frac{١}{٣}$ × ٩٠٠ × ٣ $\sqrt{١١٩}$ = ٩٠٠ $\sqrt{١١٩}$ سم^٣

مثال ٦

م أ ب حـ ء هرم رباعي منتظم مساحته الكلية = ٣٦٠ سم^٢ وارتفاعه الجانبي = ١٣ سم

أوجد طول ضلع قاعدته ثم أوجد حجمه.



الحل

نفرض أن طول ضلع المربع = س سم

، ∵ المساحة الكلية = ٣٦٠ سم^{٢}

∴ مساحة القاعدة + المساحة الجانبية = ٣٦٠

∴ س × س + $\frac{١}{٢}$ × ٤ س × ١٣ = ٣٦٠ ∴ س^{٢} + ٢٦ س − ٣٦٠ = ٠

∴ (س + ٣٦) (س − ١٠) = ٠ ∴ س = −٣٦ (مرفوض) أ، س = ١٠

∴ طول ضلع قاعدة الهرم = ١٠ سم

، ∵ هـ ن = $\frac{١}{٢}$ ب حـ = ٥ سم

، ∵ Δ م هـ ن قائم الزاوية فى ن ∴ م ن = $\sqrt{(١٣)^{٢} - (٥)^{٢}}$ = ١٢ سم

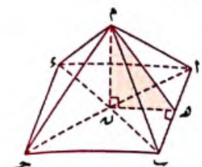
∴ الحجم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع = $\frac{١}{٣}$ × (١٠)^{٢} × ١٢ = ٤٠٠ سم^{٣}

مثال ٧

هرم رباعى منتظم حجمه ٤٨ سم^{٣} وطول ضلع قاعدته = ٦ سم أوجد مساحته الكلية.

الحل

بفرض م أ ب حـ ء هرم رباعى منتظم ، ن نقطة تقاطع قطرى قاعدته ، هـ منتصف $\overline{أب}$



∵ حجم الهرم = ٤٨ سم^{٣}

∴ $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع = ٤٨

∴ $\frac{١}{٣}$ × ٦ × ٦ × ع = ٤٨ ∴ ع = ٤ سم

∴ ارتفاع الهرم = م ن = ٤ سم ، ∵ هـ ن = $\frac{١}{٢}$ ب حـ = ٣ سم

، ∵ Δ م هـ ن قائم الزاوية فى ن ∴ م هـ = $\sqrt{(٤)^{٢} + (٣)^{٢}}$ = ٥ سم

∴ المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

= $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى + مساحة القاعدة

= $\frac{١}{٢}$ × (٤ × ٦) × ٥ + ٦ × ٦ = ٩٦ سم^{٢}

مثال ٨

م أ ب حـ هرم ثلاثى منتظم الوجوه ، طول أى حرف من أحرفه يساوى ٨ $\sqrt{٣}$ سم

أوجد : [١] الارتفاع الجانبى. [٢] ارتفاع الهرم.

[٣] المساحة الكلية للهرم. [٤] حجم الهرم.



الحل

∵ الهرم ثلاثى منتظم الوجوه.

∴ كل وجه من أوجهه يكون مثلث متساوى الأضلاع.

∴ الارتفاع الجانبى للهرم = م ء = أ ء = ٨ $\sqrt{٣}$ جا ٦٠° = ١٢ سم

، ∵ هـ هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث أ ب حـ

∴ أ هـ = $\frac{٢}{٣}$ أ ء = $\frac{٢}{٣}$ × ١٢ = ٨ سم

، ∵ $\overline{م هـ}$ ⊥ المستوى أ ب حـ

∴ $\overline{م هـ}$ ⊥ $\overline{أ ء}$

∴ Δ م أ هـ قائم الزاوية فى هـ

∴ م هـ = $\sqrt{(٨\sqrt{٣})^{٢} - (٨)^{٢}}$ = ٨ $\sqrt{٢}$ سم

∴ ارتفاع الهرم = ٨ $\sqrt{٢}$ سم

، ∵ المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

= $\frac{١}{٢}$ × (٣ × ٨ $\sqrt{٣}$) × ١٢ = ١٤٤ $\sqrt{٣}$ سم^{٢}

، مساحة القاعدة = $\frac{١}{٢}$ × ٨ $\sqrt{٣}$ × ٨ $\sqrt{٣}$ جا ٦٠° = ٤٨ $\sqrt{٣}$ سم^{٢}

∴ المساحة الكلية = ١٤٤ $\sqrt{٣}$ + ٤٨ $\sqrt{٣}$ = ١٩٢ $\sqrt{٣}$ سم^{٢}

، حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع = $\frac{١}{٣}$ × ٤٨ $\sqrt{٣}$ × ٨ $\sqrt{٢}$ = ١٢٨ $\sqrt{٦}$ سم^{٣}

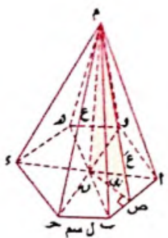
> **لاحظ أن**
>
> ∵ الهرم ثلاثى منتظم الوجوه
>
> ∴ ٢ ل^{٢} = ٣ ع^{٢} ∴ ٢ × (٨ $\sqrt{٣}$)^{٢} = ٣ ع^{٢}
>
> ∴ ع = ٨ $\sqrt{٢}$ ∴ ارتفاع الهرم = ٨ $\sqrt{٢}$ سم

مثال ٩

هرم سداسى منتظم فيه مجموع مساحات الأوجه الجانبية سبعة أمثال مساحة القاعدة

أثبت أن حجم الهرم = ٨ نق^{٣} حيث نق طول نصف قطر الدائرة المرسومة داخل القاعدة.

الحل



نفرض أن طول ضلع الشكل السداسى = ل سم

، ارتفاع الهرم = ع ، الارتفاع الجانبى = عَ

، ∵ مجموع مساحات الأوجه الجانبية = ٧ × مساحة القاعدة

∴ $\frac{١}{٢}$ × محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى = ٧ × مساحة القاعدة

∴ ⅓ × ٦ ل × ع = ٧ × ½ × ل × نق × ٦   ∴ ٣ ل ع = ٢١ ل نق

∴ ع = ٧ نق   ∴ م و ⊥ و ص

∵ م و ⊥ المستوى أ ب حـ ء هـ و

∴ Δ م و ص قائم الزاوية في و

∴ ع = $\sqrt{}$(ع² − نق²) = $\sqrt{}$((٧ نق)² − نق²) = ٤ $\sqrt{٣}$ نق

∵ حجم الهرم = ⅓ × مساحة القاعدة × الارتفاع = ⅓ × ½ × ل × نق × ٦ × ٤ $\sqrt{٣}$ نق = ٤ $\sqrt{٣}$ ل نق²

∵ نق = ل جا ٦٠°   ∴ ل = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ نق

∴ حجم الهرم = ٤ $\sqrt{٣}$ × $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ نق × نق² = ٨ نق³

مثال ١٠

م أ ب حـ هرم ثلاثى رأسه م على بعد ٤ $\sqrt{٥}$ سم من قاعدته أ ب حـ حيث أ ب = ٧ سم

، ب حـ = ٨ سم ، أ حـ = ٩ سم أوجد حجم الهرم.

الحل

تذكر!

مساحة Δ أ ب حـ = $\sqrt{}$ع (ع − أ ب) (ع − ب حـ) (ع − أ حـ)

حيث ع نصف محيط المثلث أ ب حـ

∵ محيط Δ أ ب حـ

= ٧ + ٨ + ٩

= ٢٤ سم

∴ نصف المحيط = ١٢ سم

∴ مساحة المثلث أ ب حـ = $\sqrt{}$١٢ (١٢ − ٧) (١٢ − ٨) (١٢ − ٩) = ١٢ $\sqrt{٥}$ سم²

∴ حجم الهرم = ⅓ مساحة القاعدة × الارتفاع

= ⅓ × ١٢ $\sqrt{٥}$ × ٤ $\sqrt{٥}$ = ٨٠ سم³

تمارين 7 على الهرم



اختبر نفسك

• تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا • من أسئلة الكتاب المدرسي

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) القطعة المستقيمة الواصلة بين رأس الهرم وأحد رؤوس قاعدته تسمى ....

(أ) ارتفاع الهرم. (ب) ارتفاعه الجانبي. (جـ) حرفه الجانبي. (د) ضلع قاعدته.

(٢) إذا كان : م أ ب حـ ء هرم رباعي منتظم فإن الهرم يجب أن يكون ....

(I) منتظم الأوجه. (II) قاعدته مربعة. (III) قائم.

(أ) I ، II (ب) II ، III (جـ) I (د) I ، II ، III

(٣) أى الجمل الآتية صحيحة ؟

(أ) الأوجه الجانبية للهرم القائم تكون متطابقة.

(ب) الهرم المنتظم هو هرم قائم.

(جـ) ارتفاعات الأوجه الجانبية للهرم تكون متساوية.

(د) أقل عدد من المستويات التى تحدد مجسمًا = ٣ مستويات.

(٤) أى الجمل الآتية غير صحيحة ؟

(أ) الهرم القائم يمكن أن تكون قاعدته سطح معين.

(ب) الهرم الثلاثى له ثلاثة أوجه. (جـ) الهرم الخماسى له ستة أوجه.

(د) الهرم الرباعى جميع أوجهه الجانبية سطوح مثلثات.

(٥) فى الهرم المنتظم أى الأطوال الآتية مرتبة من الأصغر إلى الأكبر ؟

(أ) طول الحرف الجانبى ، ارتفاع الهرم ، الارتفاع الجانبى.

(ب) ارتفاع الهرم ، الارتفاع الجانبى ، طول الحرف الجانبى.

(جـ) الارتفاع الجانبى ، ارتفاع الهرم ، طول الحرف الجانبى.

(د) طول الحرف الجانبى ، الارتفاع الجانبى ، ارتفاع الهرم.

(٦) الشكل الذى يصلح أن يكون قاعدة لهرم رباعى منتظم هو ....

(أ) متوازى الأضلاع. (ب) المعين. (جـ) المستطيل. (د) المربع.

(٧) إذا كان : م أ ب حـ ء هرم رباعى منتظم فإن جميع أحرفه الجانبية ....

(أ) متوازية.
(ب) متطابقة.
(جـ) عمودية على القاعدة.
(د) متعامدة مثنى مثنى.

(٨) إذا كان : م أ ب حـ هرم ثلاثى قائم ، ن مسقط النقطة م على المستوى أ ب حـ ، هـ منتصف ب حـ
فإن كل المثلثات الآتية تكون قائمة ما عدا ....

(أ) Δ م ن حـ
(ب) Δ م ن هـ
(جـ) Δ م ب حـ
(د) Δ م ن أ

(٩) إذا كان : م أ ب حـ هرم منتظم الأوجه ، ن مسقط النقطة م على المستوى أ ب حـ ، هـ منتصف أ ب
فأى مما يأتى يكون مثلث متساوى الأضلاع ؟

(أ) Δ م ن هـ
(ب) Δ م ب هـ
(جـ) Δ أ حـ هـ
(د) Δ م ب حـ

(١٠) عدد جميع أوجه الهرم الخماسى المنتظم هو ....

(أ) ٥
(ب) ٦
(جـ) ٧
(د) ١٠

(١١) إذا علمت أن هرم له عدد أوجه «م»، عدد رؤوس «ن» فإن عدد أحرفه = ...

(أ) م + ن
(ب) م + ن − ١
(جـ) م + ن − ٢
(د) م + ن + ٢

(١٢) فى الهرم السداسى يكون عدد الأوجه + عدد جميع رؤوسه − عدد أحرفه = ...

(أ) ١
(ب) ٢
(جـ) ٣
(د) ٤

(١٣) فى الشكل المقابل :



هرم رباعى منتظم فإن ارتفاعه = ... سم.

(أ) $\sqrt{٨٥}$
(ب) $\sqrt{١٥٧}$
(جـ) ١٠
(د) ٨

(١٤) فى الشكل المقابل :



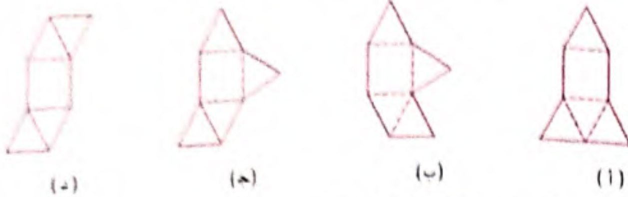
هرم رباعى منتظم فإن ارتفاعه = ... سم.

(أ) $٧\sqrt{٢}$
(ب) $٢\sqrt{٧}$
(جـ) $٤\sqrt{٢}$
(د) $٢\sqrt{٥}$

(١٥) هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ٦ سم ، وطول حرفه الجانبى ٨ سم
فإن ارتفاعه = ... سم.

(أ) $٥\sqrt{٢}$
(ب) $\sqrt{٤٦}$
(جـ) $\sqrt{٨٥}$
(د) ٤٨

(١٦) أى الشبكات التالية لا تصنع هرمًا رباعيًا منتظمًا عند طيها ؟



(١٧) أى المجسمات يعبر عن الشبكة المقابلة ؟



(أ) هرم رباعى.
(ب) هرم رباعى منتظم.
(جـ) هرم ثلاثى منتظم الوجوه.
(د) غير ذلك.

(١٨) النسبة بين طول حرف الهرم الثلاثى المنتظم الوجوه : ارتفاعه = ...

(أ) $\sqrt{٢} : \sqrt{٣}$
(ب) $\sqrt{٣} : ٢$
(جـ) $\sqrt{٦} : ٢$
(د) $\sqrt{٣} : ٣$

(١٩) النسبة بين طول حرف الهرم المنتظم الوجوه : ارتفاعه الجانبى = ...

(أ) $٢\sqrt{٢} : \sqrt{٣}$
(ب) $٢\sqrt{٣} : ٣$
(جـ) $\sqrt{٦} : ٢$
(د) $\sqrt{٦} : ٣$

(٢٠) إذا قطعنا هرمًا رباعيًا منتظمًا بمستوى يوازى قاعدته فإن المقطع الحادث يكون ....

(أ) مثلثًا.
(ب) مربعًا.
(جـ) مستطيلًا.
(د) دائرة.

(٢١) هرم رباعى قائم قاعدته معين طولا قطريه ١٢ سم ، ٨ سم وارتفاعه ١٠ سم فإن حجمه = ... سم^٣

(أ) ٤٠
(ب) ٨٠
(جـ) ١٦٠
(د) ٢٠٠

(٢٢) 📖 هرم رباعى منتظم محيط قاعدته ٣٦ سم ، وارتفاعه ١٠ سم فإن حجمه يساوى .... سم^٣

(أ) ٨١٠
(ب) ١٨٠
(جـ) ٣٦٠
(د) ٢٧٠

(٢٣) هرم سداسى منتظم طول ضلع قاعدته = ٨ سم ، ارتفاعه = ١٠ سم
فإن حجمه يساوى .... سم^٣.

(أ) $٣٢٠\sqrt{٣}$
(ب) $٩٦٠\sqrt{٣}$
(جـ) $\frac{٣٢٠\sqrt{٣}}{٣}$
(د) ١٦٠

(٢٤) هرم منتظم حجمه ١٢ سم^٣ ومساحة قاعدته ٤ سم^٢ فإن ارتفاعه = ... سم.

(أ) ٣
(ب) ٦
(جـ) ٩
(د) ٢

(٢٥) هرم رباعى منتظم حجمه ٦٤ سم^٣ وارتفاعه = ٦ سم فإن محيط القاعدة = ... سم.

(أ) ٨
(ب) $٨\sqrt{٢}$
(جـ) ١٦
(د) $١٦\sqrt{٢}$

(٢٦) هرم رباعي منتظم حجمه ٤٨٠ سم³ وطول ضلع قاعدته ١٢ سم فإن ارتفاعه = ... سم.

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٣٠ (د) ١٥

(٢٧) إذا كان حجم هرم سداسي منتظم يساوي $٨\sqrt{٣}$ سم³ وارتفاعه يساوي ٤ سم فإن محيط قاعدته = ... سم.

(أ) ٢ (ب) ١٢ (جـ) ٦ (د) $٦\sqrt{٣}$

(٢٨) هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ١٠ سم ، وارتفاعه الجانبي ١٣ سم تكون مساحته الجانبية .... سم²

(أ) ٢٦٠ (ب) ٣٦٠ (جـ) ١٣٠ (د) ٥٢٠

(٢٩) هرم رباعي منتظم مساحة قاعدته = ١٠٠ سم² وارتفاعه ١٢ سم فإن مساحته الجانبية تساوي .... سم².

(أ) ٢٦٠ (ب) ٥٢٠ (جـ) ١٣٠ (د) ٣٦٠

(٣٠) المساحة الكلية لهرم رباعي قائم قاعدته مضلع منتظم طول قطره = $١٠\sqrt{٢}$ سم وارتفاعه = $٥\sqrt{٢}$ سم تساوي .... سم².

(أ) ٤٠ (ب) ١٠٠ (جـ) ٢٠٠ (د) ٣٠٠

(٣١) هرم رباعي منتظم مساحته الجانبية = ٣٠ سم² ، ارتفاعه الجانبي = ٥ سم فإن محيط قاعدته = ... سم.

(أ) ٦ (ب) ١٢ (جـ) ٢٤ (د) ٣٦

(٣٢) هرم ثلاثي منتظم الوجوه ، وطول حرفه ١٠ سم فتكون مساحته الكلية يساوي .... سم²

(أ) ٤٠ (ب) ١٠٠ (جـ) $١٠٠\sqrt{٣}$ (د) $٢٥\sqrt{٣}$

(٣٣) إذا كان مجموع أطوال أحرف هرم ثلاثي منتظم الوجوه يساوي ١٨ سم فإن مساحته الكلية = ... سم²

(أ) $\frac{٢٧\sqrt{٢}}{٤}$ (ب) $\frac{٢٧\sqrt{٣}}{٤}$ (جـ) $٩\sqrt{٣}$ (د) $\frac{٢٧\sqrt{٣}}{٢}$

(٣٤) إذا كانت مساحة هرم منتظم الوجوه الكلية = $٣٦\sqrt{٣}$ سم² فإن مجموع أطوال أحرفه = ... سم.

(أ) ٦ (ب) ١٢ (جـ) ١٨ (د) ٣٦

(٣٥) هرم ثلاثي منتظم الوجوه مساحته الكلية = $٩\sqrt{٣}$ سم² فإن طول حرفه = ... سم.

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٢٧ (د) $\sqrt{٣}$

(٣٦) هرم ثلاثي منتظم طول ضلع قاعدته ٦ ل سم وارتفاعه ل سم فإن مساحته الجانبية .... سم²

(أ) $٢٧\sqrt{٣}$ ل² (ب) ١٨ ل² (جـ) $٩\sqrt{٣}$ ل² (د) ٣٦ ل²

(٣٧) هرم ثلاثي منتظم الوجوه طول حرفه ٦ سم يكون حجمه = ... سم³

(أ) $٢٧\sqrt{٢}$ (ب) $٣٦\sqrt{٢}$ (جـ) $٥٤\sqrt{٢}$ (د) $١٨\sqrt{٢}$

(٣٨) إذا كان مجموع أطوال أحرف هرم ثلاثي منتظم الأوجه يساوي ١٨ سم فإن حجمه = ... سم³

(أ) $٩\sqrt{٢}$ (ب) $\frac{٩\sqrt{٢}}{٤}$ (جـ) $\frac{٢٧\sqrt{٢}}{٥}$ (د) $٩\sqrt{٣}$

(٣٩) إذا كان الارتفاع الجانبي لهرم ثلاثي منتظم الوجوه يساوي $٥\sqrt{٣}$ سم فإن مجموع مساحات أوجهه = ... سم²

(أ) $\frac{٥٠\sqrt{٣}}{٣}$ (ب) $٢٥\sqrt{٣}$ (جـ) $١٠٠\sqrt{٣}$ (د) $٥٠\sqrt{٣}$

(٤٠) هرم رباعي قائم قاعدته على شكل معين طول ضلعه يساوي طول أحد قطري المعين يساوي ٦ سم فإذا كان ارتفاع الهرم = ١٢ سم فإن حجم الهرم = ... سم³

(أ) $٧٢\sqrt{٣}$ (ب) $١٦\sqrt{٣}$ (جـ) ١٤٤ (د) ٧٢

(٤١) أ ب جـ د أَ بَ جـَ دَ مكعب طول حرفه = ٦ سم فإن حجم الهرم بَ أ ب جـ = ... سم³

(أ) ٣٦ (ب) ٧٢ (جـ) $٣٦\sqrt{٣}$ (د) $١٨\sqrt{٣}$

(٤٢) هرم رباعي منتظم مساحته الكلية = ٧٠ سم² ومساحته الجانبية = ٤٥ سم² فإن ارتفاع الهرم = ... سم.

(أ) ٢,٥ (ب) ٥ (جـ) $\sqrt{١٤}$ (د) ٤,٥

(٤٣) هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ١٠ سم ، ومساحة أحد أوجهه الجانبية ٦٠ سم² فإن مساحته الكلية يساوي .... سم²

(أ) ٦٠٠ (ب) ٣٤٠ (جـ) ١٦٠ (د) ٢٤٠

(٤٤) النسبة بين المساحة الجانبية للهرم الثلاثي المنتظم الوجوه إلى مساحته الكلية = ...

(أ) ١ : ٣ (ب) ١ : ٤ (جـ) ٣ : ٤ (د) ١ : ٢

(٤٥) هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته = ارتفاعه الجانبي فإن النسبة بين مساحته الجانبية : مساحته الكلية = ...

(أ) ٢ : ٣ (ب) ٣ : ٤ (جـ) ١ : ٢ (د) ٣ : ٥

(٤٦) هرم رباعي منتظم مساحة أي وجه من أوجهه الجانبية تساوي مساحة قاعدته المربعة فإذا كان طول ضلع قاعدة الهرم = ٦ سم فإن حجم الهرم = ... سم³

(أ) ٣٦ (ب) $٦\sqrt{٣}$ (جـ) $٣٦\sqrt{١٥}$ (د) $٢١٦\sqrt{١٥}$

(٤٧) إذا تضاعف طول ضلع قاعدة هرم رباعى منتظم مع ثبوت ارتفاعه فإن حجمه ....

(أ) يتضاعف. (ب) لا يتغير.
(جـ) يتضاعف أربع مرات. (د) يتضاعف ستة مرات.

(٤٨) هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٨ سم فإذا كان حجمه ١٢٩٦ سم^3

فإن مساحته الجانبية = ... سم^2

(أ) ٢٧٠ (ب) ٣٦٠ (جـ) ٤٥٠ (د) ٥٤٠

(٤٩) هرم قائم قاعدته مربع وجميع أحرفه الثمانية متساوية وكل منهم طوله يساوى أ سم

فإن مساحته الجانبية = ...

(أ) ٢ أ^2 (ب) ٤ أ^2 (جـ) $\sqrt{3}$ أ^2 (د) ٤ $\sqrt{3}$ أ^2

(٥٠) إذا كان الهرم م أ ب جـ ثلاثى رأسه م على بعد ١٥ سم من قاعدته أ ب جـ وأطوال أضلاع قاعدته ٥ ، ٦ ، ٧ سم فإن حجمه = ... سم^3

(أ) ١٥ $\sqrt{2}$ (ب) ١٠ $\sqrt{6}$ (جـ) ٣٠ $\sqrt{6}$ (د) ٩٠

(٥١) فى الشكل المقابل :

م أ ب جـ ء هرم رباعى منتظم حجمه ٤٨ سم^3 وارتفاعه ٤ سم

، ل جـ = ل ب ، $\overline{أ جـ} \cap \overline{ب ء} = \{ح\}$

، ق(∠ م ح ل) = ق(∠ ح ل ب) = ق(∠ م ل ب) = ٩٠°

فإن المساحة الجانبية للهرم = ... سم^2

(أ) ١٨ (ب) ٢٤
(جـ) ٣٦ (د) ٦٠

(٥٢) باستخدام الشبكة التى أمامك فإن المساحة الجانبية للمجسم الناتج = ... سم^2.

(أ) ٨ $\sqrt{3}$ (ب) ١٢ $\sqrt{3}$
(جـ) ١٦ $\sqrt{3}$ (د) ٢٤

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ فى الهرم الخماسى المنتظم :

(١) ما عدد أوجهه الجانبية ؟ (٢) ما عدد الأوجه ؟
(٣) ما عدد أحرفه الجانبية ؟ (٤) ما عدد أحرفه ؟
(٥) للهرم رأس واحدة خلاف رؤوس القاعدة. ما عدد جميع رؤوس الهرم الخماسى ؟
هل تحقق إجابتك علاقة أويلر لأى مجسم قاعدته منطقة مضلعة ؟

٢ م أ ب جـ ء هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته يساوى ١٠ سم ، وارتفاعه ١٢ سم.
أوجد ارتفاعه الجانبى.

«١٣ سم»

٣ م أ ب جـ ء هرم رباعى منتظم ارتفاعه ٢٠ سم ، وارتفاعه الجانبى ٢٥ سم.
أوجد طول ضلع قاعدة الهرم.

«٣٠ سم»

٤ م أ ب جـ ء هرم رباعى منتظم قاعدته المربع أ ب جـ ء فإذا كان ارتفاعه يساوى ٤ $\sqrt{3}$ سم وطول حرفه الجانبى م أ = ٤ $\sqrt{5}$ سم احسب طول ضلع قاعدته.

«٨ سم»

٥ م أ ب جـ هرم ثلاثى منتظم قاعدته △ أ ب جـ المتساوى الأضلاع الذى طول ضلعه ١٢ سم فإذا كان ارتفاع الهرم يساوى ٦ سم فأوجد طول حرفه الجانبى.

«٢ $\sqrt{21}$ سم»

٦ م أ ب جـ هرم ثلاثى منتظم قاعدته أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٣ سم فإذا كان طول حرفه الجانبى = $\sqrt{7}$ سم فأوجد ارتفاع الهرم.

«٢ سم»

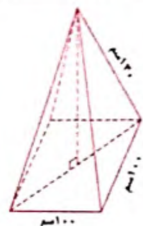
٧ م أ ب جـ هرم ثلاثى منتظم الوجوه طول حرفه ١٢ سم احسب ارتفاعه وارتفاعه الجانبى.

«٤ $\sqrt{6}$ سم ، ٦ $\sqrt{3}$ سم»

٨ هرم سداسى منتظم ارتفاعه ٨ سم وقاعدته مسدس منتظم محيطه ٢٤ $\sqrt{3}$ سم
احسب طول حرفه وارتفاعه الجانبى.

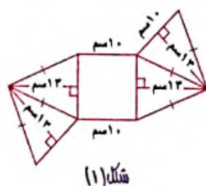
«٤ $\sqrt{7}$ سم ، ١٠ سم»

٩ يوضح الشكل المقابل خزان مياه على شكل هرم رباعى منتظم مستعينًا بالبيانات المعطاة أوجد كلًا من ارتفاع الوجه الجانبى وارتفاع الخزان.

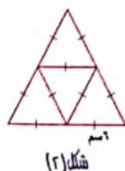


«١٢٠٠ سم ، ١٠ $\sqrt{119}$ سم»

١٠ كل من الشكلين التاليين يمثل شبكة مجسم. صف المجسم واحسب ارتفاعه :



شكل(١)



شكل(٢)

«١٢ سم ، ٢ $\sqrt{6}$ سم»

١١ هرم الجيزة الأكبر (هرم خوفو) هو هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ٢٣٢ مترًا ، وارتفاعه الجانبى ١٨٦ مترًا أوجد ارتفاع الهرم. ١٤٥,٤٠ مترًا

١٢ م ا ب حـ هرم ثلاثى قائم طول حرفه م ا = ٢٥ سم وقاعدته ا ب حـ على شكل مثلث قائم الزاوية فى ا بحيث ب ا = ١٦,٨ سم ، حـ ا = ١٢,٦ سم أوجد ارتفاع الهرم. ٢٤٠ سم³

١٣ م ا ب حـ ء هرم رباعى قائم قاعدته المعين ا ب حـ ء فيه ا حـ = ١٦ سم ، ب ء = ١٢ سم ، ن نقطة تقاطع قطريه فإذا كان ارتفاع الهرم م ن = ١٠ سم فأوجد أطوال أحرفه الجانبية. ٢√٣٤ سم ، ٢√٤١ سم

١٤ هرم ثلاثى منتظم ارتفاعه ١٢ سم وطول ضلع قاعدته ١٨ سم أوجد حجم الهرم. ٣٢٤√٣ سم³

١٥ م ا ب حـ ء هرم رباعى منتظم قاعدته ا ب حـ ء حيث : ا ب = ١٠ سم وارتفاع الهرم = ١٢ سم أوجد :

(١) طول أى ارتفاع جانبى. (٢) حجم الهرم.

(٣) المساحة الكلية للهرم.

١٣ سم ، ٤٠٠ سم³ ، ٣٦٠ سم²

١٦ هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ٢٠ سم وارتفاعه ١٠√٣ سم أوجد :

(١) المساحة الجانبية. (٢) حجم الهرم.

٨٠٠ سم² ، $\frac{٤٠٠٠}{٣}$ √٣ سم³

١٧ هرم رباعى منتظم طول قطر قاعدته ٢٤√٢ سم وارتفاعه الجانبى = ٢٠ سم أوجد مساحته الكلية وحجمه.

١٥٣٦ سم² ، ٣٠٧٢ سم³

١٨ م ا ب حـ ء هرم رباعى قائم قاعدته ا ب حـ ء مربع طول ضلعه ٨√٢ سم وطول حرفه الجانبى يساوى ٤√٦ سم أوجد :

(١) المساحة الجانبية للهرم. (٢) حجم الهرم.

١٢٨√٢ سم² ، $\frac{٥١٢}{٣}$ √٢ سم³

١٩ م ا ب حـ ء هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته = ٢٠ سم وطول حرفه الجانبى = ٢٦ سم أوجد :

(١) الارتفاع الجانبى للهرم. (٢) ارتفاع الهرم. (٣) المساحة الجانبية للهرم.

(٤) حجم الهرم.

٢٤ سم ، ٢√١١٩ سم ، ٩٦٠ سم² ، $\frac{٨٠٠}{٣}$ √١١٩ سم³

٢٠ هرم ثلاثى منتظم الوجوه طول حرفه = ١٢ سم أوجد ارتفاعه ثم أوجد حجم الهرم ومساحته الكلية.

٤√٦ سم ، ١٤٤√٢ سم³ ، ١٤٤√٣ سم²

٢١ م ا ب حـ ء هرم قائم قاعدته ا ب حـ ء على شكل مربع طول ضلعه = ١٨ سم ، م ا = م ب = م حـ = م ء = ١٥ سم أوجد :

(١) المساحة الكلية للهرم. (٢) حجم الهرم.

٧٥٦ سم² ، ٣٢٤√٧ سم³

٢٢ احسب لأقرب رقم عشرى واحد حجم هرم خماسى منتظم ، طول ضلع قاعدته = ١٦ سم وارتفاعه ١٢ سم

١٧٦١,٨ سم³

٢٣ هرم سداسى منتظم طول ضلع قاعدته ١٢ سم وارتفاعه الجانبى ١٠√٣ سم أوجد :

(١) مساحته الجانبية. (٢) مساحته الكلية.

٣٦٠√٣ سم² ، ٥٧٦√٣ سم²

٢٤ أوجد المساحة الجانبية والمساحة الكلية لكل هرم منتظم حسب البيانات المعطاة :

(١) (٢) (٣) (٤)

٢٥ أوجد حجم الهرم المنتظم الموضح بالشكل مستخدمًا البيانات المعطاة :

(١) (٢) (٣) (٤)

٢٦ هرم رباعى ارتفاعه ١٢ سم وقاعدته على شكل معين طولا قطريه ٤ ، ٨ سم

أثبت أن حجمه يساوى حجم مكعب طول حرفه ٤ سم

٢٧ م ا ب حـ هرم ثلاثى رأسه م على بعد ١٥ سم من قاعدته ا ب حـ وأطوال أضلاع قاعدته المثلثة هى : ٥ ، ٦ ، ٧ سم أوجد حجمه. ٣٠√٦ سم³

٢٨ هرم رباعى منتظم مساحة قاعدته ٧٠٠ سم² وارتفاعه الجانبى ٢٠ سم أوجد حجمه. ٣٥٠٠ سم³

٢٩ هرم رباعى منتظم مساحة قاعدته ٩ سم² وطول حرفه الجانبى ٥ سم أوجد حجمه. ١٣,٦ سم³

٣٠ هرم رباعى منتظم حجمه ٤٠٠ سم³ وارتفاعه ١٢ سم احسب مساحته الجانبية. ٢٦٠ سم²

٣١ هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٨ سم فإذا كان حجمه ١٢٩٦ سم³ فأوجد ارتفاعه الجانبى ومساحته الجانبية. ١٥ سم ، ٥٤٠ سم²

٣٢ هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته = ١٢ سم ومساحته الكلية = ٣٨٤ سم^{٢} أوجد حجم الهرم. «٣٨٤ سم^{٣}»

٣٣ هرم قائم قاعدته على شكل مربع طول قطره = $١٠\sqrt{٢}$ سم فإذا كانت مساحته الجانبية = ٢٦٠ سم^{٢}

أوجد حجم الهرم. «٤٠٠ سم^{٣}»

٣٤ م أ ب حـ هرم ثلاثى منتظم طول ضلع قاعدته ٣ سم وطول حرفه الجانبى = $\sqrt{٧}$ سم

أوجد حجمه ومساحته الجانبية. «$\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ سم^{٣} ، $\frac{٩}{٤}\sqrt{١٩}$ سم^{٢}»

٣٥ هرم سداسى منتظم ارتفاعه ٨ سم ومحيط قاعدته $٢٤\sqrt{٣}$ سم احسب مساحته الجانبية والكلية.

«$١٢٠\sqrt{٣}$ سم^{٢} ، $١٩٢\sqrt{٣}$ سم^{٢}»

٣٦ أوجد حجم هرم قائم ارتفاعه الجانبى ١٠ سم وقاعدته على شكل مثلث متساوى الأضلاع مرسوم داخل دائرة طول نصف قطرها ١٢ سم. «$٢٨٨\sqrt{٣}$ سم^{٣}»

٣٧ باستخدام الشبكة التى أمامك صف المجسم

وأوجد مساحته الكلية.



«$٤٣٢\sqrt{٣}$ سم^{٢}»

٣٨ الربط بالصناعة : تصنع عبوات منتجات أحد المصانع من الورق المقوى بطى شبكة المجسم المقابلة.

١٠ سم

١٢ سم

(١) أوجد مساحة الورق المقوى المستخدم لإنتاج ١٠٠٠ عبوة.

(٢) احسب تكاليف الورق المقوى المستخدم إذا كان تكلفة المتر المربع الواحد منه ١٥ جنيهًا. «٣٤ م^{٢} ، ٥١٠ جنيه»

٣٩ م أ ب حـ ء هرم رباعى قائم قاعدته المربع أ ب حـ ء وكان طول أى حرف جانبى يساوى $٦\sqrt{٥}$ سم وكان ارتفاع الهرم = $٦\sqrt{٣}$ سم أوجد :

(١) المساحة الكلية للهرم. (٢) حجم الهرم. «٤٣٢ سم^{٢} ، $٢٨٨\sqrt{٣}$ سم^{٣}»

٤٠ الربط بالسياحة : صنع نموذج للهرم الأكبر (هرم رباعى منتظم) من سبيكة معدنية كثافتها ٣,٢ جم/سم^{٣} إذا كان طول ضلع قاعدة النموذج ١١,٥ وارتفاعه ٧ سم ، فاحسب كتلته لأقرب رقم عشرى واحد. «٩٨٧,٥ جم»

٤١ اهتمت فرنسا بالآثار المصرية القديمة فنقلت بعضها إلى باريس لتعرض فى متاحفها كما أنشأت هرمًا جوانبه من الزجاج الشفاف مشابهًا للهرم الأكبر (هرم رباعى منتظم) ليكون مدخلاً رئيسيًا لمتحف اللوفر بباريس. إذا علمت أن ارتفاعه ٢١,٦ متر وطول ضلع قاعدته ٣٥ مترًا ، فأوجد مساحة الزجاج المستخدم فى بنائه لأقرب متر مربع. «١٩٤٦ م^{٢}»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ هرم سداسى منتظم طول ضلع القاعدة = ٢ ل ، وارتفاع الهرم = ٣ ل

أثبت أن : المساحة الجانبية للهرم تساوى ضعف مساحة قاعدته.

٢ م أ ب حـ ء هرم رباعى منتظم إذا كان طول الحرف الجانبى للهرم = طول قطر القاعدة = ل

أثبت أن : المساحة الكلية للهرم = $\frac{ل^{٢}}{٢}(١ + \sqrt{٧})$

٣ أسطوانة دائرية قائمة جوفاء وضع بداخلها هرم ثلاثى قائم م أ ب حـ قاعدته أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع رءوسه تقع على محيط القاعدة السفلى للأسطوانة ، م رأس الهرم هى مركز القاعدة العليا للأسطوانة.

أوجد النسبة بين حجمى الهرم والأسطوانة. «$\frac{\sqrt{٣}}{٤\pi}$»

٤ هرم قائم قاعدته مربع وجميع أحرفه الثمانية متساوية ومساحته الكلية = $(\sqrt{٣} + ١)$ أ

أوجد طول حرفه بدلالة أ «$\sqrt{أ}$»

تعريف المخروط

هو مجسم له قاعدة واحدة على شكل منحنى مغلق ورأس واحدة ، ويتكون سطحه الجانبي من جميع القطع المستقيمة المرسومة من رأسه إلى منحنى قاعدته والتي يعرف كل منها براسم المخروط.

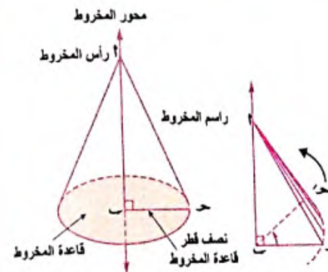


المخروط الدائرى القائم

هو الجسم الذى ينشأ من دوران مثلث قائم الزاوية دورة كاملة حول أحد ضلعى القائمة كمحور.
أو هو الفراغ الذى ينشأ من طى قطاع دائرى بحيث ينطبق نصفا قطريه كلٍ على الآخر.

فى الشكل المقابل :

إذا دار المثلث أ ب حـ القائم الزاوية فى ب دورة كاملة حول $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ كمحور فإن المجسم الناشئ من هذا الدوران يسمى مخروط دائرى قائم وتسمى النقطة أ رأس المخروط ، $\overline{\text{أحـ}}$ راسم المخروط ، $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ محور المخروط ، سطح الدائرة ب قاعدة المخروط.



• خواص المخروط الدائرى القائم

1. محور المخروط الدائرى القائم يكون عموديًا على مستوى القاعدة.

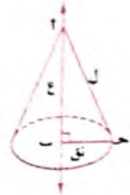
أى أن ، $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ⊥ مستوى الدائرة ب

2. ارتفاع المخروط الدائرى القائم هو طول القطعة المستقيمة الواصلة بين رأس المخروط ومركز قاعدته وهو دائمًا أقل من طول راسم المخروط.

فإذا فرضنا أن :

طول $\overline{\text{أب}}$ = ع وحدة طول ، وطول $\overline{\text{أحـ}}$ = ل وحدة طول

فإن : ارتفاع المخروط (ع) = $\sqrt{\text{ل}^2 - \text{نق}^2}$ ويكون ع < ل دائمًا



ملاحظة

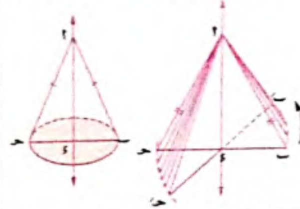
من الممكن أن ينشأ المخروط الدائرى القائم من دوران مثلث متساوى الساقين حول محور تماثله نصف دورة كامل.

فى الشكل المقابل :

إذا كان Δ أ ب حـ متساوى الساقين فيه :

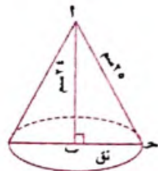
أب = أحـ ، $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ محور تماثل Δ أ ب حـ

فإذا دار المثلث أ ب حـ حول $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ نصف دورة كاملة فإنه ينشأ مخروط دائرى قائم قاعدته سطح الدائرة ء وراسمه $\overline{\text{أب}}$ أو $\overline{\text{أحـ}}$ وارتفاعه طول $\overline{\text{أء}}$ ورأسه نقطة أ



مثال ①

مخروط دائرى قائم طول راسمه ٢٥ سم وارتفاعه ٢٤ سم
أوجد محيط ومساحة قاعدة المخروط $(\pi \simeq \frac{٢٢}{٧})$



الحل

∵ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ⊥ مستوى الدائرة ب ∴ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$

∴ ق(∠ أ ب حـ) = ٩٠°

∴ (ب حـ)^2 = (أحـ)^2 − (أب)^2 = (٢٥)^2 − (٢٤)^2 = ٤٩

∴ ب حـ = ٧ سم ∴ نق (طول نصف قطر القاعدة) = ٧ سم

∴ محيط القاعدة = ٢ π نق = ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ = ٤٤ سم

، مساحة سطح القاعدة = π نق^2 = $\frac{٢٢}{٧}$ × ٤٩ = ١٥٤ سم^2

شبكة المخروط القائم



تذكر أن
إحدى شبكات الأسطوانة الدائرية القائمة هي:

ونلاحظ من شبكة المخروط أن

1. أب = أجـ = ل حيث ل طول راسم المخروط.
2. القطاع الدائري أب جـ يمثل السطح الجانبي للمخروط، وطول ب⌒جـ = محيط الدائرة ن = ٢ π نق
3. سطح الدائرة ن يمثل قاعدة المخروط.

تذكر أن

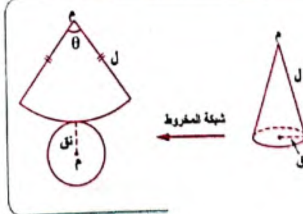
القطاع الدائري هو جزء من سطح دائرة محدود بنصفي قطرين وقوس من الدائرة.

- مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ ل نق حيث: ل طول قوس القطاع.
- مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ $\theta^{ء}$ نق^2 حيث: $\theta^{ء}$ قياس زاوية القطاع بالتقدير الدائري.
- مساحة القطاع = $\frac{س^\circ}{٣٦٠^\circ}$ × π نق^2 = $\frac{س^\circ}{٣٦٠^\circ}$ × مساحة الدائرة حيث $س^\circ$ القياس الستيني لزاوية القطاع.
- محيط القطاع = ٢ نق + ل وحدة طول.



ملاحظات هامة

1. إذا كان: ل < ٢ نق تكون شبكة المخروط كما هو موضح بالشكل وتكون $٠^\circ < \theta < ١٨٠^\circ$



2. إذا كان: ل = ٢ نق تكون شبكة المخروط كما هو موضح بالشكل وتكون $\theta = ١٨٠^\circ$



3. إذا كان: ل > ٢ نق تكون شبكة المخروط كما هو موضح بالشكل وتكون $١٨٠^\circ < \theta < ٣٦٠^\circ$



مثال 2

في الشكل المقابل:

قطعة من الورق على شكل قطاع دائري مساحته ٢٥ π سم^2 وقياس زاويته المركزية يساوي ٩٠° طويت بحيث تلامس م أ ، م ب وتحولت إلى عبوة ورقية على شكل مخروط فأوجد ارتفاع العبوة لأقرب جزء من عشرة.





الحل

∵ مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ $\theta^{ء}$ نق^2 ∴ $\frac{1}{2}$ $\theta^{ء}$ نق^2 = ٢٥ π

∴ $\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \times$ نق^2 = ٢٥ π ∴ نق^2 = ١٠٠

∴ نق = ١٠ سم ∴ م أ = ١٠ سم

، ∵ مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ ل نق ∴ $\frac{1}{2}$ ل × ١٠ = ٢٥ π

∴ ل = ٥ π سم ∴ طول أ⌒ب = ٥ π سم

∴ محيط الدائرة ن = ٥ π سم ∴ ٢ π نق$_ر$ = ٥ π ∴ نق$_ر$ = ٢,٥ سم

∴ Δ م ن أ فيه: ق(∠ م ن أ) = ٩٠° ، ن أ = ٢,٥ سم ، م أ = ١٠ سم

∴ م ن = $\sqrt{(م أ)^2 - (ن أ)^2} = \sqrt{(١٠)^2 - (٢,٥)^2}$ = ٩,٧ سم

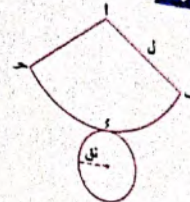
∴ ارتفاع العبوة = ٩,٧ سم

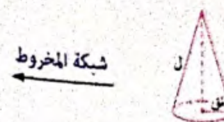
(المساحة الجانبية / الكلية - الحجم) للمخروط القائم

إذا كان (نق) طول نصف قطر دائرة قاعدة المخروط ، (ل) طول الراسم ، (ع) ارتفاع المخروط فإن :

- المساحة الجانبية للمخروط القائم = π ل نق
- المساحة الكلية للمخروط القائم = π نق (ل + نق)
- حجم المخروط القائم = $\frac{1}{3}$ π نق^2 ع

استنتاج المساحة الجانبية والكلية للمخروط القائم





شبكة المخروط

من شبكة المخروط القائم نستنتج أن :

المساحة الجانبية للمخروط القائم = مساحة القطاع أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ × طول $\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$ × أ ب

= $\frac{1}{2}$ × محيط قاعدة المخروط × أ ب

= $\frac{1}{2}$ × 2 π نق × ل = π ل نق

∴ **المساحة الجانبية للمخروط القائم = π ل نق**

∵ المساحة الكلية للمخروط القائم = المساحة الجانبية له + مساحة قاعدته = π ل نق + π نق^2

∴ **المساحة الكلية للمخروط القائم = π نق (ل + نق)**

استنتاج حجم المخروط القائم

تجربة عملية

- أحضر وعاء مفرغ على شكل أسطوانة دائرية قائمة ووعاء آخر على شكل مخروط دائرى قائم بحيث تكون قواعدهم متطابقة ولهما نفس الارتفاع كما بالشكل المقابل.
- املأ الوعاء المخروطى بحبات الأرز أو الرمل ثم قم بتفريغ ما به فى الأسطوانة.
- لاحظ أنه بتكرار هذه العملية ثلاث مرات فإن الأسطوانة سوف تمتلئ تمامًا بحبات الأرز أو الرمل.

وهذا يعنى أن حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ حجم الأسطوانة المتحدة معه فى القاعدة والارتفاع

، ∵ حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

∴ **حجم المخروط القائم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع = $\frac{1}{3}$ π نق^2 ع**

مثال ③

مخروط دائرى قائم طول قطر قاعدته ١٢ سم وارتفاعه ٨ سم

أوجد : [1] مساحته الجانبية. [2] مساحته الكلية. [3] حجمه.

الحل



∵ $\overline{\text{أ م}}$ ⊥ مستوى الدائرة ∴ $\overline{\text{أ م}}$ ⊥ $\overline{\text{م ب}}$

∴ Δ م أ ب قائم الزاوية فى م ، ∵ نق = $\frac{12}{2}$ = 6 سم

∴ أ ب = $\sqrt{(8)^2 + (6)^2}$ = 10 سم ∴ ل = 10 سم

∴ المساحة الجانبية = π نق ل = π × 6 × 10 = 60 π سم^2

، مساحة القاعدة = π نق^2 = 36 π سم^2 ∴ المساحة الكلية = 60 π + 36 π = 96 π سم^2

، حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ π نق^2 ع = $\frac{1}{3}$ × π × 36 × 8 = 96 π سم^3

مثال ④

باستخدام الشبكة التى أمامك صف المجسم

وإذا كان طول القوس $\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$ = 30 π سم

أوجد حجم المجسم ومساحته الكلية.

الحل

الشبكة لمخروط قائم



، ∵ طول $\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$ = 30 π

∴ 2 π نق = 30 π ∴ نق = 15 سم

، ∵ Δ أ ب م قائم الزاوية فى م

∴ ع = $\sqrt{(25)^2 - (15)^2}$ = 20 سم

∴ الحجم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع = $\frac{1}{3}$ × π × $(15)^2$ × 20 = 1500 π سم^3

، المساحة الكلية = π نق (ل + نق) = π × 15 × (25 + 15) = 600 π سم^2

مثال ⑤

دورق مخروطى الشكل سعته ٦,١٦ لتر ، ارتفاعه ٣٠ سم

أوجد طول نصف قطر قاعدته. ($\pi \approx \frac{22}{7}$)

الحل

∵ سعة الدورق = ٦,١٦ لتر

∴ حجم المخروط القائم = ٦,١٦ × ١٠٠٠ سم^{٣}

∴ $\frac{١}{٣} \times \frac{٢٢}{٧} \times$ نق$^{٢} \times ٣٠ = ٦١٦٠$ ∴ نق = ١٤ سم

تذكر أن: ١ لتر = ١٠٠٠ ملليلتر = ١٠٠٠ سم^{٣} = ١ ديسم^{٣}

مثال ٦

سبيكة من الذهب الخالص على هيئة مخروط قائم طول نصف قطر دائرته = ٣ سم ومساحته الجانبية = ١٥ π سم^{٢} أوجد كثافة الذهب إذا كانت كتلة السبيكة = ٧٢٧ جم ($\pi = ٣,١٤$)

الحل

∵ المساحة الجانبية للمخروط = ١٥ π

∴ π ل نق = ١٥ π ∴ π × ل × ٣ = ١٥ π

∴ ل = ٥ سم

، ∵ Δ أ ب م قائم الزاوية في م

∴ ع = أ م = $\sqrt{(٥)^{٢} - (٣)^{٢}}$ = ٤ سم

، ∵ حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع = $\frac{١}{٣} \times \pi \times (٣)^{٢} \times ٤ = ١٢\pi = ٣٧,٦٨$ سم^{٣}

∴ الكثافة = $\frac{\text{الكتلة}}{\text{الحجم}} = \frac{٧٢٧}{٣٧,٦٨} \simeq ١٩,٣$ جم/سم^{٣}

تذكر أن: الكثافة = $\frac{\text{الكتلة}}{\text{الحجم}}$

مثال ٧

هرم ثماني منتظم من الفضة ، طول ضلع قاعدته ٦ سم وارتفاعه ٣٠ سم صُهر وحول إلى مخروط دائري قائم ، طول نصف قطر قاعدته ٩ سم فإذا علم أن ١٠٪ من الفضة فُقد أثناء عمليتي الصهر والتحويل ، أوجد ارتفاع المخروط لأقرب رقم عشري واحد.

الحل

∵ مساحة الثماني المنتظم = $\frac{٨}{٤}$ س^{٢} ظتا $\frac{\pi}{٨}$

= ٢ × (٦)^{٢} ظتا ٢٢° ٣٠′

≃ ١٧٣,٨٢ سم^{٢}

∴ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع = $\frac{١}{٣} \times ١٧٣,٨٢ \times ٣٠ = ١٧٣٨,٢$ سم^{٣}

∴ حجم الفضة في المخروط = $\frac{٩٠}{١٠٠} \times ١٧٣٨,٢ \simeq ١٥٦٤,٤$ سم^{٣}

∴ $\frac{١}{٣} \pi \times (٩)^{٢} \times$ ع ≃ ١٥٦٤,٤ ∴ ع ≃ ١٨,٤ سم

تذكر أن: مساحة مضلع منتظم عدد أضلاعه = ن وطول ضلعه س تساوي $\frac{ن}{٤}$ س^{٢} ظتا $\frac{\pi}{ن}$

مثال ٨

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ فيه : أ ب = ١٥ متر ، أ جـ = ٢٠ متر فإذا دار المثلث دورة كاملة حول ب جـ صف المجسم الناتج ثم أوجد تكاليف طلاء هذا المجسم بمادة مقاومة لعوامل التعرية علمًا بأن تكاليف المتر المربع الواحد = ١٠ جنيهات ثم أوجد حجم هذا المجسم. ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

الحل

* المجسم يكون على هيئة مخروطين قائمين لهما قاعدة مشتركة.
* من هندسة الشكل : أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ

، أ د ⊥ ب جـ

∴ ب جـ = $\sqrt{(١٥)^{٢} + (٢٠)^{٢}}$ = ٢٥ متر

، أ د = $\frac{١٥ \times ٢٠}{٢٥}$ = ١٢ متر

، ب د = $\sqrt{(١٥)^{٢} - (١٢)^{٢}}$ = ٩ متر ، جـ د = ٢٥ − ٩ = ١٦ متر

بالنسبة للمخروط الأول الذي رأسه ب :

ل = ١٥ متر ، نق = ١٢ متر ، ع = ٩ متر

∴ المساحة الجانبية = π ل نق = π × ١٥ × ١٢ = ١٨٠ π متر مربع

، الحجم = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع = $\frac{١}{٣} \pi \times (١٢)^{٢} \times ٩ = ٤٣٢\pi$ متر مكعب

بالنسبة للمخروط الثاني الذي رأسه جـ :

ل = ٢٠ متر ، نق = ١٢ متر ، ع = ١٦ متر

∴ المساحة الجانبية = π ل نق = π × ٢٠ × ١٢ = ٢٤٠ π متر مربع

، الحجم = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع = $\frac{١}{٣} \pi \times (١٢)^{٢} \times ١٦ = ٧٦٨\pi$ متر مكعب

∴ المساحة الكلية التي سوف تُطلى = مجموع المساحتين الجانبيتين للمخروطين

= ١٨٠ π + ٢٤٠ π = ٤٢٠ π = ٤٢٠ × $\frac{٢٢}{٧}$ = ١٣٢٠ متر مربع

∴ تكلفة الطلاء = ١٣٢٠ × ١٠ = ١٣٢٠٠ جنيه

، حجم المجسم = مجموع حجمي المخروطين = ٤٣٢ π + ٧٦٨ π = ١٢٠٠ π

= ١٢٠٠ × $\frac{٢٢}{٧}$ = ٣٧٧١ $\frac{٣}{٧}$ متر مكعب.

تمارين 8 على المخروط



اختبر نفسك

📖 من أسئلة الكتاب المدرسي | مستويات عليا | تطبيق | فهم | تذكر

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① المخروط الدائرى القائم يمكن الحصول عليه عند طى ورقة على شكل ....

(أ) مثلث متساوى الأضلاع. (ب) مثلث قائم الزاوية.
(جـ) قطعة دائرية. (د) قطاع دائرى.

② أقل زاوية يمكن أن يدورها مثلث متساوى الساقين حول محور تماثله لينتج مخروط دائرى قائم هى ....

(أ) °٩٠ (ب) °١٨٠ (جـ) °٢٧٠ (د) °٦٠

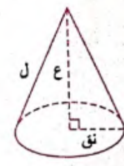
③ المخروط الدائرى القائم ينشأ من دوران مثلث قائم دورة كاملة حول ....

(أ) وتره. (ب) أحد ضلعى القائمة.
(جـ) أى مستقيم فى مستوى المثلث.
(د) مستقيم يمر بأحد رؤوسه ويوازى الضلع المقابل للرأس.

④ إذا قطع المخروط الدائرى القائم بمستوى يوازى قاعدته فالمقطع الناتج هو ....

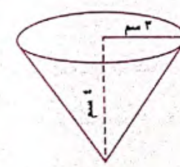
(أ) مثلث متساوى الساقين. (ب) مثلث متساوى الأضلاع.
(جـ) دائرة. (د) شبه منحرف.

⑤ 📖 المساحة الكلية (السطحية) للمخروط القائم تساوى ....



(أ) π نق ل (ب) $\frac{\pi}{2}$ نق^2 ع
(جـ) π نق (نق + ل) (د) $\frac{\pi}{2}$ نق (نق ع + ٢ ل)

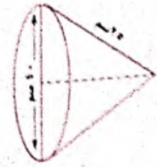
⑥ فى الشكل المقابل :



طول راسم المخروط = ... سم.

(أ) ٢ (ب) ٣
(جـ) ٤ (د) ٥

⑦ فى الشكل المقابل :



ارتفاع المخروط = ... سم.

(أ) ١٥ (ب) ٢٠
(جـ) ٢٥ (د) ٤٠

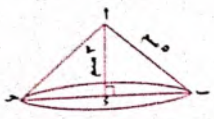
⑧ طول نصف قطر قاعدة مخروط دائرى قائم ارتفاعه ١٥ سم ، وطول راسمه ١٧ سم يساوى .... سم.

(أ) ١٠ (ب) ٨ (جـ) ٧ (د) ٩

⑨ مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ١٥ سم وارتفاعه ٢٠ سم فإن مساحته الجانبية = ... سم^2

(أ) ٣٧٥ π (ب) ٦٠٠ π (جـ) ١٥٠٠ π (د) ١٨٧٥ π

⑩ فى الشكل المقابل :



إذا كان : أء = ٣ سم ، أب = ٥ سم
فإن المساحة الكلية للمخروط = ... سم^2.

(أ) ٨ π (ب) ٢٤ π (جـ) ٤٨ π (د) ٣٦ π

⑪ إذا كان طول قطر قاعدة مخروط قائم ١٢ سم وارتفاعه ٨ سم ، فإن مساحته الجانبية تساوى .... سم^2.

(أ) ٦٠ π (ب) ٢٨ π (جـ) ١٠ π (د) ٤٨ π

⑫ مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٦ سم ومحيط قاعدته ١٦ π سم فإن مساحته الجانبية = ... سم^2

(أ) ١٤٤ π (ب) ٦٤ π (جـ) ٦٠ π (د) ٨٠ π

⑬ مخروط قائم طول راسمه يساوى طول قطر قاعدته فإن مساحته الكلية تساوى .... سم^2

(أ) ٢ π نق^2 (ب) ٣ π نق^2 (جـ) ٤ π نق^2 (د) ٤ π نق^3

⑭ 📖 مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٢٤ سم وطول راسمه ٢٦ سم فإن مساحة قاعدته .... سم^2

(أ) ٢٥ π (ب) ١٠٠ π (جـ) ٢٠ π (د) ٥٠ π

⑮ 📖 طول نصف قطر قاعدة مخروط دائرى قائم مساحته الكلية ٦١٦ π سم^2 وطول راسمه ٣٠ سم هو .... سم.

(أ) ٤٤ (ب) ١٤ (جـ) ٣٠ (د) ٣٤

⑯ 📖 غطاء مصباح على شكل مخروط قائم محيط قاعدته ٨٨ سم وارتفاعه ٢٠ سم فإن مساحته الجانبية ≃ .... سم^2. ($\pi = \frac{22}{7}$)

(أ) ٨٨ (ب) ٥٩٦ (جـ) ١٠٧٤ (د) ١٠٤٧

(١٧) مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ٦ سم وطول راسمه ١٠ سم فإن حجمه = ... سم؟

(أ) ٣٢ π (ب) ٦٤ π (ج) ٩٦ π (د) ٢٨٨ π

(١٨) مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٤ سم وطول راسمه ٥ سم يكون حجمه .... سم³

(أ) ٣٦ π (ب) ١٥ π (ج) ٢٤ π (د) ١٢ π

(١٩) أ ب ﺣ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه (ل) دار دورة كاملة حول ب ﺣ كمحور للدوران فإن حجم الجسم الناشئ من الدوران بدلالة π ، ل هو ....

(أ) $\frac{\pi ل}{٤}$ (ب) $\frac{\pi}{٤}ل^٢$ (ج) $\frac{\pi ل^٣}{٤}$ (د) $\sqrt{٣}\,\pi ل^٣$

(٢٠) مخروط قائم حجمه ٢٧ π سم³ ومحيط قاعدته ٦ π سم فإن ارتفاعه يساوى .... سم.

(أ) ٢٧ (ب) ١٨ (ج) ٩ (د) ٦

(٢١) مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ٥ سم ومساحته الكلية = ٩٠ π سم²
فإن حجمه = ... سم³

(أ) ١٠٥ π (ب) ٩٥ π (ج) ١٠٠ π (د) ١٢٠ π

(٢٢) حجم مخروط قائم طول راسمه = ١٥ سم ومساحته الكلية = ٢١٦ π سم² يساوى .... سم³

(أ) ٢٠٠ π (ب) ٢٢٠ π (ج) ٢٨٠ π (د) ٣٢٤ π

(٢٣) مخروط دائرى قائم طول راسمه ٢٥ سم ومساحته الجانبية ٥٥٠ سم²
فإن حجمه = ... سم³ حيث ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

(أ) ١٢٢٣ (ب) ١٢٣٢ (ج) ١٣٢٢ (د) ٣١٢٢

(٢٤) مخروط دائرى قائم حجمه ٩ π سم³ ، وطول نصف قطر قاعدته يساوى ارتفاعه فتكون مساحة قاعدته = ... سم²

(أ) ٩ π (ب) ٣ π (ج) ٢٧ π (د) ١٢ π

(٢٥) مخروط دائرى قائم حجمه ١٠٠ سم³ فإن حجمه عندما يتضاعف طول نصف قطر قاعدته = ... سم³

(أ) ١٠٠ (ب) ٢٠٠ (ج) ٣٠٠ (د) ٤٠٠

(٢٦) مخروط دائرى قائم إذا زاد طول نصف قطر قاعدته للضعف ، وقل ارتفاعه للنصف
فإن حجمه ....

(أ) يظل كما هو. (ب) يزداد للضعف.
(ج) يقل للنصف. (د) يزداد لأربعة أمثال.

(٢٧) مخروط قائم طول نصف قطر قاعدته = ضعف طول ارتفاعه = ٦ سم وهرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته = طول ارتفاعه = ٦ سم فإن نسبة حجم المخروط : حجم الهرم = ...

(أ) ٣ : π (ب) π : ٣ (ج) π : ٢ (د) ٢ : π

(٢٨) فى الشكل المقابل :

$\frac{\text{حجم المخروط}}{\text{حجم الأسطوانة}}$ = ...

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٣}$
(ج) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{٣}{١}$

(٢٩) فى الشكل المقابل :

هرم قائم منتظم ومخروط دائرى قائم مشتركان فى الرأس وقاعدة المخروط سطح دائرة تمس أضلاع قاعدة الهرم من الداخل

أولاً : المساحة الجانبية للمخروط القائم تساوى .... سم²

(أ) ٦٠ (ب) ٦٠ π (ج) ٤٨ (د) ٤٨ π

ثانياً : المساحة الكلية للهرم المنتظم تساوى .... سم²

(أ) ٣٦٠ (ب) ٢٤٠ (ج) ٣٨٤ (د) ٤٣٢

ثالثاً : حجم الهرم يساوى .... سم³

(أ) ٦٤ (ب) ٩٦ (ج) ٤٨٠ (د) ٣٨٤

رابعاً : النسبة بين حجم الهرم إلى حجم المخروط تساوى ....

(أ) π : ٢ (ب) ٤ : π (ج) π : ٤ (د) ٣ : π

خامساً : النسبة بين المساحة الجانبية للهرم إلى المساحة الجانبية للمخروط تساوى ....

(أ) π : ٢ (ب) ٤ : π (ج) π : ٤ (د) ٣ : π

(٣٠) الشبكة التى أمامك تصف مجسماً
حجمه = ... سم³

(أ) ٢٥ π (ب) ٥٠ π
(ج) ٧٥ π (د) ١٠٠ π

(٣١) الشبكة التي أمامك تصنع مجسمًا حجمه ٣٦ π سم³

فإن مساحة الكرة = ... سم²

(أ) ١٦ π (ب) ٣٢ π
(جـ) ٤٨ π (د) ٩٦ π



(٣٢) الشكل المقابل يمثل شبكة لمجسم فيه م ب = ٣ π ٣ سم

، ق (∠ أ م ب) = ١٢٠°

فإن حجم المجسم = ... سم³

(أ) $2\sqrt{2}\pi$ (ب) $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$
(جـ) $2\sqrt{2}\pi$ (د) $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$



(٣٣) في الشكل المقابل :

دائرة تم تقسيمها إلى قطاعين دائريين

بحيث تكون شبكتي مخروطين قائمين

فإن $\frac{\text{المساحة الجانبية للمخروط الأصغر}}{\text{المساحة الجانبية للمخروط الأكبر}}$ = ...

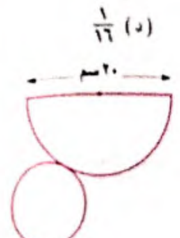
(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{4}$ (جـ) $\frac{1}{8}$ (د) $\frac{1}{16}$



(٣٤) إذا طوينا هذه الشبكة لتصبح مخروطًا

فإن طول نصف قطر قاعدته = ... سم.

(أ) ١٠ (ب) ٨
(جـ) ٥ (د) ٢,٥

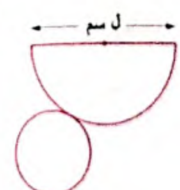


(٣٥) في الشكل المقابل :

إذا طوينا هذه الشبكة لتصبح مخروطًا

فإن طول نصف قطر قاعدته = ... سم.

(أ) $\frac{ل}{2}$ (ب) $\frac{ل}{3}$
(جـ) $\frac{ل}{4}$ (د) $\frac{ل}{5}$



(٣٦) الزاوية المركزية للقطاع الذي إذا طويناه أصبح المخروط الموضح تكون



(أ) حادة (ب) منفرجة (جـ) مستقيمة (د) منعكسة

(٣٧) القطاع الدائري الذي إذا طويناه أصبح مخروط دائري قائم طول راسمه ١٠ سم وطول نصف قطر قاعدته ٥ سم فإن الزاوية المركزية لهذا القطاع تكون

(أ) حادة (ب) منفرجة (جـ) مستقيمة (د) منعكسة

(٣٨) إذا كان لدينا ربع دائرة طول نصف قطرها ١٦ سم فإن طول نصف قطر قاعدة المخروط الذي يمكن تكوينه من قوس ربع الدائرة = ... سم

(أ) ١٦ (ب) ٨ (جـ) ٤ (د) ٢

(٣٩) مساحة قطاع دائري : المساحة الكلية للمخروط الدائري الذي يمكن تكوينه من طي هذا القطاع ....

(أ) < ١ (ب) > ١ (جـ) = ١ (د) ≤ ١

(٤٠) النسبة بين حجم هرم رباعي منتظم وحجم أصغر مخروط دائري يحتويه تساوي ....

(أ) ٢ : π (ب) ٤ : π (جـ) ٦ : π (د) ٨ : π

(٤١) في الشكل المقابل :

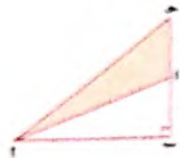
إذا كان : أ ب = ٢ سم ، ب ء = ء جـ = ١ سم

، ق (∠ أ ب جـ) = ٩٠° فإن حجم الجسم الناشئ

من دوران المنطقة المظللة دورة كاملة حول المحور $\overleftrightarrow{أ ب}$

يساوي ....

(أ) π (ب) ٢ π (جـ) ٣ π (د) ٤ π



(٤٢) في الشكل المقابل :

إذا كان : ظا هـ = $\frac{5}{12}$ ، أ ب = ٢٦ سم

فإن المساحة الجانبية للجسم الناشئ من دوران المثلث أ ب و

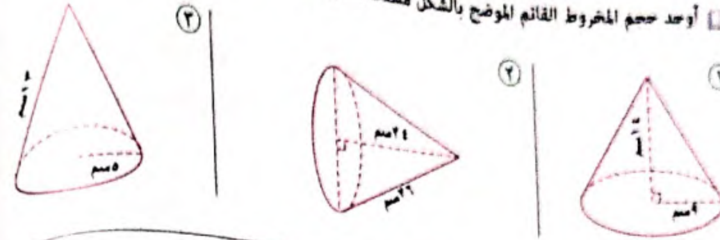
دورة كاملة حول محور السينات = ... π سم²

(أ) ٣٦٠ (ب) ٣٦٠ π (جـ) ٢٦٠ (د) ٣٦٠ π

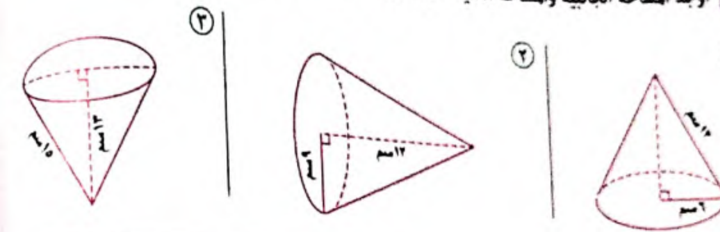


ثانيًا / الأسئلة المقالية

١ أوجد حجم المخروط القائم الموضح بالشكل مستخدمًا البيانات المعطاة :



٢ أوجد المساحة الجانبية والمساحة الكلية لكل مخروط قائم حسب البيانات المعطاة :



٣ مخروط دائرى قائم طول راسمه ١٧ سم وارتفاعه ١٥ سم أوجد :

① مساحته الجانبية. ② مساحته الكلية. ③ حجمه.

«١٣٦ π سم^٢ ، ٢٠٠ π سم^٢ ، ٣٢٠ π سم^٣»

٤ أوجد بدلالة π محيط ومساحة قاعدة مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٢٤ سم ، وطول راسمه ٢٦ سم

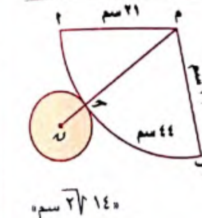
«٢٠ π سم ، ١٠٠ π سم^٢»

٥ يوضح الشكل المقابل

شبكة مخروط قائم

، مستعينًا بالبيانات المعطاة

، أوجد ارتفاعه. $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$



«١٤ $\sqrt{2}$ سم»

٦ الشكل المقابل يمثل شبكة لجسم

مخروط قائم مكونة من قطاع دائرى

مساحته ٢٠ π سم^٢

وطول قوسه $\overset{\frown}{\text{أ حـ ب}}$ = ٨ π سم

فأوجد ارتفاع المخروط.



«٣ سم»

٧ الشكل المقابل يمثل شبكة لجسم

صف المجسم الناتج من الطى

ثم أوجد ارتفاعه إذا علمت أن

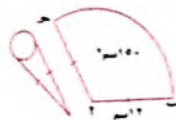
م أ = م ب = ٢٥ سم

، مساحة الدائرة ن = ٤٩ π سم^٢



«٢٤ سم»

٨ تغلف الألبان المثلجة فى مخروط دائرى قائم بطى قطعة من الورق العازل للحرارة على شكل قطاع دائرى طول نصف قطر دائرته ١٢ سم ومساحته ١٥٠ سم^٢ بحيث يتلامس نصفا قطرى دائرته $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ أوجد ارتفاع المخروط لأقرب جزء من عشرة.



«١١.٣ سم»

٩ أوجد لأقرب رقم عشرى واحد المساحة الكلية لمخروط قائم طول قطر قاعدته ١٠ سم وارتفاعه ١٢ سم

«٢٨٢.٧ سم^٢»

١٠ أوجد حجم مخروط دائرى قائم محيط قاعدته ٤٤ سم وارتفاعه ٢٥ سم

«١٢٨٣.٨ سم^٣»

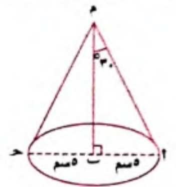
١١ فى الشكل المقابل :

مخروط دائرى قائم فيه :

ق(∠ أ م ب) = ٣٠°

، طول نصف قطر القاعدة = ٥ سم

احسب مساحته الجانبية والكلية.



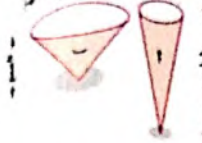
«٥٠ π سم^٢ ، ٧٥ π سم^٢»

١٢ مخروط دائرى قائم طول نصف قطر دائرته ٨ سم ومساحته الجانبية = ٩٦ π سم²

أوجد لأقرب رقم عشرى واحد حجم هذا المخروط.

«٩٩٫٥٠ سم³»

١٣ في الشكل المقابل :



أ ، ب كأسان للشراب

أيهما سعته أكبر ؟

أوجد الفرق بين سعتيهما.

«ب الأكبر ، $\frac{٣٢}{٣}$ π سم³»

١٤ في الشكل المقابل :



إذا كان : طا هـ = $\frac{٣}{٤}$

، ارتفاع المخروط = ١٢ سم

أوجد المساحة الكلية للمخروط.

«٢١٦ π سم²»

١٥ هندسة مدنية :



صهريج مياه على شكل مخروط قائم

، حجمه ٣٢ π م³ وارتفاعه ٦ م

أوجد طول نصف قطر قاعدته ومساحته الكلية.

«٤ م ، (١٦ + ٨√١٣) π م²»

١٦ أيهما أكبر حجمًا ؟ مخروط قائم طول نصف قطر قاعدته ١٥ سم وارتفاعه ٢٠ سم ، أم هرم رباعى منتظم ارتفاعه ٤٠ سم ومحيط قاعدته ٤٨ سم.

١٧ مخروط دائرى قائم ارتفاعه ع وحجمه π ع³ برهن أن مساحته الجانبية تساوى مساحة السطح الجانبى للأسطوانة القائمة المتحدة معه فى القاعدة والارتفاع.

١٨ الربط بالفيزياء : إناء أسطوانى الشكل به ماء ، غمر فيه جسم معدنى على شكل مخروط قائم ، ارتفاعه ١٢ سم وطول نصف قطر قاعدته ٢ سم غمرًا كاملًا ، فارتفع سطح الماء فى الإناء بمقدار ١ سم.

أوجد طول قطر قاعدة الإناء.

«٨ سم»

١٩ مكعب من الشمع طول حرفه ٢٠ سم صُهر وحُوِّل إلى مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٢١ سم ، أوجد طول نصف قطر قاعدة المخروط إذا علم أن ١٢ ٪ من الشمع فقد أثناء عمليتى الصهر والتحويل $(\pi = \frac{٢٢}{٧})$

«٨√١٠ سم»

٢٠ دورق مخروطى الشكل سعته ٢٫٢ لتر وارتفاعه ٢١ سم أوجد طول نصف قطر قاعدته $(\pi = \frac{٢٢}{٧})$

«١٠ سم»

٢١ قطاع دائرى م أ ب طول نصف قطر دائرته ١٨ سم وقياس زاويته المركزية ٦٠° طوى ولصق نصفا قطره ليكون أكبر مساحة جانبية لمخروط قائم. أوجد حجم هذا المخروط.

«[illegible] سم³»

٢٢ أ م ب ربع دائرة مركزها م ونصف قطرها ٢٠ سم حولت إلى سطح مخروطى دائرى قائم رأسه (م) حيث انطبق م‾أ على م‾ب أوجد نصف قطر قاعدة المخروط وكذا حجمه بدلالة π.

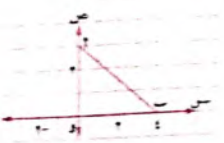
«٥ سم ، $\frac{١٢٥\sqrt{١٥}}{٣}$ π سم³»

٢٣ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه : أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران Δ أ ب حـ دورة كاملة حول

① ب حـ ② أ حـ

«٩٦ π سم³ ، ٧٦٫٨ π سم³»

٢٤ يوضح الشكل المقابل مستوى إحداثى متعامد



، احسب بدلالة π حجم الجسم الناشئ عن دوران المثلث أ ب و ، دورة كاملة حول :

① محور السينات.

② محور الصادات.

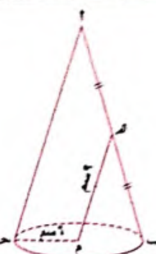
«١٢ π وحدة مكعبة ، ١٦ π وحدة مكعبة»

٢٥ أ ب حـ مثلث متساوى الساقين فيه : أ ب = أ حـ = ١٠ سم ، ب حـ = ١٢ سم دار دورة كاملة حول قاعدته ب‾حـ احسب حجم الجسم الناشئ من الدوران.

«٢٥٦ π سم³»

٢٦ في الشكل المقابل :

أوجد المساحة الجانبية والكلية والحجم للمخروط الدائرى القائم.



«١٠٨٠ π سم² ، ١٤٤ π سم² ، ١٤٤ √٣ π سم³»

٢٧ ملاحة بحرية :

يوضح الشكل المقابل علامة إرشادية (شمندورة) لتحديد المجرى الملاحي ، وهي على هيئة مخروطين قائمين لهما قاعدة مشتركة أوجد تكاليف طلائه بمادة مقاومة لعوامل التعرية ، علمًا بأن تكاليف المتر المربع الواحد منها ٣٠٠ جنيه.



«٩٩٠٠ جنيهًا»

٢٨ الربط بالصناعة . هرم خماسي منتظم من النحاس، طول ضلع قاعدته ١٠ سم ، وارتفاعه ٤٢ سم ، صهر وحول إلى مخروط دائري قائم ، طول نصف قطر قاعدته ١٥ سم فإذا علم أن ١٠ ٪ من النحاس فُقد أثناء عمليتي الصهر والتحويل ، أوجد ارتفاع المخروط لأقرب رقم عشري واحد. «٩.٢ سم»

٢٩ تفكير إبداعي : مخروط دائري قائم حجمه ١٠٠ سم^3 أوجد حجمه عندما :

(١) يتضاعف ارتفاعه. (٢) يتضاعف طول نصف قطره.

(٣) يتضاعف ارتفاعه وطول نصف قطره. ماذا تستنتج ؟ فسر إجابتك. «٢٠٠ سم^3 ، ٤٠٠ سم^3 ، ٨٠٠ سم^3»

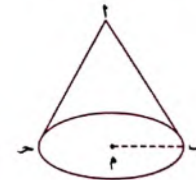
ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان حجم نصف كرة طول نصف قطرها (نق) يساوي حجم مخروط طول نصف قطر قاعدته (نق) وارتفاعه (ع) فإن : ....

(أ) ع = $\frac{2}{3}$ نق (ب) ع = ٢ نق (ج) ع = ٢ نق^2 (د) ع = ٤ نق

(٢) في الشكل المقابل :



مخروط دائري قائم حجمه ٩٦ π سم^3 وكان : $\frac{م ب}{أ ب} = \frac{3}{5}$

فإن المساحة الكلية = ... سم^2

(أ) ٢٤ π (ب) ٤٨ π

(ج) ٩٦ π (د) ١٩٢ π

(٣) طول قوس القطاع الدائري الذي إذا طوي أصبح مخروطًا دائريًا قائمًا حجمه ٤٩ π سم^3 وارتفاعه ٣ سم يساوي .... سم

(أ) ٢ π (ب) ٤ π (ج) ٨ π (د) ١٤ π

(٤) في الشكل المقابل :



إذا رسم مستوى عمودي على محور المخروط قطعه في منتصف م ن فإن :

أولًا : $\frac{\text{حجم المخروط الأصغر}}{\text{حجم المخروط الأكبر}}$ =

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{4}$

(ج) $\frac{1}{8}$ (د) $\frac{1}{16}$

ثانيًا : $\frac{\text{المساحة الجانبية للمخروط الأصغر}}{\text{المساحة الجانبية للمخروط الأكبر}}$ =

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{4}$ (ج) $\frac{1}{8}$ (د) $\frac{1}{16}$

(٥) النسبة بين حجم هرم ثلاثي منتظم وحجم أكبر مخروط دائري قائم يمكن وضعه بداخل الهرم تساوي ....

(أ) $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$ (ب) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$ (ج) $\frac{\sqrt{3}}{\pi}$ (د) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$

(٦) النسبة بين حجم هرم ثلاثي منتظم وحجم أصغر مخروط دائري قائم يحتويه تساوي

(أ) $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$ (ب) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$ (ج) $\frac{\sqrt{3}}{\pi}$ (د) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$

(٧) مخروط دائري قائم حجمه (ح) ، إذا زاد طول نصف قطر قاعدته بنسبة ٥٠٪ ، وزاد ارتفاعه بنسبة ٥٠٪ وكان حجمه بعد الزيادة (حَ) فإن : ....

(أ) حَ = ١٥٠٪ ح (ب) حَ = ٢٢٥٪ ح

(ج) حَ = ٣٣٧.٥٪ ح (د) حَ = ٤٥٠٪ ح

٢ فى الشكل المقابل :

معادلة المستقيم $ل_١$ هى : $٣ س - \sqrt{٣} ص + ٦ = ٠$

ومعادلة المستقيم $ل_٢$ هى : $\sqrt{٣} س + ص - ٢ \sqrt{٣} = ٠$

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المثلث أ ب حـ

دورة كاملة حول محور السينات.

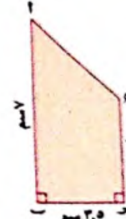


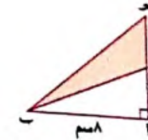
«١٦π وحدة مكعبة»

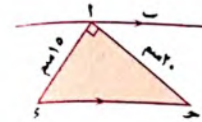
---

٣ أوجد حجم الجسم الناشئ عن دوران المساحة المظللة دورة كاملة حول $\overline{أ ب}$ كمحور

للدوران فى كل من الأشكال التالية :

① 

② 

③ 

«١٩٢,٤ ، ٢٢٦,٢ ، ٧٥٣٩,٨ $سم^٣$»

الدرس 4 الـــدائـــرة

تعريف الدائرة

هى مجموعة نقط المستوى التى تكون على بُعد ثابت من نقطة ثابتة فى المستوى.

* تسمى النقطة الثابتة مركز الدائرة (م)
* يسمى البعد الثابت طول نصف قطر الدائرة (نق)
* نرمز للدائرة بالرمز (د) حيث د = {أ : م أ = نق ، نق > ٠}



أولاً معادلة الدائرة (بدلالة إحداثيى مركزها وطول نصف قطرها)

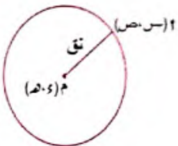
إذا كانت أ = (س ، ص) نقطة ما على الدائرة التى

مركزها النقطة م (ء ، هـ) وطول نصف قطرها = نق

فى مستوى إحداثى متعامد

وباستخدام قانون البعد بين نقطتين نجد أن :

$$\sqrt{(س - ء)^٢ + (ص - هـ)^٢} = نق$$



أى أن $(س - ء)^٢ + (ص - هـ)^٢ = نق^٢$ «معادلة الدائرة»

ملاحظـات

1. إذا كان مركز الدائرة هو نقطة الأصل (٠ ، ٠)

فإن معادلة الدائرة هى : س^{2} + ص^{2} = نق^{2}

2. وضع النقطة (س$_{1}$ ، ص$_{1}$) بالنسبة للدائرة د : (س − ء)^{2} + (ص − هـ)^{2} = نق^{2}

- إذا كان : (س$_{1}$ − ء)^{2} + (ص$_{1}$ − هـ)^{2} = نق^{2} فإن النقطة تقع على الدائرة.
- إذا كان : (س$_{1}$ − ء)^{2} + (ص$_{1}$ − هـ)^{2} > نق^{2} فإن النقطة تقع خارج الدائرة.
- إذا كان : (س$_{1}$ − ء)^{2} + (ص$_{1}$ − هـ)^{2} < نق^{2} فإن النقطة تقع داخل الدائرة.

3. تتطابق الدائرتان إذا تساوى طولا نصفى قطريهما.

فمثلًا : إذا كانت معادلة الدائرة د$_{1}$ هى : س^{2} + ص^{2} = ٤٩

، معادلة الدائرة د$_{2}$ هى : (س − ٣)^{2} + (ص − ٤)^{2} = ٤٩

فإن : نق$_{1}$ = نق$_{2}$ = $\sqrt{٤٩}$ = ٧ وحدة طولية. أى أن : الدائرتين متطابقتان.

- ونلاحظ أن : الدائرة د$_{2}$ هى صورة الدائرة د$_{1}$ بالانتقال (٣ ، ٤)

حيث إن صورة النقطة (س ، ص) بالانتقال (أ ، ب) هى : (س + أ ، ص + ب)

ثانيًا الصورة العامة لمعادلة الدائرة

الصورة العامة لمعادلة الدائرة هى :

س^{2} + ص^{2} + ٢ ل س + ٢ ك ص + حـ = ٠

حيث المركز (م) = (− ل ، − ك) = (− $\frac{1}{2}$ معامل س ، − $\frac{1}{2}$ معامل ص)

، نق = $\sqrt{\text{ل}^{2} + \text{ك}^{2} - \text{حـ}}$ ، ل^{2} + ك^{2} − حـ > ٠ .

فمثلًا :

الدائرة التى معادلتها هى : س^{2} + ص^{2} + ٨ س − ٤ ص − ١٦ = ٠ .

يكون مركزها = (− $\frac{1}{2}$ معامل س ، − $\frac{1}{2}$ معامل ص) = (−٤ ، ٢)

، نق = $\sqrt{\text{ل}^{2} + \text{ك}^{2} - \text{حـ}}$ = $\sqrt{١٦ + ٤ - (-١٦)}$ = ٦ وحدة طولية.

- يمكن استنتاج الصورة العامة لمعادلة الدائرة كما يلى

نعلم أن معادلة الدائرة التى مركزها (ء ، هـ) ، طول نصف قطرها = نق هى (س − ء)^{2} + (ص − هـ)^{2} = نق^{2}

أى أن س^{2} + ص^{2} − ٢ ء س − ٢ هـ ص + ء^{2} + هـ^{2} − نق^{2} = ٠ .

وبوضع م = (ء ، هـ) = (− ل ، − ك)

∴ س^{2} + ص^{2} + ٢ ل س + ٢ ك ص + ل^{2} + ك^{2} − نق^{2} = ٠ .

، ∵ ل ، ك ، نق ثوابت ∴ ل^{2} + ك^{2} − نق^{2} = حـ (ثابت)

∴ الصورة العامة لمعادلة الدائرة هى : س^{2} + ص^{2} + ٢ ل س + ٢ ك ص + حـ = ٠ .

ملاحظـات

1. الصورة العامة لمعادلة الدائرة : س^{2} + ص^{2} + ٢ ل س + ٢ ك ص + حـ = ٠ تتصف بالآتى :
   - معادلة من الدرجة الثانية فى س ، ص
   - خالية من الحد المشتمل على س ص **أى أن** معامل س ص = ٠ .
   - معامل س^{2} = معامل ص^{2} = ١
2. لكى تمثل معادلة الدرجة الثانية فى س ، ص دائرة حقيقية يلزم تحقق الشروط الثلاثة السابقة وأن يكون : ل^{2} + ك^{2} − حـ > ٠ .
3. عند تعيين مركز أو طول نصف قطر دائرة من معادلتها العامة يجب أن يكون معامل س^{2} = معامل ص^{2} = ١ لذلك يلزم أولًا القسمة على هذا المعامل إذا كان خلاف الوحدة.

حالات خاصة

1 معادلة الدائرة المارة بنقطة الأصل هى :

س^{2} + ص^{2} + ٢ ل س + ٢ ك ص = ٠ المعادلة خالية من الحد المطلق أى (حـ = ٠)

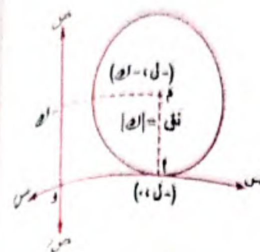
2 معادلة الدائرة التى مركزها يقع على محور السينات هى :

س^{2} + ص^{2} + ٢ ل س + حـ = ٠ المعادلة خالية من الحد المشتمل على ص أى (ك = ٠)

3 معادلة الدائرة التى مركزها يقع على محور الصادات هى :

س^{2} + ص^{2} + ٢ ك ص + حـ = ٠ المعادلة خالية من الحد المشتمل على س أى (ل = ٠)

٤ معادلة الدائرة التى تمس محور السينات :



إذا مست الدائرة التى مركزها (- ل ، - ك)

محور السينات فإن

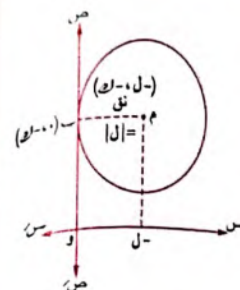
نقطة التماس أ هى : (- ل ، ٠)

ويكون نق = |ك|

∴ حـ = ل^2 + ك^2 - نق^2 = ل^2 + ك^2 - ك^2 = ل^2

وتصبح معادلة الدائرة على الصورة : س^2 + ص^2 + ٢ ل س + ٢ ك ص + ل^2 = ٠

٥ معادلة الدائرة التى تمس محور الصادات :



إذا مست الدائرة التى مركزها (- ل ، - ك)

محور الصادات فإن :

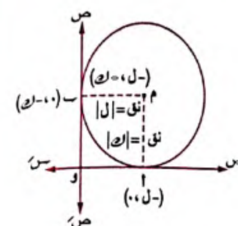
نقطة التماس ب هى : (٠ ، - ك)

ويكون نق = |ل|

∴ حـ = ل^2 + ك^2 - نق^2 = ل^2 + ك^2 - ل^2 = ك^2

وتصبح معادلة الدائرة على الصورة : س^2 + ص^2 + ٢ ل س + ٢ ك ص + ك^2 = ٠

٦ معادلة الدائرة التى تمس المحورين :



إذا مست الدائرة التى مركزها (- ل ، - ك) المحورين

فإن : نق = |ل| = |ك|

∴ حـ = ل^2 + ك^2 - نق^2 = نق^2 + نق^2 - نق^2 = نق^2

∴ حـ = ل^2 = ك^2 = نق^2

وتصبح معادلة الدائرة على الصورة :

س^2 + ص^2 + ٢ ل س + ٢ ك ص + حـ = ٠

حيث : |ل| = |ك| = نق ، حـ = ل^2 = ك^2 = نق^2

تذكر أن

١ وضع مستقيم ل بالنسبة للدائرة د والتى مركزها (م) ويفرض أن م‌حـ ⊥ ل ويقطعه فى حـ

- إذا كان : م حـ < نق فإن : ل قاطع للدائرة فى نقطتين مختلفتين.
- إذا كان : م حـ = نق فإن : ل مماس للدائرة.
- إذا كان : م حـ > نق فإن : ل خارج الدائرة ولا يقطعها فى أى نقطة.

٢ إذا كانت م ، ن دائرتين طولا نصفى قطريهما نق$_1$ ، نق$_2$ على الترتيب (حيث نق$_1$ > نق$_2$)

إذا كانت الدائرتان م ، ن	فإن
(١) متباعدتين	م ن > نق$_1$ + نق$_2$
(٢) متماستين من الخارج	م ن = نق$_1$ + نق$_2$
(٣) متقاطعتين	نق$_1$ - نق$_2$ < م ن < نق$_1$ + نق$_2$
(٤) متماستين من الداخل	م ن = نق$_1$ - نق$_2$
(٥) متداخلتين	م ن < نق$_1$ - نق$_2$
(٦) متحدتى المركز	م ن = صفر

٣ المماس للدائرة يكون عموديًا على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس.

٤ المماسان لدائرة المرسومان من نهايتى قطر فيها متوازيان.

٥ القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج دائرة متساويتان فى الطول.

٦ إذا كانت : أ = (س$_1$ ، ص$_1$) ، ب = (س$_2$ ، ص$_2$)

فإن : نقطة منتصف $\overline{\text{أب}}$ = ($\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{2}$ ، $\frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{2}$)

٧ معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (س$_1$ ، ص$_1$) وميله = م هى : $\frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1}$ = م

٨ طول العمود المرسوم من النقطة (س$_1$ ، ص$_1$) على المستقيم الذى معادلته :

أ س + ب ص + حـ = ٠ يساوى $\frac{|\text{أ س}_1 + \text{ب ص}_1 + \text{حـ}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}}$

مثال ١

أوجد الصورة العامة لمعادلة الدائرة التى مركزها النقطة (−٢ ، ٣) وطول نصف قطرها ٥ وحدات طولية.

الحل

معادلة الدائرة هى : $(\text{س} + ٢)^{٢} + (\text{ص} - ٣)^{٢} = (٥)^{٢}$

أى : $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} + ٤\,\text{س} - ٦\,\text{ص} - ١٢ = ٠$ «بعد الفك والتبسيط»

حل آخر :

∵ ل = ٢ ، ك = −٣ ، $\text{ح} = \text{ل}^{٢} + \text{ك}^{٢} - \text{نق}^{٢} = (٢)^{٢} + (-٣)^{٢} - (٥)^{٢} = -١٢$

∴ الصورة العامة لمعادلة الدائرة هى :

$\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} + ٤\,\text{س} - ٦\,\text{ص} - ١٢ = ٠$ «وهى نفس الصورة التى حصلنا عليها سابقًا»

مثال ٢

أوجد معادلة الدائرة التى مركزها نقطة الأصل وطول قطرها $٦\sqrt{٢}$ وحدة طولية ثم أثبت أنها تمر بالنقطة $(\sqrt{٢} ، -٤)$

الحل

معادلة الدائرة هى : $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = (٣\sqrt{٢})^{٢}$ أى : $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ١٨$

وبالتعويض بالنقطة $(\sqrt{٢} ، -٤)$ فى الطرف الأيمن للمعادلة

∴ $(\sqrt{٢})^{٢} + (-٤)^{٢} = ١٨$ = الطرف الأيسر

∴ النقطة $(\sqrt{٢} ، -٤) \in$ الدائرة.

مثال ٣

أوجد معادلة الدائرة التى مركزها م = (٣ ، −٢) وتمر بالنقطة أ = (−١ ، ١)

الحل

نق = م أ = $\sqrt{(٣ + ١)^{٢} + (-٢ - ١)^{٢}} = ٥$ وحدة طولية

∴ معادلة الدائرة هى : $(\text{س} - ٣)^{٢} + (\text{ص} + ٢)^{٢} = ٢٥$

مثال ٤

أوجد معادلة الدائرة التى قطرها $\overline{\text{أب}}$ حيث أ = (٤ ، −١) ، ب = (−٢ ، ١)

الحل

∵ مركز الدائرة م هو نقطة منتصف $\overline{\text{أب}}$ ∴ م = $\left(\frac{٤ - ٢}{٢} ، \frac{-١ + ١}{٢}\right) = (١ ، ٠)$

، ∵ نق = م أ = $\sqrt{(٤ - ١)^{٢} + (-١ - ٠)^{٢}} = \sqrt{١٠}$ وحدة طولية

∴ معادلة الدائرة هى : $(\text{س} - ١)^{٢} + (\text{ص} - ٠)^{٢} = (\sqrt{١٠})^{٢}$

أى : $(\text{س} - ١)^{٢} + \text{ص}^{٢} = ١٠$

مثال ٥

أوجد مركز وطول نصف قطر كل من الدوائر الآتية :

١ $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - ٢\,\text{س} + ٤\,\text{ص} - ٤ = ٠$

٢ $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - ٤\,\text{ص} - ٩ = ٠$

٣ $٧\,\text{س}^{٢} + ٧\,\text{ص}^{٢} + ٤٢\,\text{س} - ١٤\,\text{ص} + ٢٨ = ٠$

الحل

١ ∵ $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - ٢\,\text{س} + ٤\,\text{ص} - ٤ = ٠$ ∴ ل = −١ ، ك = ٢ ، ح = −٤

∴ المركز = (−ل ، −ك) = (١ ، −٢)

، نق = $\sqrt{\text{ل}^{٢} + \text{ك}^{٢} - \text{ح}} = \sqrt{(-١)^{٢} + (٢)^{٢} - (-٤)} = ٣$ وحدة طولية

٢ ∵ $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - ٤\,\text{ص} - ٩ = ٠$

∴ ل = صفر ، ك = −٢ ، ح = −٩

∴ المركز = (−ل ، −ك) = (٠ ، ٢)

، نق = $\sqrt{\text{ل}^{٢} + \text{ك}^{٢} - \text{ح}} = \sqrt{(٠)^{٢} + (-٢)^{٢} - (-٩)} = \sqrt{١٣}$ وحدة طولية.

> **لاحظ أن**
> ل = صفر لأن معامل س = ٠

٣ بالقسمة على ٧ لنجعل معامل $\text{س}^{٢}$ = معامل $\text{ص}^{٢}$ = ١

∴ تصبح المعادلة على الصورة : $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} + ٦\,\text{س} - ٢\,\text{ص} + ٤ = ٠$

∴ ل = ٣ ، ك = −١ ، ح = ٤ ∴ المركز = (−ل ، −ك) = (−٣ ، ١)

، نق = $\sqrt{\text{ل}^{٢} + \text{ك}^{٢} - \text{ح}} = \sqrt{(٣)^{٢} + (-١)^{٢} - ٤} = \sqrt{٦}$ وحدة طولية.

مثال ٦

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٣ ، −٤) وتمس محور السينات.

الحـل

∵ $ل = -3$ ، $ك = 4$ ، ∵ الدائرة تمس محور السينات ∴ $نق = |ك|$ ، $ح = ل^2$

∴ $نق = 4$ وحدة طولية ، $ح = 9$ ويمكن حساب ح من العلاقة $ح = ل^2 + ك^2 - نق^2$

∴ معادلة الدائرة هي $س^2 + ص^2 - 6س + 8ص + 9 = 0$

مثال ٧

أوجد معادلة الدائرة التي طول نصف قطرها ٥ وحدات وتمس محور الصادات عند النقطة (٠ ، ٣)

الحـل

∵ الدائرة تمس محور الصادات عند (٠ ، ٣)

∴ المركز = (−ل ، ٣) ، نق = |ل| وحدة طولية أي أن $|ل| = 5$

∴ $ل = \pm 5$ ، $ح = ك^2 = 9$

∴ توجد دائرتان إحداهما مركزها (−٥ ، ٣) ومعادلتها: $س^2 + ص^2 + 10س - 6ص + 9 = 0$

والأخرى مركزها (٥ ، ٣) ومعادلتها $س^2 + ص^2 - 10س - 6ص + 9 = 0$

مثال ٨

أوجد معادلة الدائرة التي تمس المحورين ومركزها النقطة (−٤ ، ٤)

الحـل

∵ الدائرة تمس المحورين ∴ $ح = ل^2 = ك^2 = 16$

∴ المعادلة هي $س^2 + ص^2 + 8س - 8ص + 16 = 0$

مثال ٩

بيّن أي المعادلات الآتية تُعبر عن دائرة:

١ $س^2 + 3ص^2 - 2س + 4ص + 5 = 0$

٢ $2س^2 - س ص + 2ص^2 + 5س - ص - 2 = 0$

٣ $س^2 + ص^2 + 7س - ص + 8 = 0$

٤ $2س^2 + 2ص^2 - 6س + 4ص + 9 = 0$

٥ $س^2 + ص^2 - 16س + 12ص + 100 = 0$

٦ $س^2 + 6س - 8ص - 7 = 0$

الحـل

١ ∵ معامل $س^2$ ≠ معامل $ص^2$ ∴ المعادلة لا تعبر عن دائرة.

٢ ∵ المعادلة تشتمل على الحد س ص ∴ المعادلة لا تعبر عن دائرة.

٣ ∵ معامل $س^2$ = معامل $ص^2$ والمعادلة خالية من س ص

∴ المعادلة يمكن أن تعبر عن دائرة

، ∵ $2ل = 7$ ، $2ك = -1$ ∴ $ل = \frac{7}{2}$ ، $ك = -\frac{1}{2}$ ، $ح = 8$

∴ $ل^2 + ك^2 - ح = \frac{49}{4} + \frac{1}{4} - 8 = \frac{9}{2} > 0$

∴ المعادلة تعبر عن دائرة مركزها $\left(-\frac{7}{2} ، \frac{1}{2}\right)$ ، $نق = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ وحدة طولية.

٤ ∵ معامل $س^2$ = معامل $ص^2$ والمعادلة خالية من س ص

∴ المعادلة يمكن أن تعبر عن دائرة

وبالضرب في $\frac{1}{2}$ لجعل معامل $س^2$ = معامل $ص^2$ = ١

∴ $س^2 + ص^2 - 3س + 2ص + \frac{9}{2} = 0$

∴ $2ل = -3$ ، $2ك = 2$ ∴ $ل = -\frac{3}{2}$ ، $ك = 1$ ، $ح = \frac{9}{2}$

∴ $ل^2 + ك^2 - ح = \frac{9}{4} + 1 - \frac{9}{2} = -\frac{5}{4} < 0$

∴ المعادلة لا تعبر عن دائرة.

٥ ∵ معامل $س^2$ = معامل $ص^2$ والمعادلة خالية من س ص

∴ المعادلة يمكن أن تعبر عن دائرة ∴ $2ل = -16$ ، $2ك = 12$

∴ $ل = -8$ ، $ك = 6$ ، $ح = 100$

∴ $ل^2 + ك^2 - ح = 64 + 36 - 100 =$ صفر ∴ المعادلة لا تعبر عن دائرة.

٦ ∵ المعادلة خالية من $ص^2$ ∴ المعادلة لا تعبر عن دائرة.

مثال ١٠

أوجد معادلة الدائرة التي طول نصف قطرها = ٣ وحدات ومعادلتا قطرين فيها هما:

$س + ص = 2$ ، $2س - ص = 7$

الحـــل

مركز الدائرة هو نقطة تقاطع المستقيمين : س + ص = ٢ (١)

، ٢ س − ص = ٧ (٢)

بالجمع : ∴ ٣ س = ٩ ∴ س = ٣

وبالتعويض : ∴ ص = −١ ∴ المركز هو النقطة (٣ ، −١)

∴ ل = −٣ ، ك = ١ ، حـ = $ل^{٢} + ك^{٢} − نق^{٢}$ = ٩ + ١ − ٩ = ١

∴ معادلة الدائرة هى : $س^{٢} + ص^{٢}$ − ٦ س + ٢ ص + ١ = ٠

مثال ⑪

دائرة مركزها م = (−٢ ، ٧) وطول نصف قطرها نق = ٥ وحدات. بيِّن أى النقط الآتية يقع على الدائرة وأيها يقع داخلها وأيها يقع خارجها : أ = (−١ ، ٣) ، ب = (٠ ، −٥) ، حـ = (٢ ، ٤)

الحـــل

∵ معادلة الدائرة هى : $(س + ٢)^{٢} + (ص − ٧)^{٢}$ = ٢٥

وبالتعويض بالنقط أ ، ب ، حـ فى الطرف الأيمن للمعادلة.

∵ $(−١ + ٢)^{٢} + (٣ − ٧)^{٢}$ = ١٧ < $نق^{٢}$ ∴ النقطة أ (−١ ، ٣) تقع داخل الدائرة

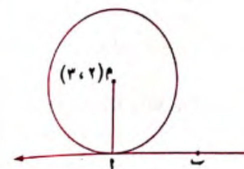
، ∵ $(٠ + ٢)^{٢} + (−٥ − ٧)^{٢}$ = ١٤٨ > $نق^{٢}$ ∴ النقطة ب (٠ ، −٥) تقع خارج الدائرة

، ∵ $(٢ + ٢)^{٢} + (٤ − ٧)^{٢}$ = ٢٥ = $نق^{٢}$ ∴ النقطة حـ (٢ ، ٤) تقع على الدائرة.

مثال ⑫

أوجد معادلة الدائرة التى مركزها م = (٢ ، ٣) والمستقيم ٣ س + ٤ ص + ٢ = ٠ مماس لها عند النقطة أ

الحـــل



∵ $\overline{مأ}$ نصف قطر ، $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة ∴ $\overline{مأ} \perp \overline{أب}$

∴ م أ = $\frac{|٣ \times ٢ + ٤ \times ٣ + ٢|}{\sqrt{(٣)^{٢} + (٤)^{٢}}}$ = ٤ وحدة طولية

∴ نق = ٤ وحدة طولية

∴ معادلة الدائرة هى : $(س − ٢)^{٢} + (ص − ٣)^{٢}$ = ١٦

مثال ⑬

حدد موضع الدائرة $د_{١}$: $(س − ٣)^{٢} + (ص − ٢)^{٢}$ = ٤

بالنسبة للدائرة $د_{٢}$: $س^{٢} + ص^{٢}$ + ٢ س + ٢ ص + ١ = ٠ .

الحـــل

∵ $د_{١}$: $(س − ٣)^{٢} + (ص − ٢)^{٢}$ = ٤ ∴ المركز $م_{١}$ = (٣ ، ٢)

، $نق_{١}$ = $\sqrt{٤}$ = ٢ وحدة طولية

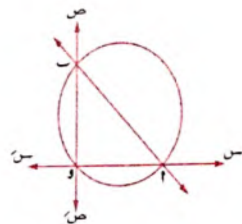
، ∵ $د_{٢}$: $س^{٢} + ص^{٢}$ + ٢ س + ٢ ص + ١ = ٠ ∴ المركز $م_{٢}$ = (−١ ، −١)

، $نق_{٢}$ = $\sqrt{١ + ١ − ١}$ = ١ وحدة طولية ∴ $نق_{١} + نق_{٢}$ = ٢ + ١ = ٣ وحدة طولية

، $م_{١}م_{٢}$ = $\sqrt{(٣ + ١)^{٢} + (٢ + ١)^{٢}}$ = ٥ وحدة طولية

∴ $م_{١}م_{٢} > نق_{١} + نق_{٢}$ ∴ الدائرتان متباعدتان.

مثال ⑭



فى الشكل المقابل :

إذا كانت معادلة $\overleftrightarrow{أب}$ هى :

٦ س + ٨ ص − ٤٨ = ٠

ويقطع محورى الإحداثيات فى النقطتين أ ، ب

أوجد معادلة الدائرة التى تمر بالنقط أ ، و ، ب

الحـــل

∵ ق(∠ أ و ب) = ٩٠° ∴ $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة

، ∵ معادلة $\overleftrightarrow{أب}$ هى : ٦ س + ٨ ص = ٤٨

أى أن : $\frac{س}{٨} + \frac{ص}{٦}$ = ١

∴ المستقيم يقطع محور السينات فى النقطة أ = (٨ ، ٠) ، يقطع محور الصادات فى النقطة ب = (٠ ، ٦)

وبفرض أن م مركز الدائرة ∴ م منتصف $\overline{أب}$ = $\left(\frac{٨ + ٠}{٢} ، \frac{٠ + ٦}{٢}\right)$ = (٤ ، ٣)

، ∵ أ ب = $\sqrt{(٨)^{٢} + (٦)^{٢}}$ = ١٠ وحدة طولية.

∴ نق = ٥ وحدة طولية ∴ معادلة الدائرة هى : $(س − ٤)^{٢} + (ص − ٣)^{٢}$ = ٢٥

مثال ١٥

أوجد مساحة سطح مثلث متساوى الأضلاع تمر برءوسه الدائرة :
$س^{٢} + ص^{٢} + ٦ س - ٢ ص - ١٥ = ٠$ علمًا بأن كل وحدة فى المستوى الإحداثى تمثل ٤ سم

الحل

∵ ل = ٣ ، ك = −١ ، ح = −١٥

∴ $نق = \sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - ح} = \sqrt{٩ + ١ + ١٥} = ٥$ وحدة طولية



فإذا كانت م هى مركز الدائرة التى تمر برؤوس

Δ أ ب ح المتساوى الأضلاع ورسمنا $\overline{م أ}$ ، $\overline{م ب}$ ، $\overline{م ح}$ فإن :

$ق(\angle ب م ح) = \frac{٣٦٠}{٣} = ١٢٠°$ ويكون :

مساحة سطح Δ أ ب ح = ٣ × مساحة سطح Δ م ب ح

$= ٣ \times \frac{١}{٢}$ م ب × م ح × جا(ب م ح) $= \frac{٣}{٢} نق^{٢}$ جا ١٢٠°

$= \frac{٣}{٢} \times ٢٥$ جا ٦٠° $= \frac{٣}{٢} \times ٢٥ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{٧٥\sqrt{٣}}{٤}$ وحدة مربعة

، ∵ كل وحدة طول فى المستوى الإحداثى تمثل ٤ سم

∴ الوحدة المربعة فى المستوى الإحداثى تمثل مساحة قدرها $= (٤)^{٢} = ١٦$ سم^{٢}

∴ مساحة المثلث أ ب ح $= \frac{٧٥\sqrt{٣}}{٤} \times ١٦ = ٣٠٠\sqrt{٣}$ سم^{٢}

ملاحظة

إذا كان عدد أضلاع مضلع منتظم = ن ضلعًا ، طول نصف قطر الدائرة المارة برءوسه = نق

فإن : مساحة سطح المضلع المنتظم $= \frac{ن}{٢} نق^{٢}$ جا $\left(\frac{٣٦٠°}{ن}\right)$

فمثلًا : السداسى المنتظم المرسوم داخل دائرة طول نصف قطرها ٨ سم تكون :

مساحة سطحه $= \frac{٦}{٢} \times (٨)^{٢} \times$ جا $\left(\frac{٣٦٠°}{٦}\right) = ٣ \times ٦٤ \times$ جا ٦٠°

$= ٣ \times ٦٤ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ٩٦\sqrt{٣}$ وحدة مربعة.

مثال ١٦

أوجد المعادلة الإحداثية للدائرة التى تمر بالنقط : أ = (٦ ، ٣) ، ب = (٢ ، ٣) ، ح = (٤ ، ١) ثم عيِّن مركزها وطول نصف قطرها.

الحل

نفرض أن معادلة الدائرة هى : $س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + ح = ٠$

∵ النقط أ ، ب ، ح تقع على الدائرة فهى تحقق معادلتها

∴ ٣٦ + ٩ + ١٢ ل + ٦ ك + ح = ٠ أى : ١٢ ل + ٦ ك + ح = −٤٥ (١)

، ٤ + ٩ + ٤ ل + ٦ ك + ح = ٠ أى : ٤ ل + ٦ ك + ح = −١٣ (٢)

، ١٦ + ١ + ٨ ل + ٢ ك + ح = ٠ أى : ٨ ل + ٢ ك + ح = −١٧ (٣)

بطرح (٢) من (١) : ∴ ٨ ل = −٣٢ ∴ ل = −٤

وبطرح (٣) من (١) : ∴ ٤ ل + ٤ ك = −٢٨ ∴ ل + ك = −٧

∴ −٤ + ك = −٧ ∴ ك = −٣

وبالتعويض فى (٣) عن ل ، ك : ∴ −٣٢ − ٦ + ح = −١٧ ∴ ح = ٢١

∴ المعادلة هى : $س^{٢} + ص^{٢} - ٨ س - ٦ ص + ٢١ = ٠$ حيث المركز = (٤ ، ٣)

، $نق = \sqrt{١٦ + ٩ - ٢١} = \sqrt{٤} = ٢$ وحدة طولية.

مثال ١٧

أوجد معادلة الدائرة التى تمس محور السينات وتمر بالنقطتين : (−١ ، ٢) ، (−٣ ، ٤)

الحل

∵ الدائرة تمس محور السينات ∴ نق = |ك| ، $ح = ل^{٢}$

لذلك نفرض أن معادلة الدائرة هى : $س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + ل^{٢} = ٠$

، ∵ الدائرة تمر بالنقطة (−١ ، ٢) فهى تحقق معادلتها.

∴ $١ + ٤ - ٢ ل + ٤ ك + ل^{٢} = ٠$ ∴ $ل^{٢} - ٢ ل + ٤ ك = -٥$ (١)

، ∵ الدائرة تمر بالنقطة (−٣ ، ٤) فهى تحقق معادلتها.

(٢)

∴ ٩ + ١٦ − ٦ ل + ٨ ك + ل^{٢} = ٠ ∴ ل^{٢} − ٦ ل + ٨ ك = −٢٥

بضرب المعادلة (١) × ٢ والطرح من المعادلة (٢) :

∴ − ل^{٢} − ٢ ل = −١٥

∴ ل^{٢} + ٢ ل − ١٥ = ٠

∴ (ل − ٣) (ل + ٥) = ٠ ∴ ل = ٣ أو ل = −٥

∴ ك = −٢ أو ك = −١٠

∴ توجد دائرتان فى إحداهما ل = ٣ ، ك = −٢ فتكون المعادلة هى :

س^{٢} + ص^{٢} + ٦ س − ٤ ص + ٩ = ٠

وفى الدائرة الأخرى ل = −٥ ، ك = −١٠ فتكون المعادلة هى :

س^{٢} + ص^{٢} − ١٠ س − ٢٠ ص + ٢٥ = ٠



اختبر نفسك

• تذكر • فهم • تطبيق ❖ مستويات عليا 📖 من أسئلة الكتاب المدرسى

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① مركز الدائرة التى $\overline{أب}$ قطر فيها حيث أ = (−١ ، ٣) ، ب = (٥ ، −٣) هو ....

(أ) (٤ ، ٠) (ب) (٢ ، ٠) (جـ) (−٦ ، −٦) (د) (٠ ، ٤)

② الدائرة التى معادلتها س^{٢} + ص^{٢} − ٤ س + ٢ ص − ٤ = ٠

طول نصف قطرها .... وحدة طول.

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) ٩

③ الدائرة التى معادلتها (س + ٢)^{٢} + ص^{٢} + ٢ ص = ٠ طول نصف قطرها

يساوى .... وحدة طول.

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

④ طول قطر الدائرة : ٤ س^{٢} + ٤ ص^{٢} + ١٦ س − ٨ ص − ١٦ = ٠ يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ١٢ (د) ٢٤

⑤ إذا كان المستقيمان : ص = −٦ ، ص = ٨ يمسان دائرة م

فإن طول نصف قطرها = ... وحدة طول.

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٧ (د) ١٤

⑥ إذا كان المستقيم : ص = ٢ يمس الدائرة م التى مركزها (٦ ، ٩)

فإن طول قطرها = ... وحدة طول.

(أ) ٦ (ب) ٧ (جـ) ١٤ (د) ١٥

⑦ طول نصف قطر الدائرة :

(ن + ٣) س^{٢} + ص^{٢} − ٤ ص + (م − ٢) س ص + (م − ن) س − ٨ = ٠

هو .... وحدة طول.

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٢ $\sqrt{٢}$

⑧ مساحة الدائرة التى معادلتها : (س − ٥)^{٢} + (ص + ٤)^{٢} = ٧ تساوى .... وحدة مربعة.

(أ) ٣,٥ π (ب) ٧ π (جـ) ١٢,٢٥ π (د) ٤٩ π

(٩) إذا كانت المعادلة ٢ س^{٢} + أ ص^{٢} + ب س ص - ٥ = ٠ تمثل دائرة

فإن مساحتها = ... وحدة مربعة.

(أ) ٥ π (ب) $\sqrt{٥}$ π (جـ) $\frac{٥}{٢}$ π (د) ٥ $\sqrt{٢}$ π

(١٠) محيط الدائرة التى معادلتها : (س - ٣)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٢٥ يساوى .... وحدة طولية.

(أ) ٢ π (ب) ٣ π (جـ) ١٠ π (د) ٢٥ π

(١١) محيط الدائرة التى معادلتها : س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س - ٢ ص - ٢ = ٠ هو .... وحدة طول.

(أ) π (ب) ٢ π (جـ) ٤ π (د) ٨ π

(١٢) 📖 محيط الدائرة التى معادلتها : س^{٢} + ص^{٢} = ٨ هو .... وحدة طول.

(أ) ٨ π (ب) ٦٤ π (جـ) ٢ $\sqrt{٢}$ π (د) ٤ $\sqrt{٢}$ π

(١٣) إذا كان المستقيمان : س = -٣ ، س = ٤ يمسان الدائرة م

فإن محيطها = ... وحدة طول. حيث (π = $\frac{٢٢}{٧}$)

(أ) ٢٢ (ب) ٤٤ (جـ) ١٢ (د) ١٤

∴ (١٤) إذا كان : (س ص ٨) $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ -٢ \end{pmatrix}$ = ☐ فإن المعادلة الناتجة تمثل دائرة

طول قطرها = ... وحدة طول. حيث ☐ المصفوفة الصفرية.

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

∴ (١٥) المعادلة : $\begin{vmatrix} س & ت ص \\ ت ص & س \end{vmatrix}$ - ٤٩ = ٠ تمثل معادلة دائرة طول نصف قطرها .... وحدة طول.

(أ) ٤٩ (ب) ١٤ (جـ) ٩ (د) ٧

(١٦) أى المعادلات الآتية يعبر عن دائرة ؟

(أ) س^{٢} - ص^{٢} + س - ص = ٦ (ب) ٢ س^{٢} + ص^{٢} - س + ص = ٥

(جـ) س^{٢} + ص^{٢} - س = ٦ (د) س^{٢} + ص^{٢} - س ص = ٦

(١٧) إذا كانت المعادلة : ٢ س^{٢} + (أ - ١) ص^{٢} + ٥ س - ٣ ص = ٧ تمثل دائرة فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(١٨) إذا كانت : س^{٢} + ص^{٢} + ٢ (جتا θ) س - ٢ (جا θ) ص - ٨ = ٠ تمثل معادلة دائرة

فإن : نق = ... وحدة طول.

(أ) $\sqrt{٢}$ (ب) ٢ $\sqrt{٢}$ (جـ) ٣ (د) ٨

(١٩) الدائرة التى معادلتها : (س - ٢)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ١٦ مركزها ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٢ ، -٣) (جـ) (١٢ ، ١٦) (د) (٤ ، ٩)

(٢٠) مركز الدائرة : ٢ س^{٢} + ٢ ص^{٢} - ٢١ = ٠ هو

(أ) (٠ ، ٠) (ب) (٢ ، ٢) (جـ) (١ ، ١) (د) (-١ ، ١)

(٢١) مركز الدائرة : س^{٢} + ص^{٢} - ٦ س + ٨ ص = ٠ هو النقطة

(أ) (٣ ، -٤) (ب) (٤ ، -٣) (جـ) (-٣ ، ٤) (د) (-٤ ، ٣)

(٢٢) مركز الدائرة التى معادلتها : ٢ س^{٢} + ٢ ص^{٢} + ١٢ س - ١٦ ص = ٠ هو

(أ) (٣ ، -٤) (ب) (-٦ ، ٨) (جـ) (-٣ ، ٤) (د) (٦ ، -٨)

(٢٣) 📖 الدائرة : (س + ٢)^{٢} + ص^{٢} + ٢ ص = ٠ مركزها النقطة

(أ) (٢ ، ٢) (ب) (-٢ ، -١) (جـ) (٢ ، -١) (د) (-٢ ، ٠)

(٢٤) مركز الدائرة التى تمر بنقطة الأصل والنقطتين أ (-٦ ، ٠) ، ب (٠ ، ٨) هو ....

(أ) (٤ ، -٣) (ب) (-٥ ، ٥) (جـ) (٥ ، ٥) (د) (-٣ ، ٤)

(٢٥) إذا مست أى دائرة محورى الإحداثيات وكانت مرسومة فى الربع الأول فإن مركزها يقع على المستقيم ....

(أ) ص = س (ب) ص = - س (جـ) ص = س + ١ (د) ص = س - ١

(٢٦) كم عدد الدوائر التى مركزها (٣ ، -٥) وتمس أحد المحورين ؟

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٢٧) النقطة (٢ ، ٢) تقع .... الدائرة التى معادلتها س^{٢} + ص^{٢} = ٩

(أ) على (ب) داخل (جـ) خارج (د) فى مركز

(٢٨) 📖 النقطة (٢ ، ٠) تقع على ....

(أ) محور السينات. (ب) محور الصادات.

(جـ) المستقيم : ص = ٢ س (د) الدائرة : س^{٢} + ص^{٢} = ٩

(٢٩) 📖 النقطة التى تقع على الدائرة : (س - ٢)^{٢} + ص^{٢} = ١٣ من النقط الآتية هى ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٣ ، -٢) (جـ) (٢ ، ٥) (د) (٤ ، ٣)

(٣٠) الدائرة التى معادلتها : (س - ١)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٥ تمر بالنقطة ....

(أ) (٠ ، ٠) (ب) (٣ ، -١) (جـ) (٢ ، -٤) (د) كل ما سبق.

(٣١) الدائرة د : (س + ٣)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ٩ يمثلها الشكل ....

(أ) (ب) (ج) (د)

(٣٢) الصورة العامة لمعادلة الدائرة التى مركزها (٢ ، −١) وطول نصف قطرها ٣ سم هى ....

(أ) س^{٢} + ص^{٢} − ٤ س + ٢ ص − ٩ = ٠ (ب) س^{٢} + ص^{٢} − ٤ س + ٢ ص − ٤ = ٠

(ج) س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س − ص + ٣ = ٠ (د) س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س − ص + ٩ = ٠

(٣٣) معادلة الدائرة التى مركزها (٤ ، ٣) وتمس محور السينات هى ....

(أ) (س − ٣)^{٢} + (ص − ٤)^{٢} = ١٦ (ب) (س − ٤)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ٩

(ج) (س + ٣)^{٢} + (ص + ٤)^{٢} = ٩ (د) (س + ٣)^{٢} + (ص − ٤)^{٢} = ١٦

(٣٤) معادلة الدائرة التى تمس المحورين ومركزها النقطة (−٤ ، ٤) هى ....

(أ) س^{٢} + ص^{٢} + ٨ س − ٨ ص + ١٦ = ٠ (ب) س^{٢} + ص^{٢} = ١٦

(ج) س^{٢} + ص^{٢} − ٨ س + ٨ ص + ١٦ = ٠ (د) س^{٢} + ص^{٢} = ٨

(٣٥) معادلة الدائرة التى هى صورة الدائرة : س^{٢} + ص^{٢} − ١٢ س + ٦ ص + ٢٠ = ٠

بالانتقال (س + ٢ ، ص − ٢) هى ....

(أ) (س + ٨)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = ٢٥ (ب) (س − ٨)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = ٢٥

(ج) (س − ٨)^{٢} + (س − ٥)^{٢} = ٢٥ (د) (س + ٥)^{٢} + (ص − ٨)^{٢} = ٢٥

(٣٦) معادلة الدائرة التى مركزها (−٤ ، ٣) وتمر بنقطة الأصل هى ....

(أ) (س + ٤)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ٥ (ب) (س − ٤)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ٢٥

(ج) (س + ٤)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ٦٢٥ (د) (س + ٤)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ٢٥

(٣٧) معادلة الدائرة التى مركزها (١ ، ٢) وتمس المستقيم : ٣ س + ٤ ص + ٩ = ٠ هى ....

(أ) س^{٢} + ص^{٢} − ٢ س − ٤ ص = ١٦ (ب) س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س + ٤ ص − ١١ = ٠

(ج) س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س + ٤ ص − ١٦ = ٠ (د) س^{٢} + ص^{٢} − ٢ س − ٤ ص = ١١

(٣٨) معادلة الدائرة التى يمسها المستقيم س + ص = ٢ ومركزها (٣ ، ٥) هى ....

(أ) (س − ٣)^{٢} + (ص − ٥)^{٢} = ١٨ (ب) (س + ٣)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = ١٨

(ج) (س + ٣)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = ٣٦ (د) (س − ٣)^{٢} + (ص − ٥)^{٢} = ٩

(٣٩) معادلة الدائرة التى مركزها يقع على المستقيم ص = $\frac{١}{٢}$ س وتمس محور السينات يمكن أن تكون ....

(أ) (س − ٢)^{٢} + (ص − ١)^{٢} = ٤ (ب) (س − ٤)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ١٦

(ج) (س − ٢)^{٢} + (ص − ٤)^{٢} = ١٦ (د) (س − ٤)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ٤

(٤٠) معادلة الدائرة متحدة المركز مع الدائرة س^{٢} + ص^{٢} − ٦ س + ٢ ص − ٦ = ٠

وتمر بالنقطة (−٣ ، ٤) هى ....

(أ) (س + ٣)^{٢} + ص^{٢} = ١٦ (ب) (س − ٣)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٢٥

(ج) (س − ٣)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ١٦ (د) (س − ٣)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٦١

(٤١) فى المعادلات الآتية :

الدائرة التى مركزها يقع على محور الصادات ولا تقطع محور السينات معادلتها هى ....

(أ) س^{٢} + (ص − ١)^{٢} = ٤ (ب) س^{٢} + (ص − ٥)^{٢} = ٢٥

(ج) س^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = ٩ (د) (س + ٥)^{٢} + ص^{٢} = ١٦

(٤٢) معادلة الدائرة التى مركزها النقطة (−٤ ، −٣) ومساحة سطحها ٢٥ π سم^{٢} هى ....

(أ) س^{٢} + ص^{٢} − ٨ س + ٦ ص − ٢٥ = ٠ (ب) س^{٢} + ص^{٢} + ٨ س + ٦ ص = ٠

(ج) س^{٢} + ص^{٢} + ٤ س + ٣ ص + ٢٥ = ٠ (د) س^{٢} + ص^{٢} + ٨ س − ٦ ص = ٠

(٤٣) أ ب جـ د مستطيل فيه : أ = (−١ ، ٤) ، ب = (٧ ، ٨) ، جـ = (٩ ، ٤) ، د = (١ ، ٠)

فإن معادلة الدائرة المارة برؤوسه هى ....

(أ) (س − ٤)^{٢} + (ص − ٤)^{٢} = ٢٥ (ب) (س − ٤)^{٢} + (ص − ٤)^{٢} = ١٦

(ج) (س + ٤)^{٢} + (ص + ٤)^{٢} = ٢٥ (د) (س − ٤)^{٢} + (ص + ٤)^{٢} = ١٦

(٤٤) أ ب جـ د مربع مركزه الهندسى نقطة الأصل وطول ضلعه ٢ $\sqrt{٣}$ وحدة طول

فإن معادلة الدائرة التى تمس أضلاعه هى ....

(أ) س^{٢} + ص^{٢} = ٣ (ب) س^{٢} + ص^{٢} = ١٢

(ج) س^{٢} + ص^{٢} = ٦ (د) (س − $\sqrt{٣}$)^{٢} + (ص − $\sqrt{٣}$)^{٢} = ٣

(٤٥) معادلة الدائرة التى تمر برؤوس سداسى منتظم مساحته ٦ $\sqrt{٣}$ سم^{٢} ومركزها نقطة الأصل هى ....

(أ) س^{٢} + ص^{٢} = ٢ (ب) س^{٢} + ص^{٢} = ٤

(ج) س^{٢} + ص^{٢} = ٩ (د) س^{٢} + ص^{٢} = ١٦

(٤٦) الدائرة التى معادلتها : (س − أ)^{٢} + (ص − ب)^{٢} = أ^{٢} حيث (أ ≠ ب) ....

(أ) تمس محور السينات.　　(ب) تمس محور الصادات.

(ج) تمس محورى الإحداثيات.　　(د) لا تمس أيًا من المحورين.

(٤٧) إذا كان محور الصادات مماسًا للدائرة : س^{٢} + ص^{٢} + ٤ س + م ص + ٤ = ٠

فإن : م = ...

(أ) ٤　　(ب) −٤　　(ج) صفر　　(د) ± ٤

(٤٨) إذا كانت الدائرة التى معادلتها : س^{٢} + ص^{٢} − ٦ س + ٨ ص + حـ = ٠ تمس محور السينات

فإن : حـ = ...

(أ) −٩　　(ب) ٩　　(ج) ٦　　(د) −٦

(٤٩) إذا كان محور السينات مماسًا للدائرة : س^{٢} + ص^{٢} + م س + ٤ ص + ٧ − ٣ م = ٠

فإن : م = ...

(أ) ٢ أ، ١٤　　(ب) −٢ أ، −١٤　　(ج) ٢ أ، −١٤　　(د) −٢ أ، ١٤

(٥٠) إذا كان المستقيم : ٣ س − ٤ ص − ١٢ = ٠ يمس الدائرة (س + ٣)^{٢} + (ص − ١)^{٢} = نق^{٢}

فإن محيط الدائرة = ... وحدة طول (بدلالة π)

(أ) ٥ π　　(ب) ١٠ π　　(ج) ١٥ π　　(د) ٢٠ π

(٥١) إذا كان المستقيم : ص = م س يمس الدائرة (س − ٢)^{٢} + (ص − ٦)^{٢} = ٤ فإن : م = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$　　(ب) $\frac{٢}{٣}$　　(ج) $\frac{-٤}{٣}$　　(د) $\frac{٤}{٣}$

(٥٢) المستقيم : ص = ٥ − ٢ س .... الدائرة التى معادلتها :

س^{٢} + ص^{٢} − ٨ س − ٤ ص + ١٥ = ٠

(أ) يمس　　(ب) يقطع　　(ج) خارج　　(د) يمر بمركز

(٥٣) الدائرتان د$_{١}$: (س + ٢)^{٢} + (ص − ١)^{٢} = ٤ ، د$_{٢}$: (س − ٥)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ٩ ....

(أ) متباعدتان.　　(ب) متماستان من الخارج.

(ج) متماستان من الداخل.　　(د) متقاطعتان.

(٥٤) الدائرتان (س + ٢)^{٢} = ١ − ص^{٢} ، س^{٢} + ص^{٢} − ٢ س − ٨ ص − ١٩ = ٠ تكونان ....

(أ) متقاطعتين.　　(ب) متماستين من الداخل.

(ج) متباعدتين.　　(د) متماستين من الخارج.

(٥٥) إذا كان المستقيم ل : ٢ س + ٤ ص + ٩ = ٠

يمس الدائرة د : س^{٢} + ص^{٢} − ١٢ س − ٤ ص − حـ = ٠ فإن حـ = ...

(أ) ١٥　　(ب) −١٠　　(ج) ٢٥　　(د) −٢٥

(٥٦) طول القطعة المماسة للدائرة : س^{٢} + ص^{٢} = ٩ من النقطة (٥ ، ٠) يساوى .... وحدة طول

(أ) ١٤　　(ب) ٣　　(ج) ٥　　(د) ٤

(٥٧) طول القطعة المماسة للدائرة : س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢} من النقطة (٠ ، ٢ نق) يساوى .... وحدة طول

(أ) نق　　(ب) ٢ نق　　(ج) $\sqrt{٣}$ نق　　(د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ نق

(٥٨) إذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ مماسًا للدائرة : س^{٢} + ص^{٢} + ٦ س − ٨ ص + ١٥ = ٠

عند النقطة أ (−٢ ، ١) فإن معادلة $\overleftrightarrow{أب}$ هى ....

(أ) س − ٢ ص + ٥ = ٠　　(ب) س − ٢ ص = ٥

(ج) ٢ س − ص − ٥ = ٠　　(د) ٢ ص − س + ٥ = ٠

(٥٩) إذا قطع محور السينات الدائرة التى معادلتها : س^{٢} + ص^{٢} = ٤٩ فى النقطتين أ ، ب

فإن طول $\overline{أب}$ = ... وحدة طول.

(أ) ٤٩　　(ب) ٧　　(ج) ٢　　(د) ١٤

(٦٠) نقطتا تقاطع الدائرة : (س − ٢)^{٢} + ص^{٢} = ١٦ مع محور السينات هما ....

(أ) (٦ ، ٠) ، (−٢ ، ٠)　　(ب) (−٦ ، ٠) ، (٢ ، ٠)

(ج) (٤ ، ٠) ، (−٤ ، ٠)　　(د) (٢ ، ٠) ، (−٢ ، ٠)

(٦١) إذا قطع المستقيم : ص = ٢ الدائرة التى معادلتها : (س − ٣)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ٢٥ فى النقطتين أ ، ب

فإن : أب = ... وحدة طول.

(أ) $\sqrt{١٣}$　　(ب) ٧　　(ج) ٨　　(د) ١٠

(٦٢) إذا كان المستقيم : ص − ٢ س + ٥ = ٠ يقطع الدائرة : س^{٢} + ص^{٢} − ٤ س − ٨ ص = ٠

فى النقطتين أ ، ب فإن بعد مركز الدائرة عن الوتر $\overline{أب}$ يساوى ....

(أ) ٣　　(ب) ٤　　(ج) ٥　　(د) $\sqrt{٥}$

(٦٣) دائرة مركزها م = (٥ ، ٤) وطول نصف قطرها = ٥ وحدة طول وتقطع محور السينات فى أ ، ب

فإن : مساحة Δ م أ ب = ... وحدة مربعة.

(أ) ٦　　(ب) ٩　　(ج) ١٢　　(د) ١٨

(٦٤) إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ محور تماثل للدائرة التي معادلتها : $س^2 + ص^2 = ل^2$ وكانت أ ، ب تنتميان للدائرة حيث : أ = (-٢ ، ٥) فإن : ب = ...

(أ) (٢ ، -٥) (ب) (٢ ، ٥) (جـ) (٠ ، ٠) (د) (٥ ، -٢)

(٦٥) مساحة سطح المربع الذي تمر برؤوسه الدائرة التي معادلتها :
$س^2 + ص^2 - ٤ س + ٦ ص + ٤ = ٠$ هي .... وحدة مربعة.

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ١٨

(٦٦) الدائرة التي تمر بالثلاث نقط : أ = (-٢ ، ٠) ، ب = (٢ ، -١) ، جـ = (٣ ، ٢) يكون طول قطرها = ... وحدة طول.

(أ) $\sqrt{٣٤}$ (ب) $\sqrt{٣٣}$ (جـ) $\sqrt{٣٢}$ (د) $\sqrt{٣١}$

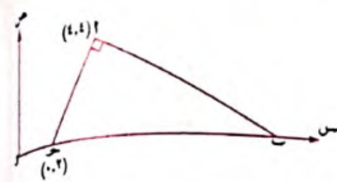
(٦٧) سداسي منتظم مرسوم داخل دائرة طول نصف قطرها ٤ سم فإن مساحته = ... $سم^2$.

(أ) $٨ \sqrt{٣}$ (ب) $١٦ \sqrt{٣}$ (جـ) ١٦ (د) $٢٤ \sqrt{٣}$

(٦٨) مساحة سطح مضلع منتظم عدد أضلاعه ١٢ ضلعًا وتمر برؤوسه الدائرة :
$س^2 + ص^2 - ١٦ = ٠$ هي .... وحدة مربعة.

(أ) ٢٤ (ب) ٣٦ (جـ) ٤٨ (د) ٧٢

(٦٩) الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي تمر برؤوس المثلث أ ب جـ في الشكل المقابل هي ....



(أ) $س^2 + (ص - ٧)^2 = ٢٥$

(ب) $(س - ٧)^2 + ص^2 = ٢٥$

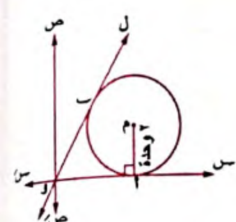
(جـ) $(س - ٤)^2 + (ص - ٤)^2 = ١٦$

(د) $(س - ٤)^2 + ص^2 = ١٦$

(٧٠) في الشكل المقابل :

إذا كان : و ب = ٥ وحدة طول

فإن معادلة الدائرة م هي ....



(أ) $(س - ٢)^2 + (ص - ٥)^2 = ٢٥$

(ب) $(س - ٢)^2 + (ص - ٥)^2 = ٤$

(جـ) $(س - ٥)^2 + (ص - ٢)^2 = ٢٥$

(د) $(س - ٥)^2 + (ص - ٢)^2 = ٤$

(٧١) في الشكل المقابل :

معادلة الدائرة هي ....



(أ) $(س + ٢)^2 + (ص - ٤)^2 = ٣٦$

(ب) $(س - ١)^2 + (ص - ٢)^2 = ٣٦$

(جـ) $(س - ١)^2 + (ص - ٢)^2 = ٩$

(د) $(س + ١)^2 + (ص + ٢)^2 = ٩$

(٧٢) في الشكل المقابل :

إذا كانت الدائرة م تمس محور السينات

فإن معادلة الدائرة م هي ....



(أ) $(س - ٦)^2 + (ص - ٢)^2 = ٤$

(ب) $(س - ٦)^2 + (ص - ٣)^2 = ٩$

(جـ) $(س - ٦)^2 + (ص - ٤)^2 = ١٦$

(د) $(س - ٨)^2 + (ص - ٢)^2 = ٤$

(٧٣) في الشكل المقابل :

إذا كانت معادلة الدائرة هي : $(س - ٢)^2 + (ص - ٣)^2 = ٢٥$

فإن : أ ب = ... وحدة طولية.



(أ) ٨ (ب) ٤

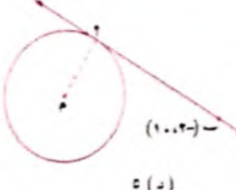
(جـ) ٦ (د) ٥

(٧٤) في الشكل المقابل :

إذا كانت معادلة الدائرة م هي : $(س - ٣)^2 + (ص + ٢)^2 = ٢٥$

، $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م عند أ حيث : ب = (-٢ ، ١٠)

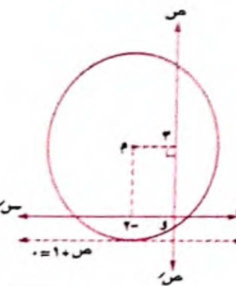
فإن : أ ب = ... وحدة طولية.



(أ) ١٣ (ب) $\sqrt{١٩٤}$ (جـ) ١٢ (د) ٥

(٧٥) الشكل المقابل يمثل

معادلة الدائرة ....



(أ) $(س - ٣)^2 + (ص + ٢)^2 = ١٦$

(ب) $(ص + ٢)^2 + (ص - ٣)^2 = ١٦$

(جـ) $(س + ٢)^2 + (ص - ٣)^2 = ٤$

(د) $(س + ٢)^2 + (ص - ٣)^2 = ٩$

(٧٦) فى الشكل المقابل :

م ، ن دائرتان متطابقتان

، طول نصف قطر أى منهما = نق

فإن : م ن = ... وحدة طول

(أ) ٢ نق

(ب) $\sqrt{٢}$ نق

(جـ) ٢ $\sqrt{٢}$ نق

(د) $\sqrt{٥}$ نق

(٧٧) فى الشكل المقابل :

إذا كانت م دائرة محيطها = ١٠ π وحدة طولية

تقطع محور السينات فى النقطتين أ (٢ ، ٠)

، ب (٨ ، ٠) فإن معادلة الدائرة م

هى ....

(أ) (س + ٥)^{٢} + (ص + ٤)^{٢} = ٢٥

(ب) (س - ٥)^{٢} + (ص - ٤)^{٢} = ٢٥

(جـ) (س - ٥)^{٢} + (ص - ٤)^{٢} = ٩

(د) (س - ٥)^{٢} + (ص - ٤)^{٢} = ٣٦

(٧٨) فى الشكل المقابل :

إذا كانت معادلة الدائرة م هى :

س^{٢} + ص^{٢} - ٦ س + ٤ ص - ١٢ = ٠

، $\overline{\text{م ب}}$ ⊥ المستقيم ل حيث معادلة ل هى :

٣ س - ٤ ص + ٢٣ = ٠ ، أ ∈ $\overline{\text{م ب}}$

فإن طول $\overline{\text{أ ب}}$ = ... وحدة طولية.

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٢,٥

(٧٩) الشكل المقابل يمثل قرص فى آلة يراد تصنيع مثله فإذا كان ثمن الوحدة المربعة من سطح القرص يتكلف ٥ جنيهات وكانت معادلة الدائرة الصغرى هى : س^{٢} + ص^{٢} = ٤ وطول قطر الدائرة الكبرى ١٠ وحدات طولية فإن تكلفة تصنيع القرص = ... جنيه.

(أ) ٤٤٠ (ب) ٦٦٠

(جـ) ٢٢٠ (د) ٣٣٠

(٨٠) الشكل المقابل يمثل ترسين فى آلة مركزهما م ، ن ، $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ // محور الصادات

، إذا كان نصف قطر الترس الأصغر يساوى $\frac{1}{٢}$ نصف قطر الترس الأكبر

فإن معادلة الترس الأصغر هى ....

(أ) (س - ٣)^{٢} + (ص - ٦)^{٢} = ٩

(ب) (س - ٣)^{٢} + (ص - ٧)^{٢} = ١

(جـ) س^{٢} + ص^{٢} - ٦ س - ١٤ ص + ٥٨ = صفر

(د) (س - ١)^{٢} + (ص - ١)^{٢} = ١

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد معادلة الدائرة التى مركزها النقطة (م) وطول نصف قطرها = نق فى كل من الحالات الآتية :

① م = (٢ ، ٣) ، نق = ٥

② م = (٠ ، ٠) ، نق = ٢

③ م = (٠ ، -١) ، نق = ٢ $\sqrt{٣}$

④ م = (-٤ ، -٢) ، نق = $\frac{٢}{٣}$

٢ اكتب الصورة العامة لمعادلة الدائرة إذا كان :

① مركزها م (-٢ ، ٣) وطول قطرها ٨ وحدات طولية.

② مركزها م (٥ ، -١٢) وتمر بنقطة الأصل.

③ مركزها م (٧ ، -٥) وتمر بالنقطة أ = (٣ ، ٢)

④ $\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة حيث أ = (٦ ، -٤) ، ب = (٠ ، ٢)

⑤ مركزها النقطة (-٣ ، -٢) وتمس محور السينات.

⑥ مركزها النقطة (٣ ، ٠) وتمس محور الصادات.

⑦ مركزها النقطة (٥ ، -٥) وتمس محورى الإحداثيات.

⑧ تمر بالنقطتين أ = (٦ ، ٢) ، ب = (٠ ، -١) والمماسان لها عند أ ، ب متوازيان.

⑨ مركزها يقع على محور السينات وتمر بالنقطتين (٢ ، ٠) ، (٨ ، ٠)

⑩ طول نصف قطرها = ٦ وحدات وتمس المحورين وتقع فى الربع الرابع.

٣ أوجد إحداثيي المركز ، وطول نصف القطر لكل من الدوائر الآتية :

① س^{٢} + ص^{٢} − ٨ = ٠

② 📖 (س + ٣)^{٢} + (ص − ٥)^{٢} = ٤٩

③ 📖 (س + ٤)^{٢} + ص^{٢} = ٩

④ 📖 س^{٢} + (ص + ٧)^{٢} = ٢٤

⑤ 📖 س^{٢} + ص^{٢} − ٤ س + ٦ ص − ١٢ = ٠

⑥ س^{٢} + ص^{٢} + ٤ ص = ٨

⑦ س^{٢} + ص^{٢} − ٤ س − ٢ ص = ٠

⑧ 📖 س^{٢} + ص^{٢} − ٨ س = ١٢

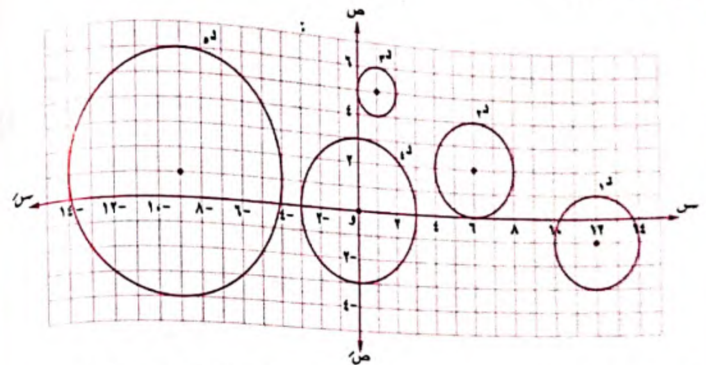
٤ بيِّن أى دائرتين مما يلى متطابقتان ؟ ولماذا ؟

① 📖 س^{٢} + ص^{٢} − ٤ س + ٨ ص = ٠ ، س^{٢} + ص^{٢} + ١٢ ص + ١٦ = ٠

② س^{٢} + ص^{٢} + ١٤ ص = ١ ، س^{٢} + ص^{٢} + ١٠ س − ٢٥ = ٠

③ 📖 س^{٢} + ص^{٢} − ٢ س + ٤ ص − ٣ = ٠ ، س^{٢} + ص^{٢} + ٦ س − ١١ = ٠

٥ 📖 فى الشكل التالى :



① اكتب معادلة كل دائرة.

② أى الدوائر السابقة متطابقة ؟ فسر إجابتك.

٦ 📖 يبين الشكل المقابل

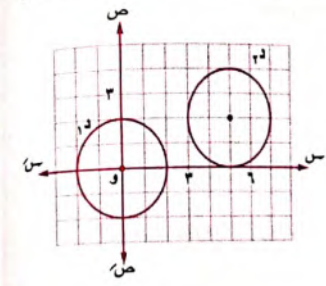
الدائرتين د$_{١}$ ، د$_{٢}$

أثبت أن الدائرتين متطابقتان

ثم أوجد معادلة كل منهما

وإذا كانت الدائرة د$_{٢}$ هى صورة الدائرة د$_{١}$

بالانتقال (−٤ ، ٣) اكتب معادلة الدائرة د$_{٢}$



٧ بيِّن مع ذكر السبب أيًا من المعادلات الآتية تمثل دائرة وأيها لا تمثل دائرة :

① س^{٢} + س ص + ص^{٢} = ٢٥

② 📖 س^{٢} + ص^{٢} + ٨ س − ١٦ ص − ١ = ٠

③ 📖 س^{٢} + ٢ ص^{٢} + ٦ س − ٥ ص = ٠

④ 📖 ٢ س^{٢} + ٢ ص^{٢} + ٢ ص − ٨ = ٠

⑤ (س + ص)^{٢} − ٣ س + ٦ ص − ٤ = ٠

⑥ س^{٢} + ص^{٢} + س + ٢ ص + ٧ = ٠

⑦ س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س − ٤ ص + ٥ = ٠

⑧ 📖 $\frac{١}{٤}$ س^{٢} + $\frac{١}{٤}$ ص^{٢} + س − ٨ = ٠

⑨ س^{٢} + س = ص^{٢} + ص + ٧

٨ م$_{١}$ ، م$_{٢}$ مركزا دائرتين حيث م$_{١}$ = (٢ ، −١) ، م$_{٢}$ = (−١ ، ٣)

أوجد معادلتى هاتين الدائرتين إذا علم أن كلًا منهما تمر بمركز الأخرى.

٩ أثبت أن الدائرتين : س^{٢} + ص^{٢} − ٢ س + ٦ ص + ١ = ٠

، ٤ س^{٢} + ٤ ص^{٢} − ٨ س + ٢٤ ص + ١٥ = ٠ متحدتا المركز

، أوجد طول نصف قطر كل منهما. ٣٠ ، ٢.٥ وحدة طول

١٠ 📖 بيِّن أى النقط التالية تنتمى إلى الدائرة د التى معادلتها : (س − ٦)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٢٥

، ثم حدد موضع النقط الأخرى بالنسبة إلى الدائرة د حيث

أ(٩ ، ٣) ، ب(٧ ، ٥) ، جـ(٣ ، ٣) ، ء(٢ ، −٣)

١١ دائرة مركزها م = (٢ ، −١) وتمر بالنقطة أ = (−١ ، ٣) بيِّن مواقع النقط الآتية بالنسبة للدائرة م : ب = (٢ ، ٤) ، جـ = (−٣ ، ١) ، ء = (١ ، ٢)

١٢ حدد وضع المستقيم ل بالنسبة للدائرة : (س + ٣)^{٢} + (ص − ٤)^{٢} = ٩ إذا كانت معادلة المستقيم هى :

① ٣ س − ٤ ص + ٥ = ٠

② ٦ س − ٨ ص + ٢٣ = ٠

③ ٣ س − ٤ ص + ١٠ = ٠

١٣ حدد وضع المستقيم ل : ٥ س − ١٢ ص + ١٣ = ٠ بالنسبة للدائرة :

س^{٢} + ص^{٢} − ٦ س + ٤ ص − ١٢ = ٠

١٤ حدد موضع الدائرة د$_{١}$: (س − ٥)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٤ بالنسبة للدائرة د$_{٢}$: (س + ٧)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ١

١٥ هل الدائرتان د$_{١}$: س^{٢} + ص^{٢} − ١٠ س − ٨ ص + ١٦ = ٠ ، د$_{٢}$: س^{٢} + ص^{٢} + ١٤ س + ١٠ ص − ٢٦ = ٠ متماستان من الخارج ؟ فسر إجابتك.

١٦ أثبت أن الدائرتين : (س + ٢)^{٢} + (ص − ١)^{٢} = ١ ، س^{٢} + ص^{٢} − ٢ س − ٨ ص − ١٩ = ٠ متماستان من الداخل.

١٧ إذا كانت الدائرتان د$_{١}$: (س + ٢)^{٢} + (ص + ١١)^{٢} = ك ، د$_{٢}$: (س − ٣)^{٢} + (ص − ١)^{٢} = ١٦ متماستين. أوجد قيم ك

١٨ أثبت أن الدائرتين : س^{٢} + ص^{٢} − ٦ س − ٤ ص + ١٢ = ٠ ، س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س − ٤ ص − ٤ = ٠ متماستان. وأوجد إحداثيات نقطة التماس ثم أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة التماس وتمر بمركز الدائرة الثانية.

١٩ اكتب معادلة دائرة الوحدة وإذا كانت النقطة (٢ أ جا هـ ، ٢ أ جتا هـ) تنتمي لهذه الدائرة أوجد قيم أ الحقيقية.

٢٠ أوجد قيم ك الحقيقية التي تجعل كلًا مما يأتي يعبر عن معادلة دائرة :

(١) س^{٢} + ص^{٢} − ٢ س − ٤ ص − ك + ٢ = ٠

(٢) س^{٢} + ص^{٢} + ٤ س − ٦ ص − ك^{٢} + ٤ = ٠

(٣) س^{٢} + ص^{٢} − ٤ ك س − ٢ ك ص + ١٠ (ك − ١) = ٠

(٤) س^{٢} + ص^{٢} + ٦ س + ٨ ص + ك^{٢} − ٢ ك + ١٥ = ٠

(٥) س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ك س − ٦ ك ص − ٢ ك^{٢} + ١٢ ك − ٢ = ٠

٢١ أوجد قيم أ في المعادلة : س^{٢} + ص^{٢} − ٢ س + ٤ ص + ٢ أ^{٢} − ٣ = ٠ في كل من الحالات الآتية :

(١) المعادلة تمثل دائرة.
(٢) المعادلة تمثل دائرة تمر بنقطة الأصل.
(٣) المعادلة تمثل دائرة تمس محور السينات.
(٤) المعادلة تمثل دائرة تمس محور الصادات.
(٥) المعادلة تمثل دائرة تمس المستقيم : ٣ س + ٤ ص + ١٥ = ٠
(٦) المعادلة تمثل دائرة طول قطرها ١٤ وحدة طولية.

٢٢ اكتب الصورة العامة لمعادلة الدائرة إذا علم أن :

(١) مركزها م (٥ ، ٤) وتمس المستقيم س = ٢

(٢) مركزها م (٥ ، ٢) وتمس المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٧) ، (−١ ، ٣)

(٣) مركزها م يقع في الربع الأول وطول نصف قطرها يساوي ٢ وحدات طولية والمستقيمان س = ١ ، ص = ٢ مماسان لها.

(٤) طول نصف قطرها = ٥ وحدات وتمس محور السينات عند النقطة (٤ ، ٠)

(٥) طول نصف قطرها = ٢ $\frac{١}{٢}$ وحدة وتمس محور الصادات عند النقطة (٠ ، −٤)

(٦) تمس المحورين وتمر بالنقطة (−٢ ، −٤)

(٧) تمس محور السينات عند النقطة (−٣ ، ٠) وتمس أيضًا محور الصادات.

(٨) تمس محور السينات عند النقطة (−٢ ، ٠) وتقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات وترًا طوله ٤ $\sqrt{٣}$ وحدة طول.

(٩) تمس محور الصادات عند النقطة (٠ ، −١) وتقطع من الجزء السالب لمحور السينات وترًا طوله ٤ $\sqrt{٦}$ وحدة طول.

(١٠) تمس محور السينات وتمر بالنقطتين (٢ ، ١) ، (−٥ ، ٢)

(١١) تمس محور الصادات وتمر بالنقطتين (−٤ ، ٢) ، (−١ ، ١)

(١٢) يقع مركزها على محور السينات وتمر بالنقطتين أ (١ ، ٣) ، ب (٣ ، −٤)

(١٣) تمر بنقطة الأصل وتقطع من الجزئين الموجبين لمحوري الإحداثيات السيني والصادي جزءين طوليهما ١٢ ، ١٦ وحدة طولية على الترتيب.

(١٤) يقع مركزها على المستقيم : ص − س = ١ وتمر بالنقطتين أ = (−٢ ، ٤) ، ب = (٦ ، ٨)

(١٥) طول نصف قطرها = $\sqrt{٨٥}$ وحدة طولية وتمر بالنقطتين أ = (−١ ، ٢) ، ب = (٣ ، ٤)

(١٦) $\overline{أب}$ قطر فيها حيث أ ، ب نقطتي تقاطع الدائرة س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س + ٤ ص = ٠ مع محور السينات.

٢٣ أوجد مساحة سطح مثلث متساوي الأضلاع تمر برؤوسه الدائرة :

س^{٢} + ص^{٢} + س − ٤ ص − ٢ = ٠ « $\frac{٧٥ \sqrt{٣}}{١٦}$ وحدة مربعة »

٢٤ أوجد لأقرب سنتيمتر مربع مساحة سطح شكل خماسي منتظم تمر برؤوسه الدائرة :

س^{٢} + ص^{٢} + ٦ س − ١٢ ص + ٥ = ٠ علمًا بأن كل وحدة في المستوى الإحداثي تمثل ٥ سم. « ٢٣٧٨ سم^{٢} »

٢٥ أوجد مساحة سطح سداسي منتظم تمر برؤوسه الدائرة :

س^{٢} + ص^{٢} − ١٠ س + ٦ ص + ٢٥ = ٠ « $\frac{٢٧ \sqrt{٣}}{٢}$ وحدة مربعة »

٢٦ أوجد مساحة سطح مضلع منتظم عدد أضلاعه ١٢ ضلعًا وتمر برؤوسه الدائرة :

س^2 + ص^2 − ١٦ = ٠

٤٨٠ وحدة مربعة

٢٧ أوجد معادلة الدائرة التى طول نصف قطرها = ٥ وحدات ومعادلتا مستقيمين يحملان قطرين فيها هما

٣ س + ص + ٢ = ٠ ، ٤ س − ص − ١٦ = ٠ ، ثم أثبت أن النقطة (٥ ، −٤) تنتمى الدائرة.

٢٨ أوجد معادلة الدائرة التى طول نصف قطرها يساوى طول نصف قطر الدائرة :

س^2 + ص^2 − ٢ س جتا هـ − ٢ ص جا هـ − ٨ = ٠ ومعادلتا مستقيمين يحملان قطرين فيها هما :

س + ص = ٠ ، ر⃖ = (١ ، ٥) + ك (١ ، ٢)

٢٩ أوجد معادلة الدائرة التى تمر بنقطتى تقاطع الدائرتين :

س^2 + ص^2 − ١٠ س = ٠ ، س^2 + ص^2 + ٢ س − ١٢ = ٠ ومركزها :

① نقطة الأصل. ② النقطة (٢ ، ٠)

٣٠ أثبت أن : النقط ا = (٠ ، −١) ، ب = (−١ ، ٠) ، حـ = (−٩ ، ٠) تقع على دائرة مركزها

م (−٥ ، −٥) وأوجد معادلة هذه الدائرة.

٣١ إذا كانت النقط : ا = (٣ ، −٢) ، ب = (٣ ، ٨) ، حـ = (−١ ، ٠) تنتمى إلى دائرة واحدة

فأثبت أن : ا‾ب قطر فيها ، ثم اكتب الصورة العامة لمعادلتها.

٣٢ أثبت أن : المثلث الذى رؤوسه النقط ا = (٨ ، ٠) ، ب = (٠ ، ٦) ، حـ = (٠ ، ٠) قائم الزاوية ثم

أوجد معادلة الدائرة المارة برؤوسه.

٣٣ أثبت أن : النقط ا = (−٢ ، ٠) ، ب = (٤ ، ٠) ، حـ = (١ ، ٣√٣) رؤوس المثلث ا ب حـ

المتساوى الأضلاع ثم أوجد معادلة الدائرة المارة برؤوس هذا المثلث.

٣٤ أوجد معادلة الدائرة المارة بالنقط : ا = (٢ ، −١) ، ب = (−٢ ، ٠) ، حـ = (٠ ، −٩)

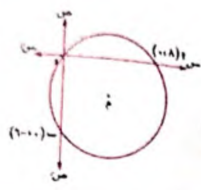
وعيّن مركزها وطول نصف قطرها.

٣٥ إذا كانت : ا = (٣ ، ٠) ، ب = (٠ ، ٩) ، حـ = (٠ ، ١) ، ء = (−١ ، ٢)

فأثبت أن : الشكل ا ب حـ ء رباعى دائرى.

٣٦ أوجد الصورة العامة لمعادلة الدائرة م فى كل من الأشكال الآتية :

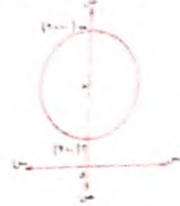
① الدائرة تمر بنقطة الأصل وتمر بالنقطتين ا ، ب



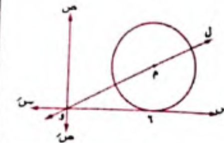
② الدائرة تمس محورى الإحداثيات فى ا ، ب وطول م‾و = ٢√٢



③ الدائرة مركزها يقع على محور الصادات وتقطع محور الصادات فى ا ، ب



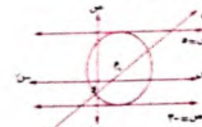
④ المستقيم معادلته : س − ٢ ص = ٠ يمر بمركز الدائرة وبنقطة الأصل.



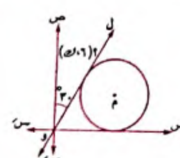
⑤ الدائرة تمس محور السينات عند ا وتقطع محور الصادات فى ب ، حـ



⑥ المستقيم ل : ٢ س − ٣ ص = ١ يمر بمركز الدائرة والمستقيمان ص = ٤ ، ص = −٢ يمسان الدائرة.



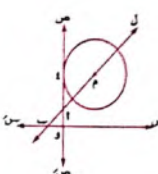
⑦ المستقيم ل يمس الدائرة عند النقطة ا (٦ ، ك) ويصنع زاوية قياسها ٣٠° مع الاتجاه الموجب لمحور الصادات والدائرة يمسها أيضًا محور السينات.



⑧ الدائرة تمس محور السينات عند ب وتمس المستقيم : س = ٢ عند حـ



⑨ الدائرة تمس محور الصادات عند النقطة (٠ ، ٤) والمستقيم ل يمر بمركز الدائرة والنقطة ا (٠ ، ٢) ، ب (−١ ، ٠)



٣٧ فى الشكل المقابل :

الدائرة م يمسها محورى الإحداثيات فى أ ، ب

فإذا كان المستقيم : ٤ س + ٣ ص − ١٢ = ٠

مماس للدائرة م عند حـ

أوجد معادلة الدائرة م



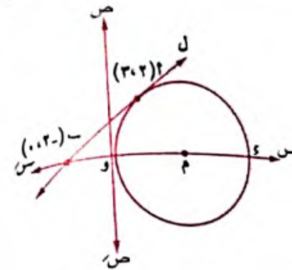
٣٨ فى الشكل المقابل :

المستقيم ل يمس الدائرة

عند أ (٢ ، ٣) ويقطع محور السينات

عند ب (−٢ ، ٠)

أوجد معادلة الدائرة م

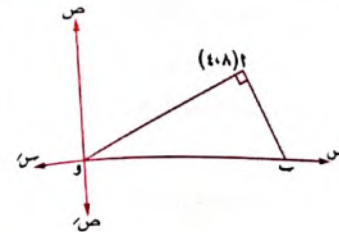


٣٩ فى الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{وأ} \perp \overline{أب}$

، أ = (٨ ، ٤)

أوجد معادلة الدائرة التى تمر بالنقط أ ، ب ، و



ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① المعادلة : (ك − ٢) س^{٢} + (٢ − ك) ص^{٢} − ك س + ٢ ك ص − ٢٥ = ٠

(أ) تمثل دائرة عندما ك = ٢ (ب) تمثل دائرة عندما ك ≠ ٢

(جـ) تمثل دائرة عندما ك ∈ ع (د) لا تمثل دائرة مهما كانت قيمة ك

② مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٦ وحدات طولية وقاعدته دائرة معادلتها : س^{٢} + ص^{٢} = ٦٤

فى محورى الإحداثيات س ، ص فإن حجم المخروط = ... وحدة مكعبة.

(أ) ٩٦ π (ب) $\frac{٦٤٠}{٣}$ π (جـ) ١٢٨ π (د) $\frac{١٢٨}{٣}$ π

③ أقل بُعد بين محور الصادات ونقطة على الدائرة التى معادلتها (س − ٧)^{٢} + (ص − ٥)^{٢} = ١٦

هو .... وحدة طولية.

(أ) ١١ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٧

④ عدد الدوائر التى تمس محورى الإحداثيات وتقع مراكزها على الدائرة س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥

يساوى ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

⑤ فى الشكل المقابل :

معادلة الدائرة هى ....

(أ) س^{٢} + ص^{٢} = ٤

(ب) س^{٢} + ص^{٢} = ١٦

(جـ) س^{٢} + ص^{٢} = ٦٤

(د) س^{٢} + ص^{٢} = ١٠٠



⑥ فى الشكل المقابل :

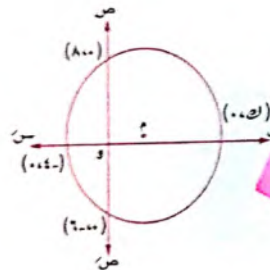
معادلة الدائرة هى ....

(أ) (س + ٤)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٦٥

(ب) (س − ٦)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ٦٤

(جـ) (س − ٤)^{٢} + (ص − ١)^{٢} = ٦٥

(د) (س − ٤)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ٦٤



⑦ إذا كانت و هى نقطة الأصل ، $\overleftrightarrow{وأ}$ ، $\overleftrightarrow{وب}$ مماسين للدائرة التى معادلتها :

س^{٢} + ص^{٢} − ١٠ س + ٤ ص + ٦ = ٠ فإن مركز الدائرة الخارجة عن Δ أ و ب هو ....

(أ) $\left(\frac{٧}{٤} ، ٢\right)$ (ب) $\left(\frac{٥}{٢} ، −١\right)$ (جـ) $\left(\frac{٧}{٤} ، −١\right)$ (د) $\left(\frac{٥}{٢} ، ٢\right)$

⑧ طول الوتر المشترك للدائرتين : س^{٢} + ص^{٢} − ١٠ س − ١٠ ص = ٠

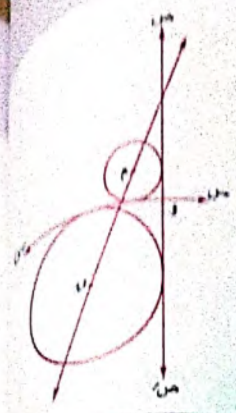
، س^{٢} + ص^{٢} + ٦ س + ٢ ص − ٤٠ = ٠ يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٥ $\sqrt{٢}$ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ١٠ $\sqrt{٢}$

٢ في الشكل المقابل :

إذا كانت كل من الدائرتين م ، ن تمس محورى الإحداثيات ومعادلة خط المركزين م ن هى : ص = ٢ س + ١

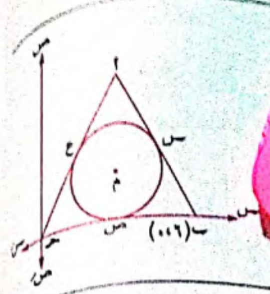
أوجد معادلة كل من الدائرتين م ، ن



٣ في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع مرسوم خارج الدائرة م

أوجد معادلة الدائرة م

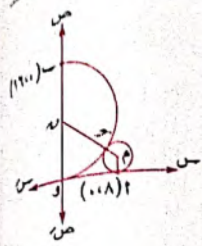


٤ في الشكل المقابل :

نصف دائرة مركزها ن يقع على محور الصادات ، وتمس دائرة م عند النقطة حـ ، محور السينات يمس الدائرة م عند أ

حيث أ = (٨ ، ٠) ، ب = (٠ ، ١٦)

أوجد الصورة العامة لمعادلة الدائرة م



تطبيقات حياتية

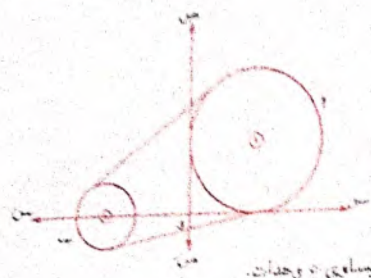
١ تخطيط المدن : فى رسم لإحدى المدن على مستوى إحداثى متعامد كل وحدة فيه تمثل ٥ أمتار ، وجد أن الدائرة : $س^2 + ص^2 - ٦ س + ٨ ص + ١١ = ٠$ تحدد أحد ميادينها ، أوجد لأقرب متر مربع مساحة هذا الميدان. $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$ «١١٠٠ م٢»

٢ الملاحة البحرية : يقع رادار عند الموقع أ (٧ ، -٩) ويغطى منطقة دائرية طول نصف قطرها يساوى ٣٠ وحدة طول. اكتب معادلة الدائرة التى تحد مجال عمل الرادار فى المستوى الإحداثى. هل يمكن للرادار رصد سفينة فى الموقع ب (٢٥ ، -٣٠) ؟ فسر إجابتك.

٣ التصميم المعمارى : صمم مهندس معمارى مبنى قاعدته على شكل ثمانى منتظم ، تمر برؤوسه الدائرة : $س^2 + ص^2 - ٤ س + ١٢ ص - ٦٠ = ٠$.

احسب مساحة قاعدة المبنى لأقرب وحدة مربعة. «٢٠٠ $\sqrt{2}$ وحدة مربعة»

٤ الربط بالصناعة : يوضح الشكل المقابل بكرة أ فى آلة تمس محورى الإحداثيات ، تدور بواسطة سير ، يمر على بكرة صغيرة ب معادلة دائرتها : $س^2 + ص^2 + ١٤ س + ٤٥ = ٠$.



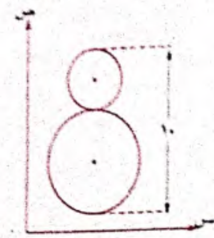
أوجد :

(١) معادلة دائرة البكرة أ إذا كان طول نصف قطرها يساوى ٥ وحدات.

(٢) البعد بين مركزى البكرتين إذا كان كل وحدة من المستوى الإحداثى تمثل ٦ سم «٧٨ سم»

٥ الصناعة : يبين الشكل المقابل ترسين فى آلة مركزاهما يقعان على مستقيم يوازى محور الصادات وأقصى بعد بين حافتيهما ١٠ وحدات.

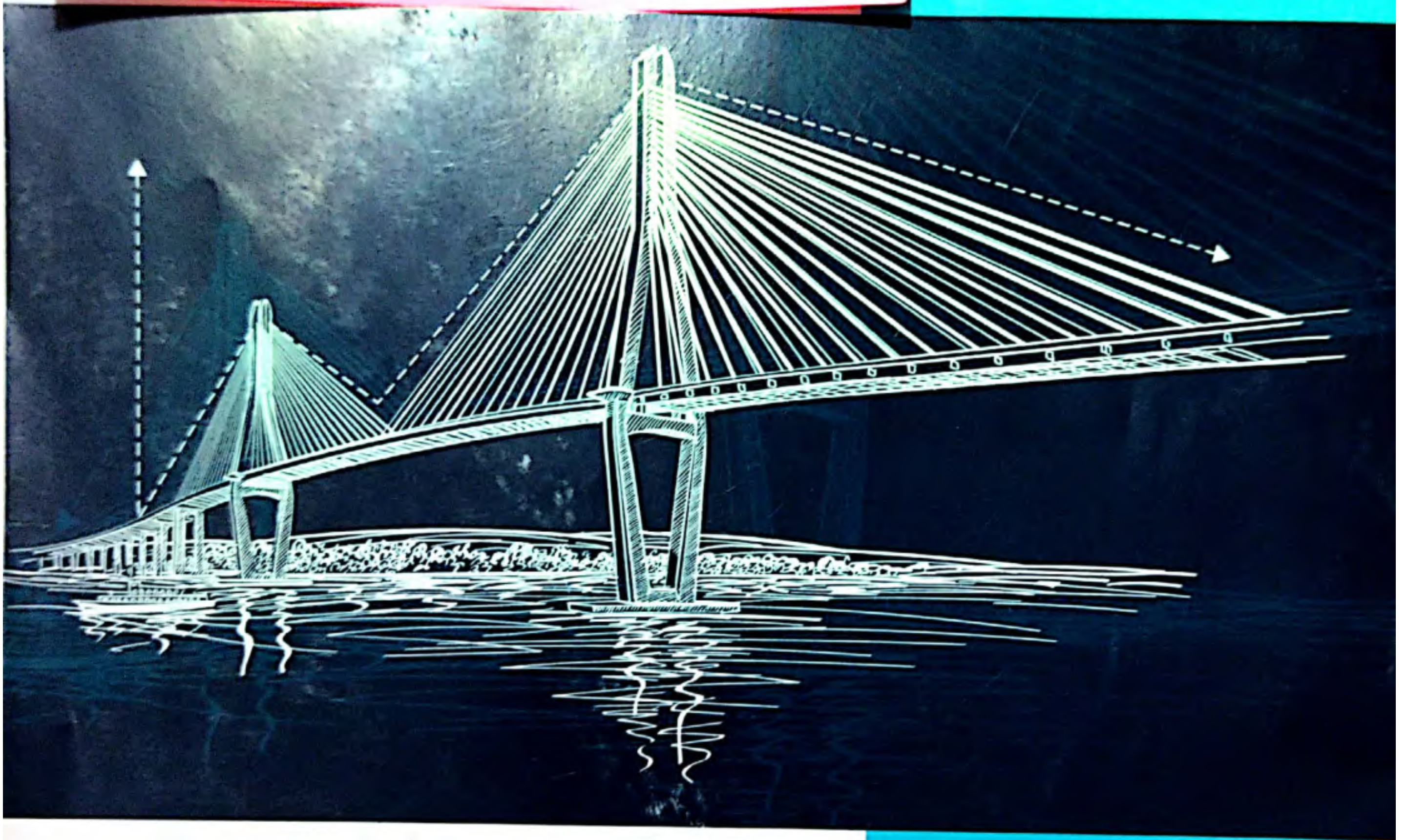
أوجد معادلة الترس الأصغر علمًا بأن معادلة الترس الأكبر هى : $س^2 + ص^2 - ١٠ س - ٨ ص + ٣٢ = ٠$.



تطبيقات
الرياضيات

الجزء الخاص بالامتحانات





2022

المعاصر

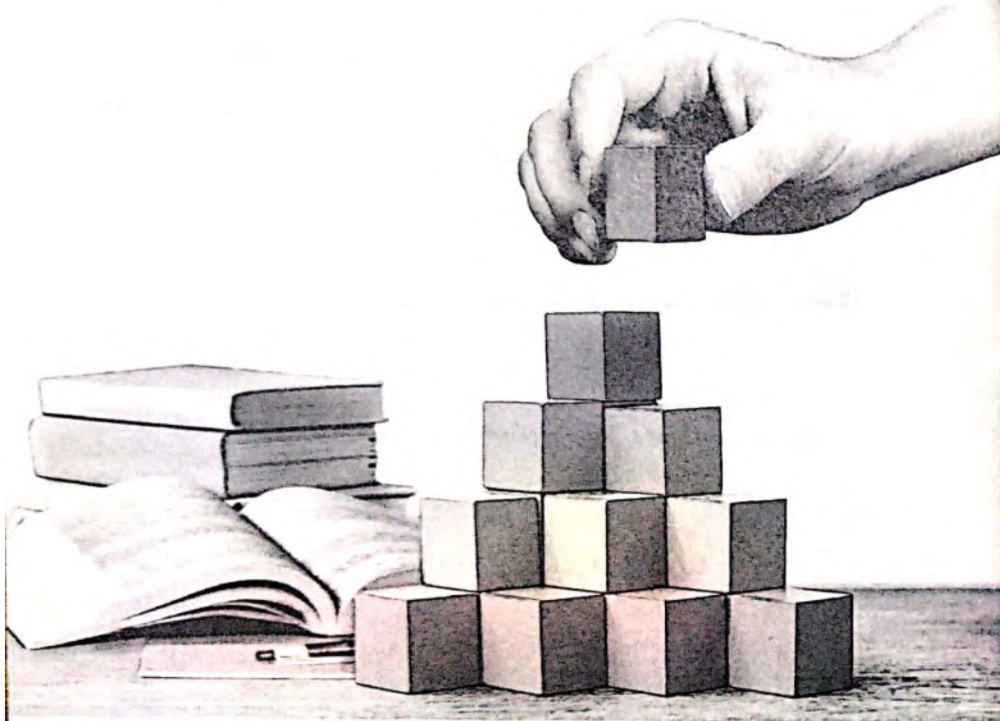
إعداد نخبة من خبراء التعليم

الصف الثانى الثانوى
القسم العلمى
الفصل الدراسى الأول

محتويات الكتاب



الاختبارات التراكمية القصيرة



- **أولًا** : اختبارات تراكمية قصيرة فى الاستاتيكا.
- **ثانيًا** : اختبارات تراكمية قصيرة فى الهندسة والقياس.

الدرجة الكلية ١٠

اختبار 1 على درس 1 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٤ درجات (كل جزئية درجة)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $\overrightarrow{ق_1} = ٢\overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$ حيث $ق_1$ ، $ق_2$ مقيسة بالنيوتن فإن مقدار محصلتهما ....

(أ) $\sqrt{٢}$ (ب) $\sqrt{٥}$ (جـ) $\sqrt{١٣}$ (د) ٥

(٢) قوتان متساويتان فى المقدار تؤثران فى نقطة وقياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{٣}$ ومقدار محصلتهما ٣ نيوتن فإن مقدار كل منهما .... بالنيوتن.

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\sqrt{٣}$ (جـ) ٣ (د) $٣\sqrt{٣}$

(٣) إذا بلغت محصلة قوتين تؤثران فى نقطة قيمتها العظمى ، فإن قياس الزاوية بينهما يساوى ....

(أ) صفر° (ب) ٦٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٨٠°

(٤) مقدار محصلة قوتين مقداراهما ٣ ، ٥ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٦٠° يساوى .... نيوتن.

(أ) ٢ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

السؤال الثانى ٣ درجات

قوتان مقداراهما $ق$ ، ٤ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية ، وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° ، فإذا كان مقدار محصلتهما يساوى $٤\sqrt{٣}$ نيوتن ، فأوجد مقدار $\overrightarrow{ق}$ وقياس الزاوية التى تصنعها المحصلة مع $\overrightarrow{ق}$

السؤال الثالث ٣ درجات

قوتان مقداراهما ٤ ، $ق$ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° ومحصلتهما عمودية على القوة الأولى. أوجد قيمة : $ق$

الدرجة الكلية ١٠

اختبار 2 على درس 2,1 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٤ درجات (كل جزئية درجة)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ٣ $ق$ ، ٢ $ق$ ومقدار محصلتهما ٥ $ق$ ، فيكون قياس الزاوية بينهما ....

(أ) صفر° (ب) ٦٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٨٠°

(٢) حللت القوة $\overrightarrow{ح}$ إلى قوتين $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ وتصنعان مع $\overrightarrow{ح}$ زاويتين قياساهما $هـ_1$ ، $هـ_2$ من جهتيها على الترتيب فإن مقدار $\overrightarrow{ق_1}$ هو ....

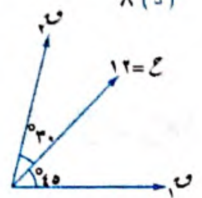
(أ) $\frac{ح \text{ جا } هـ_1}{\text{جا }(هـ_1 + هـ_2)}$ (ب) $\frac{ح \text{ جا } هـ_2}{\text{جا }(هـ_1 - هـ_2)}$

(جـ) $\frac{ح \text{ جا } هـ_2}{\text{جا }(هـ_1 + هـ_2)}$ (د) $\frac{ح \text{ جا }(هـ_1 + هـ_2)}{\text{جا } هـ_2}$

(٣) قوتان متساويتان فى المقدار ، قياس الزاوية بينهما ٩٠° ومقدار محصلتهما يساوى ٨ نيوتن ، فإن مقدار كل منهما بوحدة النيوتن ....

(أ) $٢\sqrt{٢}$ (ب) ٤ (جـ) $٤\sqrt{٢}$ (د) ٨

(٤) فى الشكل الموضح :



$ق_1$ = ...

(أ) ١٢ حتا ٧٥° (ب) ١٢ حتا ٤٥°

(جـ) ٦ قا ٤٥° (د) ٦ قتا ٧٥°

السؤال الثانى ٣ درجات

قوتان مقداراهما ٤ ، $ق$ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٣٥° فإذا كان اتجاه محصلتهما يميل على القوة $ق$ بزاوية قياسها ٤٥° ، أوجد $ق$ ، ومقدار محصلتهما.

السؤال الثالث ٣ درجات

حلل قوة مقدارها ١٠٠ نيوتن فى اتجاهين ، أحدهما يميل على القوة بزاوية قياسها ٦٠° ، والآخر يميل بزاوية قياسها ٣٠° من الناحية الأخرى.

اختبار 3 من درس 1 حتى درس 3 من الوحدة الأولى

١٠

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٤ درجات (كل جزئية درجة)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا وضع جسم وزنه (و) على مستوى مائل يميل على الأفقى بزاوية هـ فإن مركبة وزنه فى اتجاه المستوى تساوى ....

(أ) و ضا هـ (ب) و جا هـ (جـ) و ظا هـ (د) و

(٢) قوتان متعامدتان مقداراهما ١٢ نيوتن ، ٥ نيوتن تؤثران فى نقطة فإن مقدار محصلتهما = ... نيوتن.

(أ) ١٧ (ب) ٧ (جـ) ١٣ (د) ١٤

(٣) إذا كان : $\overleftarrow{ق_١}$ = ٣ $\overleftarrow{س}$ − ٢ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ = أ $\overleftarrow{س}$ − $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٣}$ = ٤ $\overleftarrow{س}$ − ب $\overleftarrow{ص}$ ومحصلتهم $\overleftarrow{ح}$ = ٦ $\overleftarrow{س}$ − ٤ $\overleftarrow{ص}$ فإن : أ + ب = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) صفر (د) −١

(٤) إذا كان : $\overleftarrow{ق_١}$ = ٥ $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ = ٧ $\overleftarrow{س}$ − ٥ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ح}$ محصلتهما فإن : $\|\overleftarrow{ح}\|$ = ...

(أ) $\sqrt{٥}$ + $\sqrt{٧٤}$ (ب) ٤٩ (جـ) ١٣ (د) $\sqrt{١٢}$ − $\sqrt{٥}$

السؤال الثانى ٣ درجات

ثلاث قوى مستوية مقاديرها : ٨٥ ، ٧٥ ، ٥٠ $\sqrt{٢}$ ث.كجم تؤثر فى نقطة مادية الأولى فى اتجاه الشرق والثانية فى اتجاه ٣٠° غرب الشمال والثالثة فى اتجاه الجنوب الغربى. أوجد مقدار واتجاه المحصلة.

السؤال الثالث ٣ درجات

قوتان تؤثران فى نقطة مادية ، فإذا كانت أكبر قيمة لمحصلتهما ٣٢ ث.كجم ، وكانت أصغر قيمة لمحصلتهما ١٢ ث. كجم ، أوجد مقدار كل من القوتين ، ثم أوجد مقدار محصلتهما إذا كان قياس الزاوية بين القوتين = ٦٠°

اختبار 4 من درس 1 حتى درس 4 من الوحدة الأولى

١٠

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٤ درجات (كل جزئية درجة)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) ثلاث قوى متساوية فى المقدار ومتلاقية فى نقطة ومتزنة فإن قياس الزاوية بين أى قوتين = ...

(أ) ٦٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

(٢) القيمة العظمى والقيمة الصغرى على الترتيب لمحصلة القوتين ٨ ، ١٣ نيوتن هما .... نيوتن.

(أ) ١٣ ، ٨ (ب) ١٣ ، ٥ (جـ) ٢١ ، ٨ (د) ٢١ ، ٥

(٣) قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ٥ ، ٣ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٦٠° فإن مقدار محصلتهما ح يساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ٥

(٤) قوتان متساويتان فى المقدار ومقدار محصلتهما ٣ نيوتن وقياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{٣}$ فإن مقدار كل منهما .... نيوتن.

(أ) $\sqrt{٣}$ (ب) ٣ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) ٣ $\sqrt{٣}$

السؤال الثانى ٣ درجات

وضع جسم وزنه ٣٠٠ ث.جم على مستوٍ مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ومُنع من الانزلاق بواسطة قوة تصنع مع اتجاه خط أكبر ميل للمستوى زاوية قياسها ٣٠° إلى أعلى ، أوجد مقدار القوة ومقدار رد فعل المستوى.

السؤال الثالث ٣ درجات

إذا كان $\overleftarrow{ق_١}$ = ٥ $\overleftarrow{س}$ + ٣ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ = أ $\overleftarrow{س}$ + ٦ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٣}$ = −١٤ $\overleftarrow{س}$ + ب $\overleftarrow{ص}$ ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة وكانت المحصلة $\overleftarrow{ح}$ = (١٠ $\sqrt{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$ π) فأوجد قيمتى : أ ، ب

الدرجة الكلية ١٠

اختبار 5 من درس 1 حتى درس 5 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٢ درجة

قوتان مقدارهما : ق ، ق $\sqrt{2}$ نيوتن ، تؤثران فى نقطة مادية ومحصلتهما عمودية على القوة الأولى. أوجد قياس الزاوية بين القوتين ، وأثبت أن مقدار محصلتهما يساوى ق

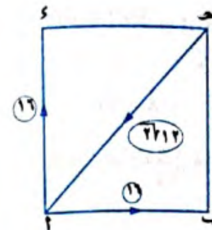
السؤال الثانى ٢ درجة

الشكل المقابل يمثل القوى : ١٦ ، ١٦ ، ١٢ $\sqrt{2}$ نيوتن

، والتى تؤثر فى المربع أ ب حـ ء فى الاتجاهات

$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{حـأ}}$ على الترتيب.

أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.



السؤال الثالث ٤ درجات

كرة منتظمة ملساء وزنها ١٠ ث.جم وطول نصف قطرها ٣٠ سم ، علقت من نقطة على سطحها بأحد طرفى خيط خفيف طوله ٣٠ سم ومثبت طرفه الآخر فى نقطة من حائط رأسى أملس.

أوجد فى وضع التوازن كلًا من :

الشد فى الخيط ورد فعل الحائط على الكرة.

السؤال الرابع ٢ درجة

ثلاث قوى مستوية مقاديرها : ٥ ، ١٠ ، ٤ $\sqrt{7}$ نيوتن تؤثر فى نقطة مادية ، فإذا كان قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية يساوى 60° فأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى لمحصلة القوى الثلاث.

الدرجة الكلية ١٠

اختبار 1 على درس 1 من الوحدة الثانية

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٥ درجات (كل جزئية درجة)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) جميع الحالات الآتية تعين مستوى ما عدا ....

(أ) مستقيمًا ونقطة لا تنتمى إليه. (ب) مستقيمين متوازيين مختلفين.

(جـ) مستقيمين متقاطعين. (د) مستقيمين متخالفين.

(٢) عدد المستويات التى تمر بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) عدد لا نهائى.

(٣) المستقيمان المتخالفان ....

(أ) لا يتقاطعان. (ب) لا يتعامدان.

(جـ) لا يتوازيان. (د) لا يتقاطعان ولا يتوازيان.

(٤) فى الشكل المقابل :

المستوى س $\cap$ المستوى ص $\cap$ المستوى أ ب حـ = ...

(أ) $\{أ\}$ (ب) المستقيم ل

(جـ) $\overleftrightarrow{\text{أحـ}}$ (د) $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

(٥) إذا كان : $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // المستوى س فإن : $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ $\cap$ س = ...

(أ) $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{أب}}$ (جـ) $\overline{\text{أب}}$ (د) $\varnothing$

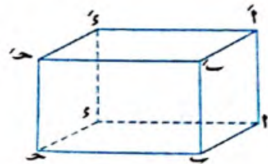
السؤال الثانى ٥ درجات (كل جزئية درجة)

باستخدام الشكل المقابل اذكر :

(١) مستويان متوازيان. (٢) مستويان متقاطعان.

(٣) مستقيمان متخالفان. (٤) مستقيم ومستوى متوازيان.

(٥) خط تقاطع المستوى أ ب ب' أ' مع المستوى أ حـ ء



الدرجة الكلية

١٠

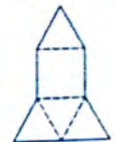
اختبار 2 من درس 2,1 من الوحدة الثانية

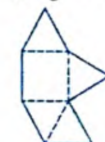
أجب عن الأسئلة الآتية :

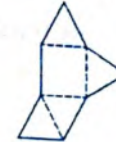
السؤال الأول ٤ درجات (كل جزئية درجة)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) أى الشبكات التالية لا تصنع هرمًا رباعيًا منتظمًا عند طيها ؟


(أ)


(ب)


(جـ)


(د)

(٢) إذا كان حجم هرم رباعى منتظم ١٢ سم^3 وارتفاعه ٤ سم
فإن طول حرف قاعدته .... سم.

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٣) هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٠ سم وارتفاعه الجانبى ١٣ سم فإن حجمه يساوى بوحدة سم^3 ....

(أ) $\frac{1}{3} \times (10)^2 \times 13$ (ب) $\frac{1}{3} \times (10)^2 \times 12$

(جـ) $\frac{1}{3} \times (12)^2 \times 13$ (د) $\frac{1}{3} \times (13)^2 \times 10$

(٤) إذا كان مجموع أطوال أحرف هرم ثلاثى منتظم الوجوه يساوى ١٨ سم
فإن مساحته الكلية = ... سم^2

(أ) $\frac{27\sqrt{2}}{4}$ (ب) $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ (جـ) $\frac{27\sqrt{3}}{2}$ (د) $9\sqrt{3}$

السؤال الثانى ٣ درجات (كل جزئية درجة ونصف)

هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ٢٠ سم وارتفاعه $10\sqrt{3}$ سم أوجد :

(١) المساحة الجانبية. (٢) حجم الهرم.

السؤال الثالث ٣ درجات

هرم سداسى منتظم طول ضلع قاعدته ١٢ سم وارتفاعه الجانبى $10\sqrt{3}$ سم أوجد مساحته الكلية.

الدرجة الكلية

١٠

اختبار 3 من درس 1 حتى درس 3 من الوحدة الثانية

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٤ درجات (كل جزئية درجة)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) المساحة الجانبية لمخروط قائم طول نصف قطر قاعدته ٦ سم وارتفاعه ٨ سم تساوى .... سم^2.

(أ) ٦٠ π (ب) ٢٨ π (جـ) ١٠ π (د) ٤٨ π

(٢) هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٠ سم ، ارتفاعه الجانبى ١٣ سم
فإن مساحته الجانبية = ...

(أ) ٢٦٠ سم^2 (ب) ٣٦٠ سم^2 (جـ) ١٣٠ سم^2 (د) ٥٢٠ سم^2

(٣) عدد المستويات التى تمر بثلاث نقط على استقامة واحدة = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٣ (د) عدد لا نهائى.

(٤) حجم هرم رباعى منتظم محيط قاعدته ٣٦ سم وارتفاعه ١٠ سم يساوى .... سم^3

(أ) ٨١٠ (ب) ١٨٠ (جـ) ٣٦٠ (د) ٢٧٠

السؤال الثانى ٣ درجات

هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٨ سم فإذا كان حجمه ١٢٩٦ سم^3 ، فأوجد ارتفاعه الجانبى ومساحته الجانبية.

السؤال الثالث ٣ درجات

أوجد طول نصف قطر قاعدة مخروط دائرى قائم مساحته الكلية ٦١٦ π سم^2 وطول راسمه ٣٠ سم

الامتحانـات النهائيـة



◄ **أولًا** : امتحان الكتاب المدرسى.

◄ **ثانيًا** : نماذج الامتحانات النهائية.

◄ **ثالثًا** : نماذج امتحانات بنظام أسئلة الاختيار من متعدد.



يمكنك حل الامتحانات الإلكترونية عن طريق مسح الكود الخاص بكل امتحان

الدرجة الكلية ــــ / ١٠

اختبار 4 من درس 1 حتى درس 4 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٤ درجات (كل جزئية درجة)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مركز الدائرة : $س^2 + ص^2 - ٦ س + ٨ ص =$ صفر هو النقطة ....

(أ) (٣ ، −٤) (ب) (٤ ، −٣) (جـ) (−٣ ، ٤) (د) (−٤ ، ٣)

(٢) محيط الدائرة التى معادلتها : $(س - ٣)^2 + (ص + ٢)^2 = ٢٥$ يساوى .... وحدة طولية.

(أ) ٢ π (ب) ٣ π (جـ) ١٠ π (د) ٢٥ π

(٣) المساحة الجانبية لمخروط قائم طول نصف قطر قاعدته ٦ سم وارتفاعه ٨ سم تساوى .... $سم^2$

(أ) ٦٠ π (ب) ٢٨ π (جـ) ١٠ π (د) ٤٨ π

(٤) النقطة التى تقع على الدائرة : $(س - ٢)^2 + ص^2 = ١٣$ هى ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٣ ، −٢) (جـ) (٢ ، ٥) (د) (٤ ، ٣)

السؤال الثانى ٣ درجات

أوجد الصورة العامة لمعادلة الدائرة التى مركزها م (−٢ ، ٥) وتمر بالنقطة (٣ ، ٢)

السؤال الثالث ٣ درجات

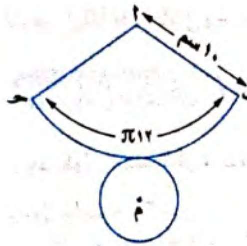
الشكل المقابل يمثل شبكة مجسم حيث

طول $\overset{\frown}{ب حـ} = ١٢ \pi$ سم

، أ ب = ١٠ سم احسب :

(١) المساحة الكلية لهذا المجسم.

(٢) حجم المجسم.





أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ٣ ق ، ٢ ق ومقدار محصلتهما ٥ ق ، فيكون قياس الزاوية بينهما ....

(أ) صفر (ب) ٦٠° (جـ) ٢٠° (د) ١٨٠°

(٢) جميع الحالات الآتية تعين مستوى ما عدا ....

(أ) مستقيمًا ونقطة لا تنتمى إليه. (ب) مستقيمين متوازيين مختلفين.

(جـ) مستقيمين متقاطعين. (د) مستقيمين متخالفين.

(٣) النقطة التى تقع على الدائرة : (س − ٢)^{٢} + ص^{٢} = ١٣ هى ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٣ ، −٢) (جـ) (٢ ، ٥) (د) (٤ ، ٣)

(٤) قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ٥ ، ٣ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٦٠° فإن مقدار محصلتهما ح يساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ٥

---

٢ (أ) إذا كان : $\overline{ق_١}$ = ٥ $\overline{س}$ + ٣ $\overline{ص}$ ، $\overline{ق_٢}$ = أ $\overline{س}$ + ٦ $\overline{ص}$ ، $\overline{ق_٣}$ = −١٤ $\overline{س}$ + ب $\overline{ص}$ ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة وكانت المحصلة $\overline{ح}$ = (١٠ $\sqrt{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$ π)

فأوجد قيمتى : أ ، ب

(ب) وضع جسم وزنه ٣٠٠ ث جم على مستوٍ مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ومُنع من الانزلاق بواسطة قوة تصنع مع اتجاه خط أكبر ميل للمستوى زاوية قياسها ٣٠° إلى أعلى ، أوجد مقدار القوة ومقدار رد فعل المستوى.

٣ (أ) أوجد الصورة العامة لمعادلة دائرة مركزها (٢ ، −١) وطول نصف قطرها ٣ سم.

(ب) كرة منتظمة ملساء وزنها ١٠ ث.جم وطول نصف قطرها ٣٠ سم علقت من نقطة على سطحها بأحد طرفى خيط خفيف طوله ٣٠ سم ومثبت طرفه الآخر فى نقطة من حائط رأسى أملس.

أوجد فى وضع التوازن كلًّا من : الشد فى الخيط ورد فعل الحائط على الكرة.

---

٤ (أ) مكعب من الشمع طول حرفه ٣٠ سم حول إلى مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٤٥ سم ، أوجد طول نصف قطر قاعدة المخروط إذا علم أن ٨ ٪ من الشمع قد فقد أثناء عمليتى الصهر والتحويل.

(ب) قضيب منتظم طوله ١٠٠ سم ووزنه ١٥٠ ث.جم عُلِّق من طرفيه تعليقًا حرًا بواسطة خيطين ، ثُبت طرفاهما فى نقطة واحدة ، فإذا كان طولا الخيطين : ٨٠ سم ، ٦٠ سم فأوجد مقدار الشد فى كل منهما.

---

٥ (أ) أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم أثرت قوى مقاديرها ٨ ، ٦ $\sqrt{٣}$ ، ٥ ، ٤ $\sqrt{٣}$ نيوتن فى $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ ، $\overline{أء}$ ، $\overline{أهـ}$ على الترتيب. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

(ب) $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٤٠ سم وزنه ٣٠ نيوتن متصل بمفصل فى حائط رأسى عند أ حفظ القضيب فى وضع أفقى بواسطة خيط خفيف ، يتصل بطرف القضيب عند ب وبنقطة حـ على الحائط تعلو رأسيًا بمسافة ٤٠ سم أوجد كلًّا من الشد ورد الفعل عند أ

النموذج الأول

امتحان تفاعلي ١

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ مخروط قائم طول راسمه يساوي طول قطر قاعدته فإن مساحته الكلية ....

(أ) ٤ π نق^2 (ب) ٣ π نق^2 (جـ) ٢ π نق^2 (د) ٤ π نق

٢ إذا كانت : أ ، ب ، حـ ثلاث نقط تعين مستوى فإن ....

(أ) أب = ب حـ = حـ أ (ب) أب + ب حـ = أحـ

(جـ) أب + ب حـ > أحـ (د) أب + ب حـ < أحـ

٣ قوتان متساويتان في المقدار محصلتهما ٣ نيوتن وقياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{٢}$

فإن مقدار كل منهما يساوي .... نيوتن.

(أ) $\sqrt{٣}$ (ب) ٣ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) ٣ $\sqrt{٢}$

٤ الشكل المقابل يمثل شبكة هرم رباعي منتظم ارتفاعه (ع)

فإن العلاقة بين س ، ص ، ع هي ....

(أ) س^2 + ص^2 = ع^2

(ب) س^2 + ع^2 = ص^2

(جـ) $\left(\frac{س}{٢}\right)^2$ + ع^2 = ص^2

(د) $\left(\frac{س}{٢}\right)^2$ + ص^2 = ع^2

٥ إذا كان الشكل المقابل يوضح اتزان جسم تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية في نقطة مقاديرها $ق_1$ ، $ق_2$ ، $ق_3$ نيوتن وأضلاع المثلث القائم توازي خطوط عمل هذه القوى وفي ترتيب دوري واحد فإن : $ق_1$: $ق_2$: $ق_3$ = ...

(أ) ٣ : ٤ : ٥ (ب) ٣ : ٥ : ٤

(جـ) ٤ : ٥ : ٣ (د) ٤ : ٣ : ٥

٦ أ ب حـ ء هـ و شكل سداسي منتظم ، أثرت القوى ٢ ، ٤ $\sqrt{٣}$ ، ٨ ، ٢ $\sqrt{٣}$ ، ٤ ث.كجم في الاتجاهات أب ، أحـ ، أء ، أهـ ، أو على الترتيب

أوجد المحصلة مقدارًا واتجاهًا.

٧ هرم رباعي منتظم حجمه ٤٠٠ سم^3 وارتفاعه ١٢ سم

فإن مساحته الجانبية = ... سم^2

(أ) ٢٤٠ (ب) ٢٦٠ (جـ) ٣٠٠ (د) ٣٦٠

٨ مخروط دائري قائم مساحة قاعدته ٣٦ π سم^2 ، وطول راسمه ١٠ سم.

أوجد :

(١) مساحته الجانبية. (٢) مساحته الكلية. (٣) حجمه.

٩ في الشكل المقابل :

إذا كانت : حـ (٨ ، ٠) ، ء (٢ ، ٠)

فإن معادلة الدائرة هي ....

(أ) (س − ٥)^2 + (ص − ٤)^2 = ٢٥

(ب) (س + ٥)^2 + (ص − ٤)^2 = ٣٦

(جـ) (س − ٥)^2 + (ص − ٤)^2 = ٣٦

(د) (س + ٥)^2 + (ص − ٤)^2 = ٢٥

١٠ قوتان مقدارهما ٦ ، ق ث.كجم تؤثران في نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٣٥°

إذا كان خط عمل المحصلة يميل بزاوية قياسها ٤٥° على خط عمل القوة التي مقدارها ق

فإن مقدار المحصلة = ... ث.كجم

(أ) ٦ (ب) ٦ $\sqrt{٢}$ (جـ) ٦ $\sqrt{٣}$ (د) ١٠

١١ وضع جسم وزنه (و) نيوتن على مستوى يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠°

وحفظ الجسم في حالة توازن بتأثير قوة مقدارها ٣٦ نيوتن تعمل في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى فإن مقدار وزن الجسم = ... نيوتن

(أ) ٣٦ (ب) ٧٢ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٧٢ (د) ٣٦ $\sqrt{٣}$

١٢ إذا كانت : $\vec{ح}$ هى محصلة القوتين $\vec{ق_1}$ ، $\vec{ق_2}$ وكانت $\vec{ح'}$ هى محصلة القوتين $\vec{ق_1}$ ، $-\vec{ق_2}$

فإن : ....

(أ) $\vec{ح} + \vec{ح'} = ٢\, \vec{ق_1}$

(ب) $\vec{ح} = \vec{ح'} + ٢\, \vec{ق_2}$

(جـ) $ح^2 + ح'^2 = ٢\,(ق_1^2 + ق_2^2)$

(د) كل ما سبق.

---

١٣ معادلة الدائرة التى هى صورة الدائرة : $س^2 + ص^2 - ١٢\,س + ٦\,ص + ٢٠ =$ صفر

بالانتقال (٢ ، −٢)

(أ) $س^2 + ص^2 - ١٠\,س + ٤\,ص + ٢٠ = ٠$

(ب) $س^2 - ١٦\,س + ١٠\,ص + ٢٠ = ٠$

(جـ) $(س - ٦)^2 + (ص + ٣)^2 = ٢٠$

(د) $(س - ٨)^2 + (ص + ٥)^2 = ٢٥$

---

١٤ قوة مقدارها ٥ $\sqrt{٣}$ نيوتن تؤثر فى اتجاه ٣٠° شرق الشمال حُللت إلى مركبتين متعامدتين

فإن مقدار المركبة فى اتجاه الشرق = ... نيوتن.

(أ) ٥ (ب) $٧\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٥\sqrt{٣}}{٢}$ (د) ١٥

---

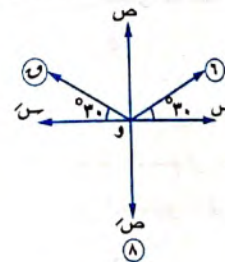
١٥ $\overline{أب}$ قضيب منتظم وزنه ٢٠ ث.كجم متصل طرفه أ بمفصل مثبت فى حائط رأسى أثرت عليه قوة أفقية ق عند ب فاتزن القضيب وهو يميل على الرأسى بزاوية قياسها ٣٠°

أوجد مقدار كل من القوة ورد الفعل.

---

١٦ إذا كانت محصلة القوى الموضحة بالشكل المقابل بوحدة النيوتن تؤثر فى محور ص

فإن : ق = ... نيوتن.



(أ) ٨ (ب) ٦

(جـ) ١٤ (د) ٢

١٧ مكعب من الشمع طول حرفه ٢٠ سم صُهر وحُوِّل إلى مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٢١ سم فإن طول نصف قطر قاعدة المخروط علمًا بأن ١٢ ٪ من الشمع فقد أثناء عمليتى الصهر والتحويل = ... سم $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$

(أ) $\frac{٢٠\sqrt{١١٠}}{١١}$ (ب) $١٠\sqrt{٢}$ (جـ) ١٦٠ (د) $٨\sqrt{٥}$

---

١٨ الشكل المقابل يمثل شبكة مخروط حيث إن

قياس الزاوية المركزية للقطاع الدائرى = θ

حيث ١٨٠° < θ < ٣٦٠°

فإن : ....



(أ) ل < ٢ نق (ب) ل = نق

(جـ) ل = ٢ نق (د) ل > ٢ نق

---

١٩ أى مجموعات القوى الآتية لا يمكن أن تكون متزنة ؟

(أ) ١٠ نيوتن ، ١٠ نيوتن ، ٥ نيوتن. (ب) ٤ نيوتن ، ٦ نيوتن ، ٨ نيوتن.

(جـ) ١١ نيوتن ، ٧ نيوتن ، ٨ نيوتن. (د) ٨ نيوتن ، ٤ نيوتن ، ١٤ نيوتن.

---

٢٠ إذا كانت المعادلة $(س \quad ص \quad ٢٥)\begin{pmatrix} س \\ ص \\ -٤ \end{pmatrix} = \square$ تمثل معادلة دائرة

فإن طول قطرها = ... وحدة طولية.

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ١٠٠ (د) ٢٠٠

---

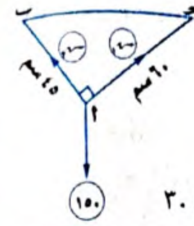
٢١ قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ٥ ق ، ٣ ق فإن مقدار محصلتهما لا يمكن أن يساوى ....

(أ) ٢ ق (ب) $٣\sqrt{٢}$ ق (جـ) ٨ ق (د) $٥\sqrt{٣}$ ق

٢٢ في الشكل المقابل :

جسم وزنه ١٥٠ ث.جم متزن بربطه بخيطين متعامدين طولاهما ٦٠ سم ، ٤٥ سم وطرفا الخيطين حـ ، ب على خط أفقي واحد

فإن : $ش_1 - ش_2$ = ... ث.جم



(أ) ١٢٠ (ب) ٩٠ (جـ) ٦٠ (د) ٣٠

٢٣ يكون المستقيمان متخالفين إذا كانا ....

(أ) غير متوازيين. (ب) غير متقاطعين.

(جـ) غير منطبقين. (د) لا يجمعهما مستوى.

٢٤ النقطة التي تقع على الدائرة $(س - ٢)^2 + ص^2 = ١٣$ هي ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٣ ، -٢) (جـ) (٢ ، ٠) (د) (٤ ، ٣)



امتحان تفاعلي ٢

النموذج الثاني

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تعين ....

(أ) مستوى واحدًا. (ب) مستويين. (جـ) ٣ مستويات. (د) ٤ مستويات.

٢ إذا كانت القوتان ٦ ، ٨ نيوتن متعامدتين فإن جيب زاوية ميل المحصلة على القوة الأولى يساوي ....

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

٣ مركز الدائرة : $س^2 + ص^2 - ٦س + ٨ص = ٠$ هو النقطة ....

(أ) (٣ ، -٤) (ب) (-٤ ، ٣) (جـ) (-٣ ، ٤) (د) (-٣ ، -٤)

٤ ثلاث قوى متساوية في المقدار ومتلاقية في نقطة ومتزنة فإن قياس الزاوية بين أي قوتين هو ....

(أ) ٦٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٥٠°

٥ حجم مخروط قائم محيط قاعدته ٤٤ سم وارتفاعه ١٥ سم = ... سم^3 $(\pi \simeq \frac{٢٢}{٧})$

(أ) ٧٧ (ب) ١٠٥ (جـ) ١١٠ (د) ٧٧٠

٦ قوتان متساويتان في المقدار ومتلاقيتان في نقطة ومقدار محصلتهما يساوي ١٢ ث.كجم وإذا عكس اتجاه إحداهما فإن مقدار المحصلة يساوي ٦ ث.كجم

أوجد مقدار كل من القوتين.

٧ قوى مستوية مقاديرها ٢ ق ، ٣ ق ، ٤ ق ث.جم تؤثر في نقطة ، في اتجاهات موازية لأضلاع مثلث متساوي الأضلاع في ترتيب دوري واحد.

فإن مقدار محصلة هذه القوى = ... ث.جم

(أ) ٥ ق (ب) $٢\sqrt{٣}$ ق (جـ) $\sqrt{٣}$ ق (د) ق

٨ أ ب حـ ء هـ و شكل سداسي منتظم ، أثرت قوة مقدارها ٢٠ نيوتن في اتجاه $\overrightarrow{أء}$

حُللت هذه القوة إلى مركبتين في الاتجاهين $\overrightarrow{أحـ}$ ، $\overrightarrow{أو}$ فإن مركبة هذه القوة في اتجاه $\overrightarrow{أو}$ تساوي .... نيوتن.

(أ) ١٠ (ب) $١٠\sqrt{٣}$ (جـ) ٢٠ (د) $١٠\sqrt{٢}$

٩ معادلة الدائرة التي مركزها (٢ ، -٣) وتمس المستقيم الذي معادلته :

$٣س - ٤ص + ٢ = ٠$ هي ....

(أ) $(س - ٢)^2 + (ص + ٣)^2 = ٢$ (ب) $(س + ٢)^2 + (ص - ٣)^2 = ٤$

(جـ) $س^2 + ص^2 - ٤س + ٦ص = ١٢$ (د) $(س - ٢)^2 + (ص + ٣)^2 = ١٦$

١٠ إذا تضاعف طول ضلع قاعدة هرم رباعي منتظم فإن حجمه ....

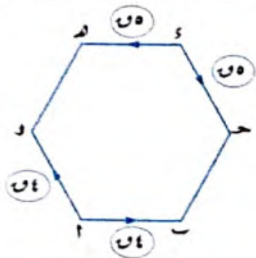
(أ) يتضاعف. (ب) يتضاعف ثلاث مرات.

(ب) يتضاعف أربع مرات. (د) لا يتغير.

١١ في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء هـ و شكل سداسي منتظم

فإن محصلة القوى تكون في اتجاه ....



(أ) $\overline{أء}$ (ب) $\overline{ءأ}$

(جـ) $\overline{حـأ}$ (د) $\overline{أهـ}$

١٢ هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ٤٠ سم وارتفاعه الجانبي ٢٥ سم.

أوجد : (١) ارتفاع الهرم. (٢) المساحة الجانبية.

(٣) المساحة الكلية. (٤) حجم الهرم.

---

١٣ إذا كانت : ق١ = ٥ س - ٣ ص ، ق٢ = -٧ س + ٢ ص ، ق٣ = ٢ س + ص فإن : ح = ...

(أ) ٧ س - ٢ ص (ب) ٤ س - ٤ ص

(جـ) -١٤ س + ٤ ص (د) صفر

---

١٤ أزيحت كرة بندول وزنها ٦٠٠ داين حتى صار الخيط يصنع زاوية قياسها ٣٠° مع الرأسي تحت تأثير قوة على الكرة في اتجاه عمودي على الخيط.

فإن مقدار القوة = ... داين.

(أ) ٣٠٠√٣ (ب) ١٢٠٠ (جـ) ٣٠٠ (د) ٣٠٠√٢

---

١٥ قوتان ق ، ق تؤثران في نقطة مادية ومحصلتهما ق

فإن قياس الزاوية بين القوتين = ...

(أ) ٦٠° (ب) ٤٥° (جـ) ١٢٠° (د) ١٣٥°

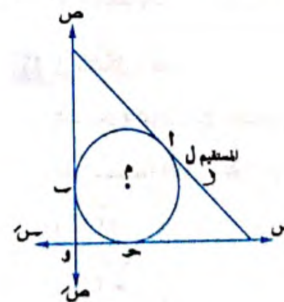
---

١٦ طويت قطعة من الورق المقوى على شكل قطاع دائري طول نصف قطر دائرته ٣٦ سم وقياس زاويته ٢١٠° لتصنع مخروطًا دائريًا قائمًا.

أوجد ارتفاع المخروط.

---

١٧ في الشكل المقابل :



إذا كانت معادلة المستقيم ل هي س/٨ + ص/٦ = ١

فإن معادلة الدائرة هي ......

(أ) (س - ٢)² + (ص - ٢)² = ٤

(ب) (س - ٢)² + (ص - ٢)² = ١٦

(جـ) (س + ٢)² + (ص + ٢)² = ٤

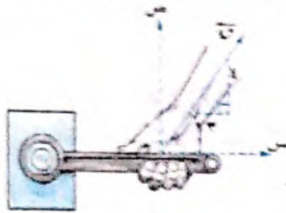
(د) (س + ٢)² + (ص + ٢)² = ١٦

١٨ النسبة بين حجم هرم ثلاثي منتظم وحجم أكبر مخروط يمكن وضعه بداخل الهرم تساوي ......

(أ) ٣√٣ / π (ب) ٣√٣ / ٢π (جـ) √٣ / π (د) ٣√٣ / ٤π

---

١٩ في الشكل المقابل :



إذا كانت المركبة الصادية للقوة (ق)

لشخص يستخدم مفتاحًا للربط هي ٦٠ نيوتن

فإن المركبة السينية للقوة ق تساوي ...... نيوتن.

(أ) ٣٠ (ب) ٤٥ (جـ) ٦٠ (د) ٧٥

---

٢٠ قوتان مقداراهما ٤ ، ٦ نيوتن ومقدار محصلتهما ١٠ نيوتن فإن قياس الزاوية بين القوتين يساوي ......

(أ) صفر° (ب) ٩٠° (جـ) ١٨٠° (د) ٤٥°

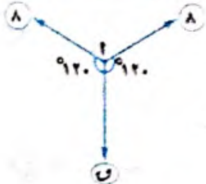
---

٢١ المساحة الجانبية للمخروط القائم الذي طول نصف قطر قاعدته نق وطول راسمه ل تساوي ......

(أ) ٢ π ل نق (ب) ٢ π ل نق² (جـ) π ل نق (د) π ل نق²

---

٢٢ في الشكل المقابل :



أ نقطة مادية متزنة تحت تأثير القوى الثلاثة الموضحة بالشكل

حيث ق تتزن مع قوتين مقدار كل منهما ٨ نيوتن وتصنع مع كل منهما زاوية قياسها ١٢٠° فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) صفر (ب) ٨ (جـ) ١٦ (د) ٨ جا ١٢٠°

---

٢٣ مركز الدائرة : س² + ص² - ٦ س + ٨ ص = ٠ هو النقطة ......

(أ) (٣ ، -٤) (ب) (٤ ، -٣) (جـ) (-٣ ، ٤) (د) (-٤ ، ٣)

٢٤ أى الجمل الآتية غير صحيحة ؟

(أ) أى نقطتين فى الفراغ يمر بهما مستوى واحد فقط.

(ب) أى ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة فى الفراغ تعين مستوى.

(جـ) رؤوس المثلث تعين مستوى.

(د) كل مستقيمين متقاطعين يحتويهما مستوى واحد فقط.



امتحان تفاعلى ٣

النمـــوذج الثالث

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ٥ ، ٣ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٦٠°

فإن مقدار محصلتهما ح يساوى .... نيوتن.

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٨

---

٢ مخروط دائرى قائم ارتفاعه ١٢ سم وطول راسمه ١٥ سم يكون حجمه .... سم³

(أ) ٣٢٤ π (ب) ٧١٥ π (جـ) ٣٢ π (د) ١٨٠ π

---

٣ القيمة الصغرى لمحصلة قوتين مقداراهما ٥ ، ٩ نيوتن ومتلاقيتان فى نقطة تساوى .... نيوتن.

(أ) صفر (ب) ٩ (جـ) ٤ (د) ٥

---

٤ أقل عدد من المستويات التى تحدد مجسمًا هو ....

(أ) ٣ مستويات. (ب) ٤ مستويات. (جـ) مستويان. (د) ٥ مستويات.

---

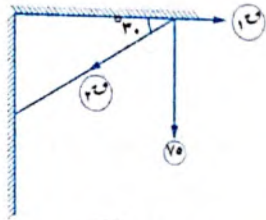
٥ علق ثقل مقداره ٢٠٠ ث.جم بخيطين طولاهما ٦٠ سم ، ٨٠ سم من نقطتين على خط أفقى واحد البعد بينهما ١٠٠ سم. أوجد مقدار الشد فى كل من الخيطين.

---

٦ هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٨ سم وارتفاعه الجانبى ١٥ سم فإن حجمه = ... سم³

(أ) ١١٥٦ (ب) ١٢٥٤ (جـ) ١٣٠٨ (د) ١٢٩٦

٧ فى الشكل المقابل :



حُللت القوة الرأسية ٧٥ نيوتن إلى مركبتين إحداهما أفقية ق١ والأخرى ق٢

فإن : ق٢ = ... نيوتن

(أ) ٧٥ (ب) ٧٥√٣ (جـ) ١٥٠ (د) ١٥٠√٣

---

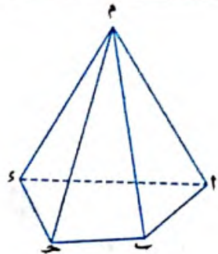
٨ قوتان مقداراهما ٦ ، ١٢ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٢٠°

فإن قياس الزاوية التى تصنعها المحصلة مع القوة الأولى = ...

(أ) ١٢٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ٣٠°

---

٩ فى الشكل المقابل :



المستوى أ ب ء ∩ المستوى م حـ ء = ...

(أ) $\overleftrightarrow{\text{م أ}}$ (ب) $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ (جـ) {ء} (د) $\overleftrightarrow{\text{م حـ}}$

---

١٠ أثرت القوى ٨ ، ٤√٣ ، ٦√٣ ، ١٤ نيوتن فى نقطة مادية وكان قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية ٣٠° وبين الثانية والثالثة ١٢٠° وبين الثالثة والرابعة ٩٠° مرتبة فى اتجاه دورى واحد. أوجد محصلة هذه القوى مقدارًا واتجاهًا.

---

١١ شكل سداسى منتظم مركزه الهندسى نقطة الأصل ومساحته ٣√٣ سم²

فإن معادلة الدائرة التى تمر برؤوسه هى ....

(أ) $س^{٢} + ص^{٢} = ٢$ (ب) $س^{٢} + ص^{٢} = ٤$

(جـ) $س^{٢} + ص^{٢} = ٦$ (د) $س^{٢} + ص^{٢} = ٨$

١٢ فى الشكل المقابل :



مخروط دائرى قائم فيه : ق (د أ م ب) = ٣٠°

، طول نصف قطر القاعدة = ٥ سم

فإن مساحته الكلية = ... سم^٢

(أ) ٥٠ π (ب) ٧٥ π

(ﺟ) ١٠٠ π (د) ١٢٥ π

---

١٣ قوتان ٦ ، ٢,٥ نيوتن ومحصلتهما تساوى ٦,٥ نيوتن فإن الزاوية بين القوتين تكون ....

(أ) حادة. (ب) منفرجة. (ﺟ) قائمة. (د) مستقيمة.

---

١٤ وضع جسم وزنه ١٠٠ نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ فى حالة توازن بواسطة قوة أفقية مقدارها ق نيوتن وكان رد فعل المستوى على الجسم ر نيوتن فإن : ق + ر = ... نيوتن.

(أ) ١٠٠ √٣ (ب) $\frac{١٠٠ √٣}{٣}$ (ﺟ) ٢٠٠ √٣ (د) $\frac{٢٠٠ √٣}{٣}$

---

١٥ هرم ثلاثى منتظم الوجوه إذا كان مجموع أطوال أحرفه = ٣٦ سم فإن ارتفاع الهرم = ... سم

(أ) √٦ (ب) ٢ √٦ (ﺟ) ٦ (د) ٤

---

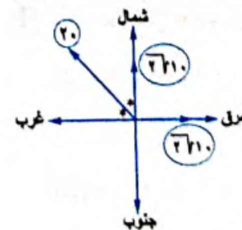
١٦ أثبت أن الدائرتين : س^٢ + ص^٢ − ٢ س + ٦ ص + ١ = ٠

، ٤ س^٢ + ٤ ص^٢ − ٨ س + ٢٤ ص + ١٥ = ٠ متحدتا المركز

، أوجد طول نصف قطر كل منهما.

---

١٧ فى الشكل المقابل :



محصلة القوى ١٠ √٢ ، ١٠ √٢ ، ٢٠ نيوتن تؤثر فى اتجاه ....

(أ) شمال الشرق. (ب) الشمال.

(ﺟ) غرب الشمال. (د) غرب الجنوب.

١٨ إذا كان حجم نصف كرة طول نصف قطرها نق يساوى حجم مخروط طول نصف قطر قاعدته (نق) وارتفاعه (ع) فإن ....

(أ) ع = $\frac{٢}{٣}$ نق (ب) ع = ٢ نق (ﺟ) ع = ٢ نق^٢ (د) ع = ٤ نق

---

١٩ شرط اتزان مجموعة القوى المقابلة هو ....



(أ) ق = ١٠ نيوتن.

(ب) ق = ١٠ √٢ نيوتن.

(ﺟ) ق = ٥ √٢ نيوتن.

(د) المجموعة لا يمكن أن تتزن.

---

٢٠ محيط الدائرة التى معادلتها : س^٢ + ص^٢ = ٨ هو ....

(أ) ٨ π (ب) ٦٤ π (ﺟ) ٢ √٢ π (د) ٤ √٢ π

---

٢١ ينطبق المستويان إذا اشتركا فى ....

(أ) نقطة واحدة. (ب) نقطتين.

(ﺟ) ٣ نقاط على استقامة واحدة. (د) ٣ نقاط ليست على استقامة واحدة.

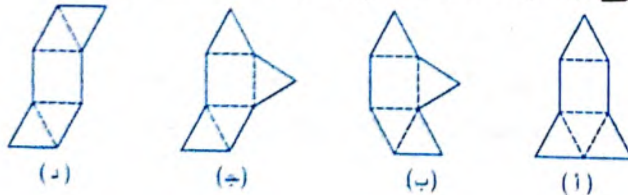
---

٢٢ قوة مقدارها ٤ √٢ نيوتن تعمل فى اتجاه الشرق تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مركبتها فى اتجاه الشمال الشرقى تساوى .... نيوتن.

(أ) صفر (ب) ٤ √٢ (ﺟ) ٤ (د) ٦

---

٢٣ أى الشبكات التالية لا تصنع هرمًا رباعيًا منتظمًا عند طيها ؟



٢٤ إذا اتزن جسم تحت تأثير قوتين $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ فإن : ....

(أ) $\overrightarrow{ق_1} = \overrightarrow{ق_2}$ (ب) $ق_1 = ق_2$

(جـ) $\overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2} \neq \vec{0}$ (د) $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ ليسا على استقامة واحدة.

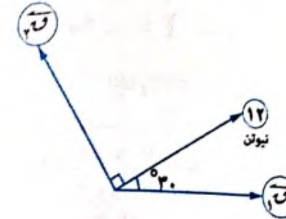
النمــوذج الرابع

امتحان تفاعلى ٤



أجب عن الأسئلة الآتية :

١ فى الشكل المقابل :



حللت القوة التى مقدارها ١٢ نيوتن إلى مركبتين $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ تصنعان معها زاويتين قياساهما ٣٠° ، ٩٠°.

فإن : $ق_2$ = ... نيوتن.

(أ) ١٠ (ب) ١٠$\sqrt{3}$ (جـ) ٦$\sqrt{3}$ (د) ٤$\sqrt{3}$

---

٢ هرم رباعى منتظم ارتفاعه ٩ سم ، حجمه ٣٠٠ سم^3 يكون طول ضلع قاعدته يساوى .... سم.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ١٥ (د) ٢٠

---

٣ قوتان متعامدتان مقدارهما ١٢ نيوتن ، ٥ نيوتن تؤثران فى نقطة فإن مقدار محصلتهما .... نيوتن.

(أ) ٥ (ب) ١٢ (جـ) ١٣ (د) ١٧

---

٤ أ ب جـ د مستطيل فيه : أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم. أخذت نقطة هـ على $\overline{أد}$ بحيث أ هـ = ٦ سم ، أثرت القوى التى مقاديرها ق ، ٥ ، ك ، ٦$\sqrt{10}$ نيوتن فى الاتجاهات $\overrightarrow{جـ ب}$ ، $\overrightarrow{جـ أ}$ ، $\overrightarrow{جـ د}$ ، $\overrightarrow{هـ جـ}$ على الترتيب فإذا كانت مجموعة القوى متزنة.
أوجد قيمة كل من : ق ، ك

٥ جميع الحالات الآتية تعين مستوى ما عدا ....

(أ) مستقيمًا ونقطة لا تنتمى إليه. (ب) مستقيمين متوازيين مختلفين.

(جـ) مستقيمين متقاطعين. (د) مستقيمين متخالفين.

---

٦ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه أ ب = ٣ سم ، ب جـ = ٤ سم فإن حجم الجسم الناشئ من دوران المثلث أ ب جـ دورة كاملة حول $\overleftrightarrow{ب جـ}$ هو .... سم^3

(أ) ١٦ π (ب) ١٨ π (جـ) ١٥ π (د) ١٢ π

---

٧ مخروط دائرى قائم قاعدته أفقية تستند على مستوى الإحداثيات ومعادلتها $س^2 + ص^2 = 36$ فإذا كان ارتفاع المخروط ٨ وحدات طول.

أوجد : (١) حجم المخروط. (٢) مساحته الكلية.

---

٨ المعادلة $(س \quad ص \quad 8)\begin{pmatrix} س \\ ص \\ -2 \end{pmatrix} = \boxed{}$ تمثل دائرة طول قطرها = ... وحدة طولية.

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

---

٩ قوتان مقدارهما ٤ ، ق نيوتن تؤثران فى نقطة مادية قياس الزاوية بينهما ١٢٠°
فإذا كانت المحصلة عمودية على القوة الأولى فإن مقدار المحصلة = ... نيوتن.

(أ) ٤$\sqrt{2}$ (ب) ٤$\sqrt{3}$ (جـ) ٤ (د) ٤$\sqrt{5}$

---

١٠ علق جسم وزنه (و) نيوتن بواسطة خيطين خفيفين يميلان على الرأسى بزاويتين قياساهما هـ° ، ٣٠° فاتزن الجسم عندما كان مقدار الشد فى الخيط الأول ١٢ نيوتن والخيط الثانى ١٢$\sqrt{3}$ نيوتن فإن وزن الجسم (و) = ... نيوتن.

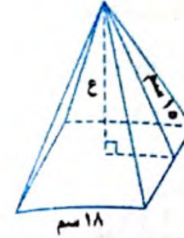
(أ) ٦٠ (ب) ٢٥ (جـ) ٣٦ (د) ٢٤

---

١١ إذا كان $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ قوتين فإن قياس الزاوية بين القوة $\overrightarrow{ق_1}$ ومحصلة القوتين $(\overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2})$ ، $(\overrightarrow{ق_1} - \overrightarrow{ق_2})$ يساوى ....

(أ) صفر (ب) $طا^{-1}\left(\frac{ق_1}{ق_2}\right)$ (جـ) $طا^{-1}\left(\frac{ق_2}{ق_1}\right)$ (د) $طا^{-1}\left(\frac{ق_1 - ق_2}{ق_1 + ق_2}\right)$

١٢ في الشكل المقابل :



حجم الهرم الرباعي المنتظم الذي طول ضلع قاعدته ١٨ سم ، وارتفاعه الجانبي ١٥ سم هو .... سم^3

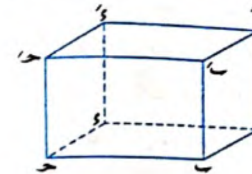
(أ) ١٢٩٦ (ب) ١٦٢٠
(جـ) ٥٤٠ (د) ١٩٤٤

---

١٣ أوجد معادلة الدائرة المارة بالنقطتين (١ ، ٣) ، (٢ ، −٤) ويقع مركزها على محور السينات.

---

١٤ في الشكل المقابل :

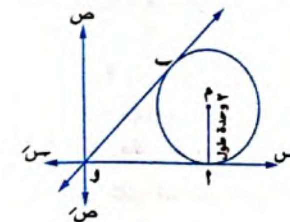


المستوى أ أَ بَ ∩ المستوى أَ جـَ = ...

(أ) $\overleftrightarrow{أأَ}$ (ب) $\overleftrightarrow{ببَ}$
(جـ) $\overleftrightarrow{جـجـَ}$ (د) $\overleftrightarrow{أَجـَ}$

---

١٥ في الشكل المقابل :



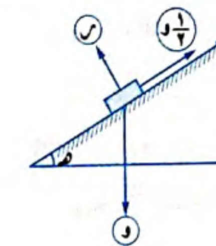
إذا كان : و ب = ٥ وحدة طول

فإن معادلة الدائرة م هي ....

(أ) (س − ٢)^2 + (ص − ٥)^2 = ٢٥
(ب) (س − ٢)^2 + (ص − ٥)^2 = ٤
(جـ) (س − ٥)^2 + (ص − ٢)^2 = ٢٥
(د) (س − ٥)^2 + (ص − ٢)^2 = ٤

---

١٦ في الشكل المقابل :



إذا كان الجسم متزنًا تحت تأثير القوى المبينة بالشكل

فإن : ق (د هـ) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠°
(جـ) ٤٥° (د) ١٥°

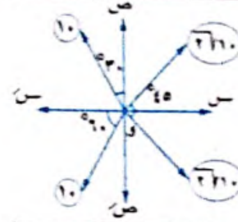
١٧ مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ٥ سم ومساحته الكلية ٩٠ π سم^2

فإن حجمه = ... سم^3

(أ) ١٠٥ π (ب) ٩٥ π (جـ) ١٠٠ π (د) ١٢٠ π

---

١٨ في الشكل المقابل :



محصلة القوى ح = ... نيوتن.

(أ) ٢٠ (ب) ١٠√٢
(جـ) ١٠ (د) صفر

---

١٩ المعادلة $\begin{vmatrix} س & -ص \\ ص & س \end{vmatrix}$ = ٣٦ تمثل معادلة دائرة طول نصف قطرها يساوي .... وحدة طولية.

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ١٨

---

٢٠ ثلاث قوى متساوية في المقدار ومتلاقية في نقطة ومتزنة فإن قياس الزاوية بين أي قوتين = ...

(أ) ٦٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

---

٢١ النسبة بين طول حرف الهرم الثلاثي المنتظم الوجوه وارتفاعه = ...

(أ) √٢ : √٣ (ب) √٣ : ٢ (جـ) √٦ : ٢ (د) √٣ : ٢

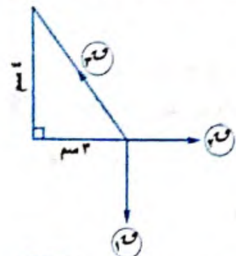
---

٢٢ قوتان مقداراهما ٨ ، ق ث.جم وقياس الزاوية بينهما ∈]٠ ، π[، محصلتهما تنصف الزاوية بينهما فإن : ق = ... ث.جم

(أ) ٢√٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٦

---

٢٣ إذا كان الشكل المقابل يوضح اتزان جسم تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية في نقطة مقاديرها ق$_1$ ، ق$_2$ ، ق$_3$ نيوتن وأضلاع المثلث القائم توازي خطوط عمل هذه القوى وفي ترتيب دوري واحد فإن : ق$_1$: ق$_2$: ق$_3$ = ...



(أ) ٣ : ٤ : ٥ (ب) ٣ : ٥ : ٤
(جـ) ٤ : ٥ : ٣ (د) ٤ : ٣ : ٥

٢٤ فى الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ قضيب منتظم وزنه و يتصل بطرفه أ فى مفصل مثبت فى حائط رأسى أملس ، $\overline{بحـ}$ خيط خفيف مثبت أحد طرفيه فى ب والطرف الآخر فى نقطة حـ على الحائط الرأسى أعلى أ



فإن رد فعل المفصل ....

(أ) يكون فى اتجاه $\overleftarrow{أب}$ (ب) عموديًا على $\overline{بحـ}$

(جـ) عموديًا على الحائط. (د) ينصف $\overline{بحـ}$



النمــوذج الخامس

امتحان تفاعلى ٥

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ يكون المستقيمان متخالفين إذا كانا ....

(أ) غير متوازيين. (ب) غير متقاطعين.

(جـ) غير منطبقين. (د) لا يجمعهما مستوى واحد.

---

٢ المساحة الجانبية لمخروط قائم طول نصف قطر قاعدته ٦ سم ، ارتفاعه ٨ سم تساوى .... سم^2

(أ) ٦٠ π (ب) ٢٨ π (جـ) ١٠ π (د) ٤٨ π

---

٣ قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ٥ ق ، ٢ ق ومقدار محصلتهما ٧ ق فيكون قياس الزاوية بينهما ....

(أ) ١٨٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٢٠° (د) صفر°

---

٤ إذا كانت $\overrightarrow{ق}$ تتزن مع قوتين متعامدتين مقداراهما ٨ نيوتن ، ١٥ نيوتن

فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٧ (ب) ١٧ (جـ) ٢٣ (د) ٧ $\sqrt{٢}$

٥ إذا كان : $\overrightarrow{ق_1}$ = ٥ $\overrightarrow{س}$ + ٢ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ = أ $\overrightarrow{س}$ + ٦ $\overrightarrow{ص}$

، $\overrightarrow{ق_3}$ = −١٤ $\overrightarrow{س}$ + ب $\overrightarrow{ص}$ ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة

وكانت المحصلة $\overrightarrow{ح}$ = (١٠ $\sqrt{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}\pi$) فإن : أ + ب = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) صفر (د) ١٤

---

٦ مخروط دائرى قائم مساحته الكلية ٩٦ π سم^2 وطول راسمه ١٠ سم

أوجد طول نصف قطر قاعدته ثم أوجد حجمه.

---

٧ كرة منتظمة ملساء طول نصف قطرها ١٠ سم ووزنها ٣٠ ث جم علقت من نقطة على سطحها بأحد طرفى خيط خفيف طوله ١٠ سم مثبت طرفه الآخر على حائط رأسى أملس.

أوجد فى وضع التوازن الشد فى الخيط ورد فعل الحائط.

---

٨ المساحة الكلية للهرم الثلاثى المنتظم الوجوه الذى طول حرفه ل سم تساوى .... سم^2

(أ) ٢ $\sqrt{٣}$ ل^2 (ب) $\sqrt{٣}$ ل^2 (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ل^2 (د) ٣ $\sqrt{٢}$ ل^2

---

٩ هرم رباعى منتظم مساحة أى وجه من أوجهه الجانبية تساوى مساحة قاعدته فإذا كان طول ضلع قاعدة الهرم = ٦ سم فإن حجم الهرم = ... سم^3

(أ) ٣٦ (ب) ٦ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٣٦ $\sqrt{١٥}$ (د) ٢١٦ $\sqrt{١٥}$

---

١٠ أ ب حـ ء مربع طول ضلعه = ١٠ سم ، هـ منتصف $\overline{أب}$ ، أثرت القوى ٢ ، ٧ $\sqrt{٥}$ ، ٤ $\sqrt{٢}$ ، ٤ نيوتن فى الاتجاهات $\overleftarrow{حـب}$ ، $\overleftarrow{حـهـ}$ ، $\overleftarrow{حـأ}$ ، $\overleftarrow{حـء}$ على الترتيب.

أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

---

١١ قوتان مقداراهما ق ، ق $\sqrt{٣}$ نيوتن متلاقيان فى نقطة وكانت محصلتهما = ح$_1$ عندما كانت قياس الزاوية بينهما ٩٠° ثم أصبحت محصلتهما = ح$_2$ عندما كانت قياس الزاوية بينهما ١٥٠° فإن : ....

(أ) ح$_1$ = ح$_2$ (ب) ح$_1$ = ٢ ح$_2$ (جـ) ح$_1$ = $\frac{٣}{٥}$ ح$_2$ (د) ح$_1$ = $\frac{١}{٢}$ ح$_2$

١٢ الصورة العامة لمعادلة دائرة قطرها $\overline{أب}$ حيث : أ(٢ ، ٣) ، ب(-٤ ، ٩) هي ....

(أ) $س^2 + ص^2 - ٤ س - ٦ ص + ١٨ = ٠$

(ب) $(س + ٤)^2 + (ص - ٩)^2 = ٧٢$

(ج) $س^2 + ص^2 - ٢ س + ١٢ ص + ١٩ = ٠$

(د) $س^2 + ص^2 + ٢ س - ١٢ ص + ١٩ = ٠$

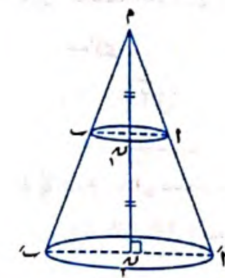
---

١٣ قوتان القيمة العظمى لمحصلتهما ٢٥ نيوتن والقيمة الصغرى لمحصلتهما ١٣ نيوتن. فإن مقداراهما .... نيوتن.

(أ) ٢٥ ، ١٣ (ب) ١٩ ، ٦ (ج) ١٣ ، ١٢ (د) ٧ ، ٢٠

---

١٤ في الشكل المقابل :

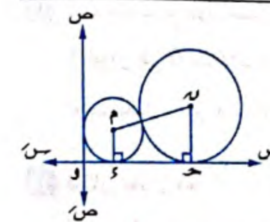


النسبة بين المساحة الجانبية للمخروط م أ ب إلى المساحة الجانبية للمخروط م أَ بَ تساوى ....

(أ) ١ : ٢ (ب) ١ : ٤ (ج) ١ : ٦ (د) ١ : ٨

---

١٥ في الشكل المقابل :

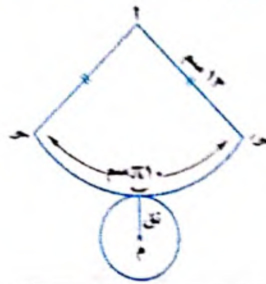


م ، ن دائرتان متماستان من الخارج معادلتاهما $(س - ٢)^2 + (ص - ٢)^2 = ٤$ ، $(س - أ)^2 + (ص - ب)^2 = ٦٤$

فإن : أ + ب = ...

(أ) ٨ (ب) ١٠ (ج) ١٨ (د) ٢٨

١٦ الشبكة التي أمامك تصف مجسمًا ، حجمه = ... سم³



(أ) ٢٥ π (ب) ٥٠ π (ج) ٧٥ π (د) ١٠٠ π

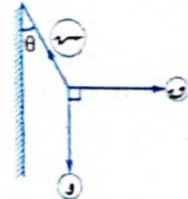
---

١٧ قوة مقدارها ٤٠ نيوتن تؤثر رأسيًا لأعلى تم تحليلها إلى مركبتين إحداهما أفقية ومقدارها ٢٠ نيوتن فإن مقدار المركبة الثانية = ...

(أ) ٢٠ (ب) $٢٠\sqrt{٢}$ (ج) ١٠ (د) $٢٠\sqrt{٥}$

---

١٨ في الشكل المقابل :



علق ثقل مقداره (و) نيوتن في طرف خيط مثبت طرفه الآخر في حائط رأسي وشُد الثقل بقوة أفقية مقدارها ق نيوتن حتى أصبح الخيط مائلًا على الحائط بزاوية قياسها θ

أي الجمل الآتية غير صحيح في وضع الاتزان ؟

(أ) ق = و ظا θ (ب) $\overline{و} + \overline{ق} + \overline{ش} =$ صفر

(ج) $ش^2 = ق^2 + و^2$ (د) ش = ق + و

---

١٩ حللت القوة $\overline{ح}$ إلى قوتين $\overline{ق_١}$ ، $\overline{ق_٢}$ وتصنعان مع $\overline{ح}$ زاويتان قياسيهما $هـ_١$ ، $هـ_٢$ من جهتيها على الترتيب فإن مقدار $\overline{ق_١}$ هو ....

(أ) $\frac{ح جا هـ_١}{جا(هـ_١ + هـ_٢)}$ (ب) $\frac{ح جا هـ_٢}{جا(هـ_١ - هـ_٢)}$

(ج) $\frac{ح جا هـ_٢}{جا(هـ_١ + هـ_٢)}$ (د) $\frac{ح جا(هـ_١ + هـ_٢)}{جا هـ_٢}$

---

٢٠ ثلاث قوى مستوية ومتلاقية في نقطة متزنة فإذا كان ٧ ، ٣ نيوتن مقداري قوتين منهم فإن مقدار القوة الثالثة يمكن أن يساوى .... نيوتن.

(أ) ١١ (ب) ٢ (ج) ٥ (د) ٣

٢١ إذا قطعنا هرم رباعي منتظم بمستوى يوازي قاعدته فإن المقطع الحادث يكون ....

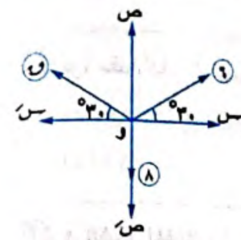
(أ) مثلث. (ب) مربع. (جـ) مستطيل. (د) دائرة.

٢٢ النقطة التي تقع على الدائرة : $س^٢ + (ص - ٣)^٢ = ١٦$ هي ....

(أ) (صفر ، ٣) (ب) (٣ ، -٢) (جـ) (٢ ، صفر) (د) (٤ ، ٣)

٢٣ إذا كانت محصلة القوى (بالنيوتن) الموضحة بالشكل المقابل تؤثر في محور الصادات

فإن : ق = ... نيوتن



(أ) ٢ (ب) ٦

(جـ) ٨ (د) ١٤

٢٤ في الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ قضيب منتظم متصل بمفصل أ على حائط رأسى حفظ أفقيًا بواسطة خيط مربوط من نقطة ب والطرف الآخر للخيط مربوط في نقطة حـ على الحائط الرأسى أعلى أ

أى مما يأتى هو مثلث القوى ؟



(أ) Δ ء ب هـ (ب) Δ ء هـ أ

(جـ) Δ أ ء هـ (د) Δ أ حـ ء

النمـــوذج السادس

امتحان تفاعلى ٦



أجب عن الأسئلة الآتية :

١ المساحة الجانبية للمخروط القائم الذي طول نصف قطر قاعدته نق وطول راسمه ل تساوى ....

(أ) ٢ π ل نق (ب) ٢ π ل $نق^٢$ (جـ) π ل نق (د) π ل $نق^٢$

٢ أى قوتين مما يأتى لا يمكن أن يكون مقدار محصلتهما ٤ نيوتن ؟

(أ) ٢ نيوتن ، ٤ نيوتن. (ب) ٣ نيوتن ، ٣ نيوتن.

(جـ) ٢ نيوتن ، ٦ نيوتن. (د) ٣ نيوتن ، ٨ نيوتن.

٣ النقطة التي تقع على الدائرة $(س - ٢)^٢ + ص^٢ = ١٣$ هي ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٣ ، -٢) (جـ) (٢ ، ٥) (د) (٤ ، ٣)

٤ عدد المستويات التي تحمل أوجه الهرم الخماسي هو ....

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ١٠ (د) عدد لا نهائي.

٥ في الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٢٠ سم ووزنه ٣٠ نيوتن متصل بمفصل مثبت في حائط رأسي عند أ والطرف ب مربوط بخيط خفيف طوله ٢٠ $\sqrt{٢}$ سم مثبت طرفه الآخر عند حـ على الحائط أعلى أ فإذا اتزن القضيب أفقيًا فإن رد فعل المفصل على القضيب ....



(أ) في اتجاه $\overleftarrow{أب}$ (ب) خط عمله يبعد عن الحائط مسافة ١٠ سم

(جـ) ينصف $\overline{حـ ب}$ (د) مقداره ١٥ نيوتن.

٦ علق ثقل مقداره ٣٤٠ نيوتن بواسطة خيطين طولاهما ١٦ سم ، ٣٠ سم من نقطتين في خط أفقي واحد البعد بينهما ٣٤ سم. فإن الشد في الخيطين على الترتيب يساوي .... نيوتن.

(أ) ١٠٠ $\sqrt{٣}$ ، ٦٠ $\sqrt{٣}$ (ب) ١٥٠ $\sqrt{٢}$ ، ٨٠ $\sqrt{٢}$

(جـ) ٣٠٠ ، ١٦٠ (د) ٣٠٠ ، ١٠٠

٧ الصورة العامة لمعادلة الدائرة التي مركزها (٥ ، -٤) وتمس محور السينات هي ....

(أ) $س^٢ + ص^٢ - ١٠ س + ٨ ص + ٢٥ = ٠$

(ب) $س^٢ + ص^٢ - ٥ س + ٤ ص = ٠$

(جـ) $س^٢ + ص^٢ - ١٠ س + ٨ ص = ٢٥$

(د) $س^٢ + ص^٢ + ١٠ س - ٨ ص + ٢٥ = ٠$

٨ قضيب منتظم طوله ١٠٠ سم ووزنه ١٥٠ ث جم عُلّق من طرفيه تعليقًا حرًا بواسطة خيطين ، ثُبت طرفاهما في نقطة واحدة ، فإذا كان طولا الخيطين ٨٠ سم ، ٦٠ سم فأوجد مقدار الشد في كل منهما.

---

٩ إذا كانت $\overrightarrow{ح}$ محصلة القوتين $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ وكانت $\overrightarrow{ح} \perp \overrightarrow{ق_١}$ وكانت $ح = \frac{١}{٢} ق_٢$ فإن قياس الزاوية بين القوتين $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ هو ....

(أ) ٩٠° (ب) ١٢٠° (ج) ١٣٥° (د) ١٥٠°

---

١٠ هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ١٨ سم فإذا كان حجمه ١٢٩٦ سم^٣ أوجد ارتفاعه الجانبي ومساحته الجانبية.

---

١١ ثلاث قوى مقاديرها ٦٠ ، ق ، ك نيوتن متزنة ومتلاقية في نقطة ، فإذا كان قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية ١٢٠° وبين الثانية والثالثة ٩٠°

فإن : مقدار ك = ... نيوتن.

(أ) ٣٠$\sqrt{٣}$ (ب) ٣٠$\sqrt{٢}$ (ج) ٣٠ (د) ٦٠

---

١٢ مخروط قائم حجمه ٢٧ π سم^٣ ومحيط قاعدته ٦ π سم.

فإن ارتفاعه = ... سم

(أ) ٢٧ (ب) ٣ (ج) ٣$\sqrt{٣}$ (د) ٩

---

١٣ النسبة بين المساحة الجانبية للهرم الثلاثي المنتظم الوجوه إلى مساحته الكلية = ...

(أ) ١ : ٣ (ب) ١ : ٤ (ج) ٣ : ٤ (د) ١ : ٢

---

١٤ أ ب جـ د هـ و شكل سداسي منتظم. تؤثر القوى التي مقاديرها ٢ ، ٤$\sqrt{٣}$ ، ٤$\sqrt{٣}$ ، ٢ ث.كجم في نقطة أ في الاتجاهات $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أجـ}$ ، $\overleftarrow{أهـ}$ ، $\overleftarrow{أو}$ على الترتيب.

فإن محصلة هذه القوى تعمل في اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{أجـ}$ (ب) $\overleftarrow{أهـ}$ (ج) $\overleftarrow{أد}$ (د) $\overleftarrow{أو}$

---

١٥ طول القطعة المماسة المرسومة للدائرة $س^٢ + ص^٢ = نق^٢$ من النقطة (٠ ، ٢ نق) هو .... وحدة طول.

(أ) نق (ب) ٢ نق (ج) $\sqrt{٣}$ نق (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ نق

١٦ أ ب جـ مثلث متساوي الساقين فيه : أب = أجـ = ١٠ سم ، ب جـ = ١٢ سم دار دورة كاملة حول قاعدته $\overline{ب جـ}$ احسب حجم الجسم الناشئ من الدوران.

---

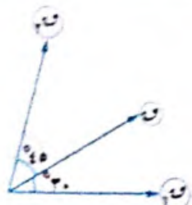
١٧ أ ب جـ د أ' ب' جـ' د' مكعب طول حرفه ٢٠ سم وضع بداخله مخروط دائري قائم بحيث رأس المخروط هو مركز القاعدة أ' ب' جـ' د' وقاعدة المخروط تمس أضلاع القاعدة أ ب جـ د

فإن النسبة بين حجم المخروط والمكعب = ...

(أ) $\frac{\pi}{١٢}$ (ب) $\frac{\pi}{٣}$ (ج) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{١٢}{\pi}$

---

١٨ في الشكل المقابل :



القوة $\overrightarrow{ق}$ هي محصلة القوتين $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$

فإن : $\frac{ق_١ + ق_٢}{ق}$ = ...

(أ) جا ٣٠° + جا ٤٥° (ب) $\frac{جا ٧٥° + جا ٣٠°}{جا ٧٥°}$

(ج) $\frac{جا ٤٥° + جا ٣٠°}{جا ٧٥°}$ (د) $\frac{جا ٧٥°}{جا ٣٠°} + \frac{جا ٧٥°}{جا ٤٥°}$

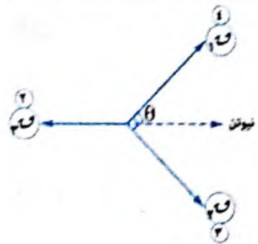
---

١٩ قوتان متلاقيتان في نقطة مقداراهما $ق_١$ ، $ق_٢$ حيث $٠ \le ق_١ \le ١٢$ ، $٨ \le ق_٢ \le ١٧$ وقياس الزاوية بينهما ١٨٠° ومقدار محصلتهما ح فإن : ....

(أ) $٢ \le ح \le ٤$ (ب) $٠ \le ح \le ٤$ (ج) $٠ \le ح \le ١٧$ (د) $٥ \le ح \le ١٧$

---

٢٠ الشكل المقابل يمثل ثلاث قوى



$\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ ، $\overrightarrow{ق_٣}$ مقاديرها ٤ ، ٢ ، ٢ نيوتن

على الترتيب فإذا كانت : جا θ = $\frac{٣}{٥}$

فإن مقدار محصلة هذه القوى

يساوي .... نيوتن.

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٥

---

٢١ المستقيمات الرأسية المختلفة في الفراغ تكون ....

(أ) متوازية. (ب) متخالفة.

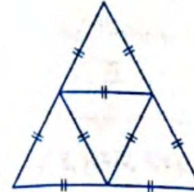
(ج) يجمعهما مستوى واحد. (د) متقاطعة.

٢٢ إذا كانت $\overrightarrow{ق}$ تتزن مع قوتين متعامدتين مقدارهما ٨ نيوتن ، ١٥ نيوتن

فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٧ (ب) ١٧ (ج) ٢٣ (د) ٧ $\sqrt{٢}$

٢٣ أى المجسمات يعبر عن الشبكة المقابلة :



(أ) هرم رباعى.

(ب) هرم رباعى منتظم.

(ج) هرم ثلاثى منتظم الوجوه.

(د) غير ذلك.

٢٤ قوتان مقدارهما ٣ ، ٥ نيوتن ومحصلتهما ٢ نيوتن فإن قياس الزاوية بين المحصلة والقوة الثانية = ...

(أ) ١٨٠° (ب) ٩٠° (ج) صفر° (د) ٣٠°

النمـــوذج السابع

امتحان تفاعلى ٧



أجب عن الأسئلة الآتية :

١ إذا بلغت محصلة قوتين تؤثران فى نقطة قيمتها العظمى فإن قياس الزاوية بين خطى عملهما يساوى ....

(أ) ١٨٠° (ب) ١٢٠° (ج) صفر° (د) ٦٠°

٢ هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٠ سم وارتفاعه الجانبى ١٣ سم تكون مساحته الجانبية .... سم².

(أ) ٢٦٠ (ب) ٣٦٠ (ج) ١٣٠ (د) ٥٢٠

٣ مركز الدائرة : س² + ص² − ٦ س + ٨ ص = ٠ هو النقطة ....

(أ) (٣ ، −٤) (ب) (٤ ، −٣) (ج) (−٣ ، ٤) (د) (−٤ ، ٣)

٤ إذا كانت $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ ، $\overrightarrow{ق_٣}$ ثلاث قوى مقدرة بالنيوتن متزنة ومتلاقية فى نقطة واحدة

وكانت : $\overrightarrow{ق_١}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ − ٣ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ + ٥ $\overrightarrow{ص}$

فإن : $\overrightarrow{ق_٣}$ = ... نيوتن.

(أ) ٥ $\overrightarrow{س}$ + ٢ $\overrightarrow{ص}$ (ب) −٥ $\overrightarrow{س}$ − ٢ $\overrightarrow{ص}$

(ج) $\sqrt{٢٩}$ (د) $\sqrt{٣٤}$

٥ وضع جسم وزنه (و) نيوتن على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ الجسم فى حالة توازن بتأثير قوة مقدارها ٣٦ نيوتن تعمل فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى. فإن مقدار وزن الجسم = ... نيوتن.

(أ) ٣٦ $\sqrt{٣}$ (ب) ٣٦ $\sqrt{٢}$ (ج) ٧٢ (د) ٧٢ $\sqrt{٣}$

٦ الصورة العامة لمعادلة الدائرة التى مركزها م (−٢ ، ٥) وتمر بالنقطة (٣ ، ٢) هى ....

(أ) س² + ص² − ٤ س + ١٠ ص − ٥ = ٠ .

(ب) س² + ص² + ٤ س − ١٠ ص − ٥ = ٠ .

(ج) س² + ص² + ٢ س − ٥ ص − ٥ = ٠ .

(د) س² + ص² + ٤ س − ١٠ ص − ٢٥ = ٠ .

٧ إذا كان المستقيم ل // المستوى س ، أ ∈ س فإن : ل ∩ س = ...

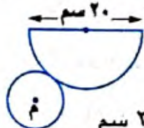
(أ) ∅ (ب) ل (ج) {أ} (د) س

٨ هرم رباعى منتظم مساحته الجانبية ٢٤٠ سم² وارتفاعه الجانبى ١٢ سم

أوجد : (١) ارتفاع الهرم. (٢) حجم الهرم.

٩ إذا طوينا هذه الشبكة لتصبح مخروطًا

فإن طول نصف قطر قاعدته = ...



(أ) ١٠ سم (ب) ٨ سم (ج) ٥ سم (د) ٢,٥ سم

١٠ كرة معدنية وزنها ٤٠٠ ث.كجم يؤثر فى مركزها ، موضوعة بين مستويين أملسين أحدهما رأسى والآخر يميل على الرأسى بزاوية قياسها ٦٠°

أوجد رد فعل كل من المستويين.

---

١١ حجم مخروط قائم طول راسمه = ١٥ سم ، مساحته الكلية = ٢١٦ π سم^{٢}

يساوى .... سم^{٣}

(أ) ٢٠٥ π (ب) ٣٢٠ π (جـ) ٣٨٠ π (د) ٣٢٤ π

---

١٢ إذا كانت ح هى محصلة قوتين ق$_{١}$ ، ق$_{٢}$ حيث : ق$_{٢}$ > ق$_{١}$ فأى من الشروط الآتية تكفى لجعل ح ⊥ ق$_{١}$ ؟

(أ) ح^{٢} = ق$_{١}^{٢}$ + ق$_{٢}^{٢}$ (ب) ح^{٢} = ق$_{٢}^{٢}$ − ق$_{١}^{٢}$

(جـ) $\overline{\text{ق}_{١}}$ ⊥ $\overline{\text{ق}_{٢}}$ (د) جميع ما سبق.

---

١٣ أ ب جـ د مربع طول ضلعه ١٢ سم ، هـ ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ بحيث ب هـ = ٥ سم أثرت قوى مقاديرها ٢ ، ١٣ ، ٤ $\sqrt{٢}$ ، ٩ ث.جم فى الاتجاهات $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ هـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـ أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ د}}$ على الترتيب ، عيِّن محصلة هذه القوى.

---

١٤ إذا كانت : س^{٢} + ص^{٢} + ٢ (جتا θ) س − ٢ (جا θ) ص − ٨ = ٠ تمثل معادلة دائرة

فإن : نق = ... وحدة طول.

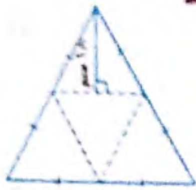
(أ) $\sqrt{٢}$ (ب) ٢ $\sqrt{٢}$ (جـ) ٣ (د) ٨

---

١٥ أربع قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة مقاديرها ق$_{١}$ ، ٦ $\sqrt{٢}$ ، ٦ $\sqrt{٢}$ ، ق$_{٢}$ ثقل جرام والقوة الأولى فى اتجاه الشرق والثانية فى اتجاه الشمال الشرقى والثالثة فى اتجاه الشمال الغربى والرابعة تؤثر فى اتجاه الجنوب فإذا كانت محصلة هذه القوى تساوى ٧ ثقل جرام وتؤثر فى اتجاه الشرق فإن : (ق$_{١}$ ، ق$_{٢}$) = ...

(أ) (٧ ، ٠) (ب) (٧ ، ١٢) (جـ) (٧ ، ١٢ $\sqrt{٢}$) (د) (٦ $\sqrt{٢}$ ، ٦ $\sqrt{٢}$)

١٦ عند طى الشبكة التى أمامك



فإن المساحة الكلية للجسم الناتج = ... سم^{٢}

(أ) ١٠٨ $\sqrt{٣}$ (ب) ٣٢٤ $\sqrt{٣}$

(جـ) ٧٥٨ (د) ٤٣٢ $\sqrt{٣}$

---

١٧ أ ب جـ د هـ شكل خماسى منتظم أثرت قوة مقدارها ٢٠ نيوتن فى اتجاه $\overrightarrow{\text{أ جـ}}$ ثم حُللت هذه القوة فى اتجاهين $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ هـ}}$ فإن مقدار مركبة القوة فى اتجاه $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ يساوى .... نيوتن.

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٢٠ $\sqrt{٣}$ (د) ١٢.٤

---

١٨ مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ١٥ سم وارتفاعه ٢٠ سم

فإن مساحته الجانبية = ... سم^{٢}

(أ) ٦٠٠ π (ب) ٣٧٥ π (جـ) ١٨٧٥ π (د) ٥٦٢٥ π

---

١٩ إذا كانت القوة التى مقدارها ق تتزن مع قوتين مقدارهما ٥ ، ٣ نيوتن واللتان تحصران بينهما زاوية قياسها ٦٠° فإن : ق = ... نيوتن

(أ) $\sqrt{١٩}$ (ب) $\sqrt{٣٤}$ (جـ) ٧ (د) ١٥

---

٢٠ فى الشكل المقابل :



القوة $\overline{\text{ق}}$ هى محصلة القوتين $\overline{\text{ق}_{١}}$ ، $\overline{\text{ق}_{٢}}$

فإن : $\frac{\text{ق}_{١} + \text{ق}_{٢}}{\text{ق}}$ = ...

(أ) جا ٣٠° + جا ٤٥° (ب) $\frac{\text{جا } ٧٥° + \text{جا } ٣٠°}{\text{جا } ٧٥°}$

(جـ) $\frac{\text{جا } ٤٥° + \text{جا } ٣٠°}{\text{جا } ٧٥°}$ (د) $\frac{\text{جا } ٧٥°}{\text{جا } ٣٠°} + \frac{\text{جا } ٧٥°}{\text{جا } ٤٥°}$

---

٢١ مركز الدائرة ٢ س^{٢} + ٢ ص^{٢} − ٦ س + ٨ ص = ٠ هو النقطة ....

(أ) (٣ ، −٤) (ب) (−٤ ، ٣) (جـ) ($\frac{٣}{٢}$ ، −٢) (د) (−٣ ، −٤)

٢٢ قوتان متعامدتان مقدارهما ٦ ، ٨ نيوتن فإن جيب زاوية ميل المحصلة على القوة الأولى = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

٢٣ أقل عدد من المستويات التي يمكن أن تحدد سطح مجسم هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

٢٤ إذا كان: $\overrightarrow{ق_1}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ − ٢ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ = ٤ $\overrightarrow{س}$ − ٨ $\overrightarrow{ص}$ ، محصلتهما $\overrightarrow{ح}$ = ٢ أ $\overrightarrow{س}$ − ٢ ب $\overrightarrow{ص}$ فإن: أ + ب = ...

(أ) ٣ (ب) ٣ $\frac{١}{٢}$ (جـ) ٦ $\frac{١}{٢}$ (د) ١٢

النموذج الثامن



امتحان تفاعلي ٨

أجب عن الأسئلة الآتية:

١ قوتان مقدارهما ٨ ، ق ث جم وقياس الزاوية بينهما ∈]٠ ، π[، ومحصلتهما تنصف الزاوية بينهما فإن: ق = ... ث جم.

(أ) ٢ $\sqrt{٢}$ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٦

٢ حجم هرم رباعي منتظم محيط قاعدته ٣٦ سم وارتفاعه ١٠ سم يساوي .... سم^3

(أ) ٨١٠ (ب) ١٨٠ (جـ) ٣٦٠ (د) ٢٧٠

٣ محيط الدائرة التي معادلتها: س^2 + ص^2 = ٨ هو ....

(أ) ٨ π (ب) ٦٤ π (جـ) ٢ $\sqrt{٢}$ π (د) ٤ $\sqrt{٢}$ π

٤ إذا اتزنت ثلاث قوى متلاقية في نقطة فإن مقدار كل قوة يتناسب مع .... الزاوية المحصورة بين القوتين الآخريين.

(أ) جيب تمام (ب) جيب (جـ) ظل (د) ظل تمام

٥ قوتان متساويتان في المقدار ومقدار كل منهما ق نيوتن فإذا كان مقدار محصلتهما ق نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما = ...

(أ) صفر (ب) ٣٠° (جـ) ٦٠° (د) ١٢٠°

٦ هرم سداسي منتظم حجمه ٨ $\sqrt{٣}$ سم^3 وارتفاعه ٤ سم أوجد محيط قاعدته.

٧ قوة مقدارها ١٠ $\sqrt{٢}$ ثقل. جرام تعمل في اتجاه الجنوب الشرقي تم تحليلها إلى مركبتين متعامدين فإن مقدار مركبة القوة في اتجاه الجنوب = ... ثقل. جرام.

(أ) ١٠ $\sqrt{٣}$ (ب) ١٠ $\sqrt{٢}$ (جـ) ١٠ (د) ٥

٨ الصورة العامة لمعادلة الدائرة التي مركزها (٢ ، −١) وطول نصف قطرها ٣ سم هي ....

(أ) س^2 + ص^2 − ٤ س + ٢ ص − ٤ = ٠

(ب) س^2 + ص^2 − ٢ س + ص − ٤ = ٠

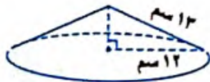
(جـ) س^2 + ص^2 + ٤ س − ٢ ص − ٤ = ٠

(د) س^2 + ص^2 − ٤ س + ٢ ص − ١٦ = ٠

٩ جسم وزنه ٢٤ نيوتن معلق في أحد طرفي خيط طوله ١٣٠ سم وطرفه الآخر مثبت في نقطة من حائط رأسي ، أثرت على الجسم قوة أفقية ق ، فاتزن الجسم عندما يكون على بعد ٥٠ سم من الحائط فإن: ق = ... نيوتن.

(أ) ٢٦ (ب) ١٢ (جـ) ١٣ (د) ١٠

١٠ الزاوية المركزية للقطاع الذي إذا طويناه أصبح المخروط الموضح تكون ....



(أ) حادة. (ب) منفرجة.

(جـ) مستقيمة. (د) منعكسة.

١١ أثرت قوى مقاديرها ق ، ٨٠ ، ك ، ٥٠ ، ٨٠$\sqrt{٣}$ ث.كجم في نقطة مادية في اتجاهات الشرق ، ٣٠° شرق الشمال ، الشمال ، الغرب ، الجنوب على الترتيب.

أوجد قيمتي ق ، ك إذا كانت محصلة القوى = ٤٠ ث.كجم في اتجاه ٦٠° شمال الشرق.

---

١٢ عدد المستويات التي تمر بنقطتين معلومتين هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائي.

---

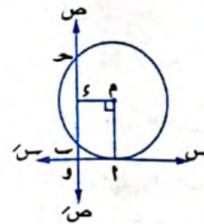
١٣ مخروط دائري قائم طول راسمه ١٧ سم وارتفاعه ١٥ سم

فإن طول نصف قطر قاعدته = ... سم.

(أ) ٨ (ب) ١٣ (جـ) ٧ (د) ١٢

---

١٤ في الشكل المقابل :



دائرة م تمس محور السينات عند أ

، و ب = ٢ وحدة طول ، ب جـ = ٦ وحدة طول

فإن معادلة الدائرة م هي ....

(أ) (س + ٤)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = ١٦ (ب) (س − ٤)^{٢} + (ص − ٥)^{٢} = ٢٥

(جـ) (س − ٤)^{٢} + (ص − ٥)^{٢} = ١٦ (د) (س + ٤)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = ٢٥

---

١٥ وضع جسم وزنه ٦ ث.كجم على مستوى مائل أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠°

وحفظ في حالة توازن بواسطة قوة أفقية فإن مقدار رد فعل المستوى

على الجسم = ... ث.كجم.

(أ) ٢$\sqrt{٣}$ (ب) ٤$\sqrt{٣}$ (جـ) ١٢$\sqrt{٣}$ (د) ٨$\sqrt{٣}$

---

١٦ أوجد قيم ك التي تجعل الدائرتين :

د$_{١}$: (س + ٢)^{٢} + (ص + ١١)^{٢} = ك ، د$_{٢}$: (س − ٣)^{٢} + (ص − ١)^{٢} = ١٦

متماستين.

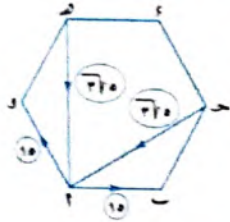
١٧ إذا كانت محصلة قوتين متعامدتين تميل على القوة الكبرى بزاوية قياسها θ

فأي القيم الآتية تصلح قيمة لـ θ ؟

(أ) ٩٠° (ب) ٧٠° (جـ) ٤٥° (د) ١٠°

---

١٨ في الشكل المقابل :



أ ب جـ د هـ و سداسي منتظم

أثرت القوى ١٥ ، ٥$\sqrt{٣}$ ، ٥$\sqrt{٣}$ ، ١٥ على الترتيب

في الأضلاع أب ، جـأ ، هـأ ، أو

فإن المحصلة ح = ... نيوتن.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢٥ (د) صفر

---

١٩ أ ب جـ د هـ و شكل سداسي منتظم أثرت قوة مقدارها ٢٠ نيوتن في اتجاه أد

فإن مركبتي القوة في اتجاه أجـ ، أو على الترتيب هما ....

(أ) ١٠$\sqrt{٣}$ ، ١٠ (ب) ٥$\sqrt{٣}$ ، ١٠ (جـ) ١٠ ، ١٠$\sqrt{٣}$ (د) ٢٠$\sqrt{٣}$ ، ٢٠

---

٢٠ الشبكة التي أمامك تصف



مجسمًا حجمه ٩٦ π سم^{٣}

فإن مساحته الكلية = ... سم^{٢}

(أ) ١٦ π (ب) ٣٢ π

(جـ) ٤٨ π (د) ٩٦ π

---

٢١ أي الجمل الآتية صحيحة ؟

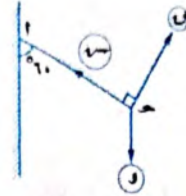
(أ) الأوجه الجانبية للهرم القائم تكون متطابقة.

(ب) الهرم المنتظم هو هرم قائم.

(جـ) ارتفاعات الأوجه الجانبية للهرم تكون متساوية.

(د) أقل عدد من المستويات التي تحدد مجسم = ٣ مستويات.

٢٢ في الشكل المقابل :



مصباح وزنه و ث.جم معلق في نهاية خيط اتزن بتأثير قوة عمودية على الخيط عندما يميل الخيط على الرأسي بزاوية قياسها ٦٠°

فإن : $\frac{ق}{ش}$ = ...

(أ) ٢　　(ب) $\frac{١}{٢}$　　(ج) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$　　(د) $\sqrt{٣}$

---

٢٣ قوتان ق ، ٢ ق محصلتهما تكون عمودية على إحداهما　فإن : ح = ...

(أ) ق $\sqrt{٥}$　　(ب) ق $\sqrt{٣}$　　(ج) ٣ ق　　(د) ق

---

٢٤ في الشكل المقابل :



هرم رباعي منتظم فإن ارتفاعه = ... سم

(أ) ٧ $\sqrt{٢}$　　(ب) ٢ $\sqrt{٧}$

(ج) ٤ $\sqrt{٢}$　　(د) ٢ $\sqrt{٥}$

النمــــوذج التاسع

امتحان تفاعلي ٩



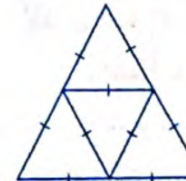
أجب عن الأسئلة الآتية :

١ قوتان متعامدتان مقدارهما ٢ ق − ٥ ، ق + ٢ نيوتن تؤثران في نقطة مادية ، مقدار محصلتهما يساوي ٣ $\sqrt{٥}$ نيوتن　فإن : ق = ...

(أ) ٢　　(ب) ٣　　(ج) ٤　　(د) ٥

---

٢ أي المجسمات يعبر عن الشبكة المقابلة ؟



(أ) هرم رباعي.

(ب) هرم رباعي منتظم.

(ج) هرم ثلاثي منتظم الوجوه.

(د) غير ذلك.

٣ مخروط دائري قائم حجمه ١٠٠ سم^٣ فإن حجمه عندما يتضاعف ارتفاعه يساوي .... سم^٣

(أ) ١٠٠　　(ب) ٢٠٠　　(ج) ٤　　(د) ٨٠

---

٤ وضع جسم وزنه ١٨ ث.كجم على مستوٍ مائل أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° ومنع من الانزلاق بتأثير قوة قدرها (ق) تعمل على اتجاه خط أكبر ميل للمستوى إلى أعلى بزاوية قياسها ٣٠° فإن مقدار هذه القوة = ... ث.كجم

(أ) ١٢　　(ب) ٩　　(ج) ٢ $\sqrt{٣}$　　(د) ٦ $\sqrt{٣}$

---

٥ قوة مقدارها ٤ $\sqrt{٢}$ تعمل في اتجاه الشرق تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مركبتها في اتجاه الشمال الشرقي تساوي .... نيوتن.

(أ) ٤　　(ب) ٤ $\sqrt{٢}$　　(ج) ٨　　(د) ٨ $\sqrt{٢}$

---

٦ هرم رباعي منتظم محيط قاعدته ٤٠ سم وارتفاعه ١٢ سم

فإن مساحته الجانبية = ... سم^٢

(أ) ٢٠٠　　(ب) ٢٤٠　　(ج) ٢٦٠　　(د) ٣٢٠

---

٧ معادلة الدائرة التي يمسها المستقيم س + ص = ٢ ومركزها (٣ ، ٥) هي ....

(أ) $(س − ٣)^٢ + (ص − ٥)^٢ = ٣ \sqrt{٢}$　　(ب) $(س + ٣)^٢ + (ص + ٥)^٢ = ١٨$

(ج) $(س − ٣)^٢ + (ص − ٥)^٢ = ١٢$　　(د) $(س − ٣)^٢ + (ص − ٥)^٢ = ١٨$

---

٨ علق ثقل مقداره ١٦ نيوتن في أحد طرفي خيط خفيف والطرف الآخر مثبت في نقطة من حائط رأسي ، أزيح الثقل بقوة في اتجاه عمودي على الخيط حتى أصبح الخيط في وضع التوازن يميل على الحائط بزاوية قياسها ٣٠°

فإن مقدار الشد في الخيط = ... نيوتن

(أ) ٨　　(ب) ٨ $\sqrt{٢}$　　(ج) ٨ $\sqrt{٣}$　　(د) ١٢

٩ أب قضيب منتظم طوله ٦ أمتار ووزنه ٨ ث.كجم يتصل طرفه أ بحائط رأسي بواسطة مفصل ، حفظ القضيب في وضع أفقي بربطه من إحدى نقطه حـ

حيث : أحـ = ٤ أمتار بأحد طرفي خيط ثم ثبت الطرف الثاني للخيط في نقطة ء على الحائط الرأسي فوق أ وعلى بعد ٤ أمتار منها. احسب مقدار الشد في الخيط ورد فعل المفصل.

١٠ معادلة الدائرة التي تمس محور السينات عند النقطة (−٢ ، ٠) وتقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات وترًا طوله ٤ √٣ وحدة طول = ...

(أ) (س + ٢)^2 = ٤٨ (ب) (س + ٢)^2 + (ص − ٤)^2 = ٤٨

(جـ) (س − ٢)^2 + (ص + ٤)^2 = ٢٤ (د) (س + ٢)^2 + (ص − ٤)^2 = ١٦

١١ قوتان متساويتان في المقدار محصلتهما ٢٤ نيوتن وتميل على القوة الأولى بزاوية قياسها ٣٠° فإن مقدار أي من هاتين القوتين = ... نيوتن.

(أ) ٨ (ب) ٨ √٣ (جـ) ٨ √٢ (د) ١٢

١٢ قطاع دائري طول نصف قطر دائرته ١٨ سم وقياس زاويته المركزية ٦٠° طوى ولصق نصفا قطره ليكون أكبر مساحة جانبية لمخروط قائم. أوجد حجم هذا المخروط.

١٣ النسبة بين طول حرف الهرم الثلاثي المنتظم الوجوه وارتفاعه = ...

(أ) √٢ : √٣ (ب) √٣ : ٢ (جـ) √٦ : ٢ (د) √٣ : ٣

١٤ ثلاث قوى مقاديرها ١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ نيوتن تؤثر في نقطة مادية ، الأولى نحو الشرق ، الثانية تصنع زاوية قياسها ٣٠° غرب الشمال والثالثة تصنع زاوية قياسها ٦٠° جنوب الغرب.
أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

١٥ مخروط دائري قائم مساحة قاعدته ٢٥ π سم^2 وطول راسمه ١٣ سم
فإن مساحته الجانبية = ... سم^2

(أ) ٥٠ π (ب) ٦٥ π (جـ) ٩٠ π (د) ١٠٠ π

١٦ قوتان مقدارهما ق ، ٢ ق نيوتن تؤثران في نقطة مادية وكانت المحصلة عمودية على إحداهما فإن قياس الزاوية بين القوتين = ...

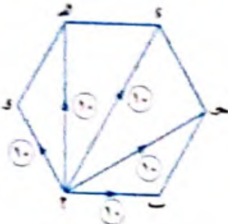
(أ) ٦٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٣٥°

١٧ النقطة التي تقع على الدائرة : (س − ٢)^2 + ص^2 = ١٣ هي ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٣ ، −٢) (جـ) (٢ ، ٥) (د) (٤ ، ٣)

١٨ أثرت خمس قوى متساوية في المقدار ومقدار كل منها ١٠ نيوتن في أحد رؤوس سداسي منتظم وفي اتجاهات الرؤوس الأخرى للسداسي كما بالشكل المقابل

فإن محصلة هذه القوى = ... نيوتن



(أ) ٥٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٣٠ √٣ (د) (٢٠ + ١٠ √٣)

١٩ في الشكل المقابل :

دائرة تم تقسيمها إلى قطاعين دائريين

بحيث تكون شبكتي مخروطين قائمين

فإن : $\frac{\text{المساحة الجانبية للمخروط الأصغر}}{\text{المساحة الجانبية للمخروط الأكبر}}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٨}$ (د) $\frac{١}{١٦}$

٢٠ قوتان مقدارهما ٤ ، ٦ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٩٠°

فإن ظل زاوية ميل محصلتهما على القوة الأولى يساوي ....

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) ٢ √١٣ (د) $\frac{\sqrt{٦}}{٢}$

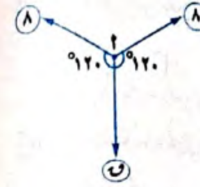
٢١ قوتان متساويتان في المقدار ، قياس الزاوية بينهما ٩٠° ومقدار محصلتهما ٨ نيوتن
فإن مقدار كل منهما = ... نيوتن.

(أ) ٢ √٢ (ب) ٤ (جـ) ٤ √٢ (د) ٨

٢٢ مركز الدائرة س^2 + ص^2 − ٦ س + ٨ ص = ٠ هو النقطة ....

(أ) (٣ ، −٤) (ب) (٤ ، −٣) (جـ) (−٣ ، ٤) (د) (−٤ ، ٣)

٢٣ في الشكل المقابل :



أ نقطة مادية متزنة تحت تأثير القوى الثلاث الموضحة بالشكل حيث $\overleftarrow{ق}$ تتزن مع قوتين مقدار كل منهما ٨ نيوتن وتصنع مع كل منهما زاوية قياسها ١٢٠°

فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) صفر (ب) ٨ (جـ) ١٦ (د) ٨ جا ١٢٠°

---

٢٤ المستويان غير المتوازيين يتقاطعان في ....

(أ) نقطة. (ب) خط مستقيم. (جـ) مستوى. (د) شعاع.

النمـــوذج العاشر

امتحان تفاعلي ١٠



أجب عن الأسئلة الآتية :

١ النقطة التي تقع على الدائرة س^2 + (ص − ٥)^2 = ٢٠ هي ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٣ ، −٢) (جـ) (٢ ، ٥) (د) (٤ ، ٣)

---

٢ قوتان ٣ ، ٤ نيوتن محصلتهما ٧ نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما هو ....

(أ) صفر° (ب) ٦٠° (جـ) ١٨٠° (د) ٩٠°

---

٣ إذا كانت : $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ ، $\overleftarrow{ق_٣}$ ثلاث قوى متلاقية في نقطة ومتزنة

فإن مقدار محصلة $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ يساوي ....

(أ) ق$_١$ (ب) ق$_١$ + ق$_٢$ (جـ) ق$_٣$ (د) صفر

---

٤ قوتان مقدارهما ٨ ، ق نيوتن تؤثران في نقطة مادية ، إذا كان قياس الزاوية بينهما ١٢٠°

ومحصلتهما ق√٣ نيوتن فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٤ (ب) ٤√٢ (جـ) ٤√٣ (د) ٨

٥ مخروط دائري قائم طول راسمه ١٧ سم وارتفاعه ١٥ سم

فإن مساحته الكلية = ... سم^2

(أ) ٢٠٠ π (ب) ١٣٦ π (جـ) ٣٢٠ π (د) ٤٠٠ π

---

٦ هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ٢٠ سم وارتفاعه ١٠√٣ سم

أوجد : (١) المساحة الجانبية للهرم. (٢) حجم الهرم.

---

٧ إذا كانت (و) هي نقطة الأصل لنظام إحداثي متعامد في المستوى وكانت

$\overleftarrow{ق}$ = (٨ ث.كجم ، ١٣٥°) قوة تؤثر في نقطة و فإن مركبة القوة $\overleftarrow{ق}$ في اتجاه محور الصادات تساوي ....

(أ) −٤√٢ (ب) ٤√٢ (جـ) ٤√٣ (د) ٤

---

٨ أ ب جـ د هـ و سداسي منتظم. أثرت قوى مقاديرها ٦√٣ ، ٥ ، ٦√٣ نيوتن

في $\overleftarrow{أجـ}$ ، $\overleftarrow{أد}$ ، $\overleftarrow{أهـ}$ على الترتيب. فإن مقدار واتجاه محصلة هذه القوى هو ....

(أ) ١٨ نيوتن في اتجاه $\overleftarrow{أد}$ (ب) ٢٣ نيوتن في اتجاه $\overleftarrow{أد}$

(جـ) ٢٠ نيوتن في اتجاه $\overleftarrow{أهـ}$ (د) ٢٣ نيوتن في اتجاه $\overleftarrow{أجـ}$

---

٩ علق ثقل مقداره ٣٢ نيوتن في طرف خيط طوله ١٠ سم وثبت الطرف الآخر للخيط في حائط رأسي ثم شد الثقل بقوة أفقية أبعدته عن الحائط فاتزن عندما كان الثقل يبعد عن الحائط مسافة ٦ سم. فإن مقدار القوة = ... نيوتن.

(أ) ٢٤ (ب) ٤٠ (جـ) ٣٦ (د) ٢٨

---

١٠ وضع جسم وزنه ١٨ نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠°

ومنع من الانزلاق بتأثير قوة أفقية قدرها ق نيوتن

فإن مقدار رد فعل المستوى على الجسم = ... نيوتن.

(أ) ٦√٣ (ب) ٨√٣ (جـ) ١٢√٣ (د) ١٠√٣

---

١١ معادلة الدائرة التي مركزها (−٤ ، ٣) وتمر بنقطة الأصل هي ....

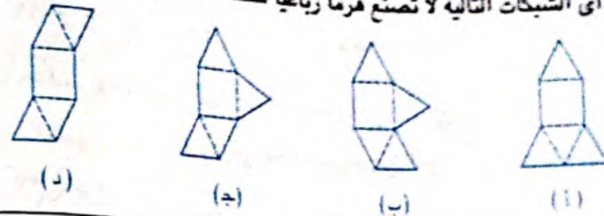
(أ) (س + ٤)^2 + (ص − ٣)^2 = ٥ (ب) (س − ٤)^2 + (ص + ٣)^2 = ٢٥

(جـ) (س + ٤)^2 + (ص − ٣)^2 = ٦٢٥ (د) (س + ٤)^2 + (ص − ٣)^2 = ٢٥

١٢ إناء أسطوانى الشكل به ماء ، غمر فيه جسم معدنى على شكل مخروط قائم ، ارتفاعه ١٢ سم وطول نصف قطر قاعدته ٢ سم غمرًا كاملًا ، فارتفع سطح الماء فى الإناء بمقدار ١ سم أوجد طول قطر قاعدة الإناء.

---

١٣ أى الشبكات التالية لا تصنع هرمًا رباعيًا منتظمًا عند طيها ؟



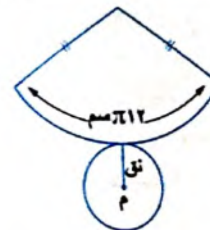
---

١٤ خمس قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة مقاديرها ١٢ ، ٩ ، $٥\sqrt{٣}$ ، $٧\sqrt{٢}$ ، ٧ ث.كجم تعمل فى اتجاهات الشرق ، الشمال ، الشمال الغربى ، الجنوب الغربى ، الجنوب على الترتيب. أثبت أن المجموعة متزنة.

---

١٥ الشبكة التى أمامك تصف مجسمًا حجمه ٩٦ π سم^{٣}

فإن مساحته الكلية = ... سم^{٢}

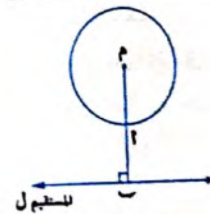


(أ) ٩٦ π (ب) ٤٨ π

(جـ) ٣٢ π (د) ١٦ π

---

١٦ فى الشكل المقابل :



إذا كانت معادلة الدائرة هى

س^{٢} + ص^{٢} − ٦ س + ٤ ص − ١٢ = ٠ ،

$\overline{مب}$ ⊥ المستقيم ل حيث ل : ٣ س − ٤ ص + ٢٣ = ٠ ،

$\overline{مب}$ يقطع الدائرة فى أ فإن : طول $\overline{أب}$ = ... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٨ (د) ١٢

١٧ قوتان مقدارهما ق ، ق$\sqrt{٣}$ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية ومقدار محصلتهما ق نيوتن وكانت هـ$_{١}$ هى قياس الزاوية بين القوة الأولى والمحصلة وكانت هـ$_{٢}$ قياس الزاوية بين القوة الثانية والمحصلة فإن : ....

(أ) هـ$_{١}$ = هـ$_{٢}$ (ب) هـ$_{١}$ = $\frac{١}{٢}$ هـ$_{٢}$ (جـ) هـ$_{١}$ = ٢ هـ$_{٢}$ (د) هـ$_{١}$ = ٤ هـ$_{٢}$

---

١٨ أى الجمل الآتية غير صحيحة ؟

(أ) أى مستقيمين مختلفين ومتوازيين يعينان مستويًا.

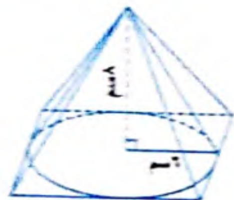
(ب) كل مستقيمين مختلفين متقاطعين يشتركان فى نقطة واحدة.

(جـ) المستقيمان المتخالفان لا يجمعهما مستوى واحد.

(د) أى ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة يمر بها مستوى واحد على الأقل.

---

١٩ فى الشكل المقابل :



هرم قائم منتظم ومخروط دائرى قائم مشتركان فى الرأس وقاعدة المخروط سطح دائرة تمس أضلاع قاعدة الهرم من الداخل فإن النسبة بين المساحة الجانبية للمخروط القائم والمساحة الجانبية للهرم تساوى ....

(أ) $\frac{٤}{\pi}$ (ب) $\frac{٥}{٦}$ (جـ) $\frac{٧}{٨}$ (د) $\frac{\pi}{٤}$

---

٢٠ قوة مقدارها ٥$\sqrt{٣}$ نيوتن تعمل فى اتجاه ٣٠° شرق الشمال تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مقدار مركبتها فى اتجاه الشرق يساوى .... نيوتن.

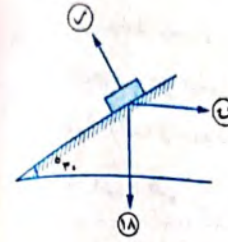
(أ) $\frac{٥\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $\frac{١٥}{٢}$ (جـ) $\frac{١٥\sqrt{٣}}{٢}$ (د) ١٥$\sqrt{٣}$

---

٢١ إذا كانت $\overrightarrow{ق_{١}}$ ، $\overrightarrow{ق_{٢}}$ ، $\overrightarrow{ق_{٣}}$ ثلاث قوى متلاقية فى نقطة ومتزنة فإن مقدار محصلة $\overrightarrow{ق_{١}}$ ، $\overrightarrow{ق_{٢}}$ يساوى ....

(أ) ق$_{١}$ (ب) ق$_{١}$ + ق$_{٢}$ (جـ) ق$_{٣}$ (د) صفر

٢٢ في الشكل المقابل :



جسم وزنه ١٨ نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° يتزن بتأثير قوة أفقية ق نيوتن

فإن : ق + ر = ... نيوتن.

(أ) ٦ $\sqrt{٣}$　　(ب) ١٢ $\sqrt{٣}$　　(جـ) ١٨ $\sqrt{٣}$　　(د) ٢٤ $\sqrt{٣}$

---

٢٣ طول قطر الدائرة : ٤ $س^٢$ + ٤ $ص^٢$ + ١٦ س − ٨ ص − ١٦ = ٠

يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٣　　(ب) ٦　　(جـ) ١٢　　(د) ٢٤

---

٢٤ النسبة بين طول حرف الهرم الثلاثى المنتظم الوجوه وارتفاعه تساوى ....

(أ) $\sqrt{٢}$: $\sqrt{٣}$　　(ب) $\sqrt{٣}$: ٢　　(جـ) $\sqrt{٦}$: ٢　　(د) $\sqrt{٣}$: ٣

ثالثا　نماذج امتحانات بنظام أسئلة الاختيار من متعدد

النموذج الأول

أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ قوتان مقدارهما ٦ نيوتن ، ٨ نيوتن محصلتهما ٢ نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما ....

(أ) ٣٠°　　(ب) ٩٠°　　(جـ) ١٨٠°　　(د) ٢٧٠°

---

٢ قوتان مقدارهما ٧ ، ق ث.كجم المحصلة تنصف الزاوية بينهما فإن : ق = ... ث.كجم

(أ) ٨　　(ب) ٧　　(جـ) ١٠　　(د) ٥

---

٣ قوتان قياس الزاوية بينهما θ فإن مقدار محصلتهما ....

(أ) يزداد كلما زادت قيمة θ　　(ب) يتناقص كلما نقصت قيمة θ

(جـ) يزداد كلما نقصت قيمة θ　　(د) لا يتغير بتغير قيمة θ

---

٤ قوتان متعامدتان مقدارهما (٢ ق − ٥) ، (ق + ٢) نيوتن

ومقدار محصلتهما ٣ $\sqrt{٥}$ نيوتن فإن قيمة ق تساوى .... نيوتن.

(أ) ٧　　(ب) ٤　　(جـ) ٦　　(د) ٣

---

٥ قوة مقدارها ٦ نيوتن تعمل فى اتجاه الشمال تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين

فإن مركبتها فى اتجاه الشرق تساوى .... نيوتن.

(أ) ١٢　　(ب) ٦　　(جـ) صفر　　(د) ٨

---

٦ $\overrightarrow{ق_١}$ = ٥ $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ = أ $\overrightarrow{س}$ + ٦ $\overrightarrow{ص}$

، $\overrightarrow{ق_٣}$ = −١٤ $\overrightarrow{س}$ + ب $\overrightarrow{ص}$ وكانت المحصلة $\overrightarrow{ح}$ = (١٠ $\sqrt{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}\pi$)

فإن : (أ ، ب) = ...

(أ) (−١ ، ١)　　(ب) (١ ، ١)　　(جـ) (١ ، −١)　　(د) (−١ ، −١)

٧ ثلاث قوى مستوية متلاقية في نقطة مقاديرها ٦٠ ، ٨٨ ، ٦٠ نيوتن تؤثر في نقطة الأولى نحو الشمال والثانية في اتجاه ٣٠° جنوب الغرب والثالثة في اتجاه ٣٠° جنوب الشرق فإن مقدار المحصلة يساوي .... نيوتن.

(أ) ٣٠ (ب) ٢٣ (جـ) ٣٢ (د) ٢٨

٨ ثلاث قوى مستوية ومتلاقية في نقطة ومتزنة فإذا كان ٧ ، ٣ نيوتن مقداري قوتين منهم فإن مقدار القوة الثالثة يمكن أن يساوي ....

(أ) ١١ نيوتن. (ب) ٢ نيوتن. (جـ) ٥ نيوتن. (د) ٣ نيوتن.

٩ علق جسم وزنه ٢٠٠ ث جم بخيطين طولاهما ٦٠ سم ، ٨٠ سم من نقطتين على خط أفقي واحد البعد بينهما ١٠٠ سم فإن مقدار الشد في الخيطين .... ث جم

(أ) ١٦٠ ، ١٢٠ (ب) ١٨٠ ، ١٢٠

(جـ) ١٥٠ ، ١٦٠ (د) ١٠٠ ، ١٣٠

١٠ أقل عدد من القوى المستوية الغير متساوية في المقدار يمكن أن يتزن هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

١١ قضيب منتظم وزنه ٢٤ نيوتن يرتكز بطرفيه على مستويين أملسين مائلين يصنعان مع الأفقي زاويتين قياساهما ٦٠° ، ٣٠° فإن مقدار رد فعل كل من المستويين ....

(أ) ١٢ ، ١٥ نيوتن (ب) ١٢ ، ١٢$\sqrt{٣}$ نيوتن

(جـ) ١٢$\sqrt{٣}$ ، ١٠ نيوتن (د) ١٥ ، ١٣ نيوتن

١٢ هرم رباعي قائم قاعدته معين طولا قطريه ١٢ سم ، ٨ سم وارتفاعه ١٠ سم فإن حجمه يساوي .... سم³

(أ) ٤٠ (ب) ٨٠ (جـ) ١٦٠ (د) ٢٠٠

١٣ طول قطر الدائرة : ٤ س² + ٤ ص² + ١٦ س − ٨ ص − ١٦ = ٠ يساوي .... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ١٢ (د) ٢٤

١٤ النسبة بين المساحة الجانبية للهرم الثلاثي المنتظم الوجوه إلى مساحته الكلية = ...

(أ) ١ : ٣ (ب) ١ : ٤ (جـ) ٣ : ٤ (د) ١ : ٢

١٥ مخروط دائري قائم طول قطر قاعدته ٦ سم. وارتفاعه ٤ سم. فإن طول راسمه = ... سم.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

١٦ المستقيمات الرأسية المختلفة في الفراغ تكون ....

(أ) متخالفة. (ب) متوازية.

(جـ) متقاطعة. (د) يجمعها مستوى واحد.

١٧ طول قوس القطاع الدائري الذي إذا طويناه أصبح مخروط دائري قائم حجمه ٤٩ π سم³ وارتفاعه ٣ سم يساوي .... سم

(أ) ٢ π (ب) ٤ π (جـ) ٨ π (د) ١٤ π

١٨ أي المعادلات الآتية يعبر عن دائرة ....

(أ) س² − ص² + س − ص = ٦ (ب) ٢ س² + ص² − س + ص = ٥

(جـ) س² + ص² − س = ٦ (د) س² + ص² − س ص = ٦

١٩ مخروط دائري قائم طول راسمه ٢٥ سم ومساحته الجانبية ٥٥٠ سم² فإن حجمه = ... سم³ حيث ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

(أ) ١٢٢٣ (ب) ١٢٣٢ (جـ) ١٣٢٢ (د) ٣١٢٢

٢٠ هرم رباعي منتظم مساحته الكلية ٧٠ سم² ، ومساحته الجانبية ٤٥ سم² فإن ارتفاع الهرم = ... سم

(أ) ٢,٥ (ب) $\sqrt{٥}$ (جـ) $\sqrt{١٤}$ (د) ٤,٥

٢١ المعادلة $\begin{vmatrix} س & ت ص \\ ت ص & س \end{vmatrix}$ − ٤٩ = ٠ تمثل معادلة دائرة طول نصف قطرها .... وحدة طول.

(أ) ٤٩ (ب) ١٤ (جـ) ٩ (د) ٧

النموذج الثانى

أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ ثلاث قوى مستوية متزنة ومتلاقية فى نقطة واحدة وكان مقدارى قوتين منهما هو ٧ ، ٣ نيوتن فإن مقدار القوة الثالثة يمكن أن يكون .... نيوتن.

(أ) ٢ (ب) ١١ (جـ) ٥ (د) ٢

٢ هرم رباعى منتظم مساحة قاعدته = ١٠٠ سم². وارتفاعه ١٢ سم فإن مساحته الجانبية تساوى .... سم².

(أ) ٢٦٠ (ب) ٥٢٠ (جـ) ١٢٠ (د) ٣٦٠

٣ إذا كانت : $\overrightarrow{ق_1}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ = ٤ $\overrightarrow{س}$ + ٨ $\overrightarrow{ص}$ فإن : $\|\overrightarrow{ح}\|$ = ... وحدة قوة.

(أ) ١٤ (ب) $\sqrt{٨٤}$ (جـ) ١٠٠ (د) ١٠

٤ هرم سداسى منتظم طول ضلع قاعدته = ٨ سم ، ارتفاعه = ١٠ سم فإن حجمه يساوى .... سم³.

(أ) $٣٢٠\sqrt{٣}$ (ب) $٩٦٠\sqrt{٣}$ (جـ) $\frac{٣٢٠\sqrt{٣}}{٣}$ (د) ٥٥٤,٢٥

٥ قوتان متساويتان فى المقدار ومقدار محصلتهما ١٦ نيوتن عندما كان قياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{٢}$ فإن القيمة العظمى لمحصلتيهما تساوى .... نيوتن.

(أ) ٣٢ (ب) $٨\sqrt{٢}$ (جـ) $١٦\sqrt{٢}$ (د) صفر

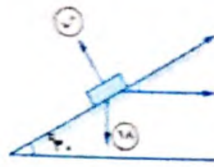
٦ إذا كانت ى الزاوية بين قوتين مقدارهما ٢ نيوتن ، ٦ نيوتن ، ى ∈]٠ ، π[فإن مقدار محصلة القوتين مقاسة بالنيوتن ∈ ....

(أ) [٤ ، ٨] (ب) [٤ ، ٨[(جـ)]٤ ، ٨] (د)]٤ ، ٨[

٧ إذا كانت الدائرة التى معادلتها : س² + ص² - ٦ س + ٨ ص + حـ = ٠ تمس محور السينات فإن : حـ = ...

(أ) -٩ (ب) ٩ (جـ) ٦ (د) -٦

٨ فى الشكل المقابل :



ق + ر = ...

(أ) $١٢\sqrt{٣}$ (ب) $٦\sqrt{٣}$ (جـ) $١٨\sqrt{٣}$ (د) $٢٤\sqrt{٣}$

٩ طول القطعة المماسة للدائرة : س² + ص² = ٩ من النقطة (٥ ، ٠) يساوى .... وحدة طول.

(أ) ١٤ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٤

١٠ أقل عدد من القوى المستوية الغير متساوية مقدارًا ويمكن أن تكون متزنة هو ....

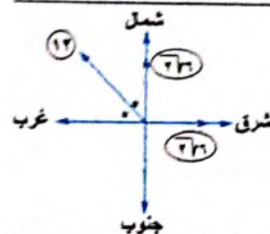
(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ١

١١ جميع الحالات الآتية تعين مستوى ماعدا ....

(أ) مستقيمين متقاطعين. (ب) مستقيمين متوازيين مختلفين.

(جـ) مستقيم ونقطة تنتمى إليه. (د) ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة.

١٢ فى الشكل المقابل :



تكون محصلة القوى تعمل فى اتجاه ....

(أ) الجنوب. (ب) الشرق.

(جـ) الغرب. (د) الشمال.

١٣ أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم أثرت قوة مقدارها ١٠ نيوتن فى $\overrightarrow{أء}$ فإن مركبتى القوة فى اتجاه $\overrightarrow{أحـ}$ ، $\overrightarrow{أو}$ على الترتيب هما .... نيوتن.

(أ) $٥\sqrt{٣}$ ، ٥ (ب) ٥ ، $٥\sqrt{٣}$ (جـ) $١٠\sqrt{٣}$ ، ٥ (د) $١٠\sqrt{٣}$ ، ١٠

١٤ إذا كانت $\overrightarrow{ح}$ هى محصلة القوتين $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ وكانت ى قياس الزاوية بينهما

وكان $ق_١ : ق_٢ : ح = ٤ : ٢ : \sqrt{١٣}٢$ فإن : ى = ... °

(أ) ٩٠ (ب) ١٢٠ (جـ) ٦٠ (د) ٣٠

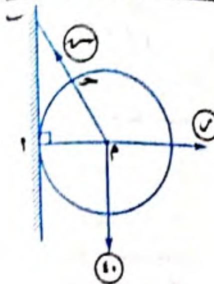
---

١٥ مركز الدائرة التى معادلتها : ٢ $س^٢$ + ٢ $ص^٢$ + ١٢ س − ١٦ ص = ٠ هو ....

(أ) (٣ ، −٤) (ب) (−٦ ، ٨) (جـ) (−٣ ، ٤) (د) (٦ ، −٨)

---

١٦ فى الشكل المقابل :



كرة منتظمة مركزها م ، وطول قطرها ٦ سم

ووزنها ٤٠ نيوتن ، بـجـ = ٢ سم

فإنه فى وضع الاتزان يكون ر + ش = ... نيوتن

(أ) ٢٤٠ (ب) ١٢٠

(جـ) ٦٠ (د) ٨٠

---

١٧ قياس الزاوية بين $\overrightarrow{ق_٢}$ ومحصلة القوتين ($\overrightarrow{ق_١}$ + $\overrightarrow{ق_٢}$) ، ($\overrightarrow{ق_١}$ − $\overrightarrow{ق_٢}$) هى ....

(أ) صفر° (ب) π (جـ) $\frac{\pi}{٢}$ (د) $\frac{\pi}{٣}$

---

١٨ مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٤ سم، وطول راسمه ٥ سم. يكون حجمه .... سم٣.

(أ) ٣٦ π (ب) ١٥ π (جـ) ٢٤ π (د) ١٢ π

---

١٩ إذا كان : $\overleftrightarrow{أب}$ ⊂ المستوى س ، $\overleftrightarrow{جـ ء}$ // المستوى س

فإن : $\overleftrightarrow{جـ ء}$ ، $\overleftrightarrow{أب}$ ....

(أ) متوازيان فقط. (ب) متخالفان فقط.

(جـ) متوازيان أو متخالفان. (د) متقاطعان.

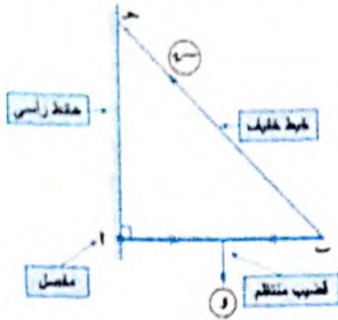
---

٢٠ إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ محور تماثل للدائرة التى معادلتها $س^٢ + ص^٢ = ل^٢$

وكان أ ، ب ∋ للدائرة حيث أ = (−٢ ، ٥) فإن : ب = ...

(أ) (٢ ، −٥) (ب) (٢ ، ٥) (جـ) (٠ ، ٠) (د) (٥ ، −٢)

٢١ فى الشكل المقابل :



اتجاه رد فعل المفصل على القضيب عند أ ....

(أ) فى اتجاه $\overrightarrow{أب}$

(ب) فى اتجاه $\overrightarrow{أجـ}$

(جـ) ينصف $\overline{بجـ}$

(د) عمودى على $\overline{بجـ}$

النموذج الثالث

أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ عدد المستويات التى تمر بثلاثة نقط ليست على استقامة واحدة تساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

---

٢ فى الشكل المقابل :



إذا كان : ءأ = ٣ سم ، أب = ٥ سم

فإن المساحة الكلية للمخروط = ... سم٢.

(أ) ٨ π (ب) ٢٤ π (جـ) ٤٨ π (د) ٣٦ π

---

٣ الصورة العامة لمعادلة الدائرة التى مركزها (٢ ، −١) وطول نصف قطرها ٣ سم.

هى : $س^٢ + ص^٢$ .... = ٠

(أ) −٤ س + ٢ ص − ٩ (ب) −٤ س + ٢ ص − ٤

(جـ) + ٢ س − ص + ٣ (د) + ٢ س − ص + ٩

---

٤ إذا كانت $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ ، $\overrightarrow{ق_٣}$ ثلاث قوى متزنة ومتلاقية فى نقطة بحيث :

$\overrightarrow{ق_١}$ = (٢ ، −٥) ، $\overrightarrow{ق_٢}$ = (−٣ ، ٢) فإن : $\overrightarrow{ق_٣}$ = ...

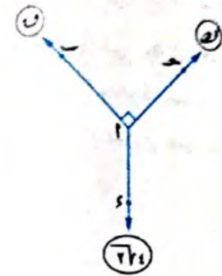
(أ) (٢ ، ١) (ب) (−١ ، −٣) (جـ) (١ ، ٣) (د) (٣ ، ١)

٥ قوتان مقدارهما ١٢ ، ١٥ نيوتن تؤثران فى جسيم وتحصران زاوية قياسها هـ° بحيث
جتا هـ = $-\frac{٤}{٥}$ فإن قياس الزاوية المحصورة بين المحصلة والقوة الأولى = ...

(أ) صفر° (ب) ٣٠° (جـ) ٩٠° (د) خلاف ذلك

---

٦ فى الشكل المقابل :



ثلاث قوى متزنة مقاديرها ق ، ك ، ٢√٢ نيوتن
، ق(∠ب أ جـ) = ٩٠° ، ق(∠ب أ د) = ١٣٥°
فإن : ق ، ك تساوى .... على الترتيب.

(أ) ٤ ، ٤ (ب) ٤ ، ٢√٢
(جـ) ٢√٢ ، ٤ (د) ٢ ، ٢

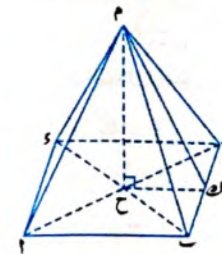
---

٧ مركز الدائرة : ٢ س^٢ + ٢ ص^٢ − ٣٢ = ٠ هو ....

(أ) (٠ ، ٠) (ب) (٢ ، ٢) (جـ) (١ ، ١) (د) (−١ ، −١)

---

٨ فى الشكل المقابل :



م أ ب جـ د هرم رباعى منتظم حجمه ٤٨ سم^٣ وارتفاعه ٤ سم
، ك جـ = ك ب ، $\overline{أجـ} \cap \overline{ب د} = \{ح\}$
، ق(∠م ح ك) = ق(∠ح ك ب) = ق(∠م ك ب) = ٩٠°
فإن المساحة الجانبية للهرم = ... سم^٢

(أ) ١٨ (ب) ٢٤
(جـ) ٣٦ (د) ٦٠

---

٩ مخروط دائرى قائم ، طول راسمه ١٧ سم. وارتفاعه ١٥ سم.
فإن طول نصف قطر قاعدته = ... سم.

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٠

---

١٠ إذا كان : ق ، ٢ مقدارى قوتين تؤثران فى جسيم وتحصران بينهما زاوية قياسها ١٢٠°
، المحصلة تنصف الزاوية المحصورة بين القوتين فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٣√ (د) خلاف ذلك.

١١ الصورة القطبية للمتجه أ = √٢ س + √٢ ص هى

(أ) (٢ ، ١٣٥°) (ب) (٤ ، ٤٥°) (جـ) (٢ ، ٤٥°) (د) (٤ ، ١٣٥°)

---

١٢ قوتان مقدارهما ٨ √٣ ، ٨ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وتحصران بينهما زاوية قياسها ١٥٠° فإن مقدار محصلتهما = ... نيوتن

(أ) ٦٤ (ب) ٣٢ (جـ) ١٦ (د) ٨

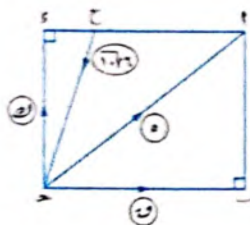
---

١٣ إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى مستوية متلاقية فى نقطة فإن مقدار كل قوة يتناسب مع .... الزاوية المحصورة بين القوتين الأخريين.

(أ) جيب تمام (ب) جيب (جـ) ظل (د) ظل التمام

---

١٤ فى الشكل المقابل :

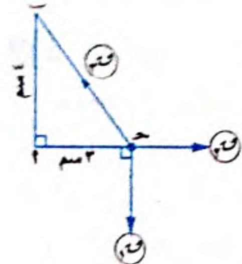


إذا كانت مقادير القوى ق ، ٥ ، ك ، ٦√١٠ متزنة وتؤثر فى المستطيل أ ب جـ د فى الاتجاهات
$\overleftarrow{جـ ب}$ ، $\overleftarrow{جـ أ}$ ، $\overleftarrow{جـ د}$ ، $\overleftarrow{جـ ح}$ بحيث أ ب = ٦ سم
، ب جـ = ٨ سم ، أ ح = ٦ سم
فإن قيمة ك = ... نيوتن.

(أ) ١٢ (ب) ١٥ (جـ) ١٨ (د) ٢٠

---

١٥ فى الشكل المقابل :



إذا كان الجسم متزن تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية فى نقطة مقاديرها ق١ ، ق٢ ، ق٣ نيوتن وأضلاع المثلث القائم توازى خطوط عمل هذه القوى وفى ترتيب دورى واحد
، أ ب = ٤ سم ، أ جـ = ٣ سم
فإن : ق١ : ق٢ : ق٣ = ...

(أ) ٣ : ٤ : ٥ (ب) ٣ : ٥ : ٤
(جـ) ٤ : ٥ : ٣ (د) ٤ : ٣ : ٥

١٦ عدد المستقيمات التى تمر بنقطتين مختلفتين ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

١٧ إذا كان الخط المستقيم ل // المستوى س فإن : ل ∩ س = ...

(أ) ل (ب) المستوى س (جـ) $\emptyset$ (د) خلاف ذلك.

١٨ إذا كانت الدائرة : س^٢ + ص^٢ + ٦ س − ١٢ ص + ٥ = ٠ تمر برؤوس خماسى منتظم علمًا بأن كل وحدة فى المستوى الاحداثى تمثل ٥ سم.

فإن مساحة سطح الخماسى المنتظم ≈ .... سم^٢.

(أ) ٨٧٣٢ (ب) ٧٨٢٣ (جـ) ٣٢٨٧ (د) ٢٣٧٨

١٩ وضع جسم وزنه ٨ ث.جم على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ بحيث ظا هـ = ٠.٦ وحفظ الجسم فى حالة الاتزان بواسطة قوة أفقية

فإن مقدار هذه القوة = ... داين.

(أ) ٦ (ب) ٥٨٨٠ (جـ) ٥٨٨ (د) خلاف ذلك.

٢٠ فى الشكل المقابل :

إذا كانت معادلة الدائرة م هى (س − ٣)^٢ + (ص + ٢)^٢ = ٢٥

، أب مماس للدائرة م عند أ حيث : ب = (−٢ ، ١٠)

فإن : أب = ... وحدة طول.

(أ) ١٣ (ب) ٧ (جـ) ١٢ (د) ٥

٢١ فى الشكل المقابل :

أ ب جـ د هـ و سداسى منتظم ، القوى التى مقاديرها

٨ ، ٦$\sqrt{٣}$ ، ٥ ، ٤$\sqrt{٣}$ نيوتن

أثرت فى أب ، أجـ ، أد ، أهـ بالترتيب

فإن مقدار محصلتهم = ... نيوتن.

(أ) $\sqrt{٥٦١}$ (ب) $\sqrt{٦٥١}$

(جـ) $\sqrt{١٥٦}$ (د) $\sqrt{١٦٥}$

النموذج الرابع

أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان : ق١ = ٢ س + ٢ ص ، ق٢ = س + ص حيث س ، ص ، ...

مقاسه بالنيوتن فإن : مقدار محصلتهما .... نيوتن.

(أ) $\sqrt{٢}$ (ب) $\sqrt{٥}$ (جـ) $\sqrt{١٣}$ (د) ٥

٢ إذا بلغت محصلة قوتين تؤثران فى نقطة قيمتها العظمى

فإن قياس الزاوية بينهما تساوى ....°

(أ) ٦٠ (ب) صفر (جـ) ١٢٠ (د) ١٨٠

٣ إذا كان حجم هرم رباعى منتظم ١٢ سم^٣ وارتفاعه ٤ سم

فإن : طول حرف قاعدته = ... سم.

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

٤ فى الشكل الموضح :

ق١ = ...

(أ) ١٢ حا ٧٥°

(ب) ١٢ حا ٤٥°

(جـ) ٦ قا ٤٥°

(د) ٦ قا ٧٥°

٥ فى الشكل المقابل :

المستوى أأ'ب ∩ المستوى أ'جـ'جـ = ...

(أ) أأ' (ب) ب ب'

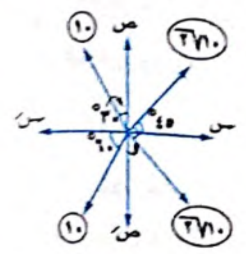
(جـ) جـ جـ' (د) أجـ

٦ إذا كان طول نصف قطر قاعدة مخروط قائم ٦ سم، وارتفاعه ٨ سم، فإن مساحته الجانبية تساوي .... سم^2.

(أ) ٦ π   (ب) ٢٨ π   (جـ) ١٠ π   (د) ٤٨ π

---

٧ في الشكل المقابل :



مقدار محصلة القوى ح = ... نيوتن.

(أ) ٢٠

(ب) ١٠ $\sqrt{٢}$

(جـ) ١٠

(د) صفر

---

٨ مركز الدائرة : س^2 + ص^2 − ٦ س + ٨ ص = صفر هو النقطة ....

(أ) (−٤ ، ٣)   (ب) (٤ ، −٣)   (جـ) (−٣ ، ٤)   (د) (٣ ، −٤)

---

٩ محيط الدائرة التي معادلتها : (س − ٣)^2 + (ص + ٢)^2 = ٢٥ يساوي .... وحدة طولية.

(أ) ٢ π   (ب) ٣ π   (جـ) ١٠ π   (د) ٢٥ π

---

١٠ إذا كان : $\overrightarrow{ق_1}$ = ٥ $\overrightarrow{س}$ + ٢ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ = أ $\overrightarrow{س}$ + ٦ $\overrightarrow{ص}$

، $\overrightarrow{ق_3}$ = −١٤ $\overrightarrow{س}$ + ب $\overrightarrow{ص}$ وكانت المحصلة $\overrightarrow{ح}$ = (١٠ $\sqrt{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$ π)

فإن : أ + ب = ...

(أ) −١   (ب) ١   (جـ) صفر   (د) ١٤

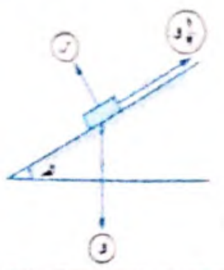
---

١١ إذا كان مجموع أطوال أحرف هرم ثلاثي منتظم الوجوه يساوي ١٨ سم

فإن : مساحته الكلية = ... سم^2

(أ) $\frac{٢٧\sqrt{٣}}{٤}$ (ب) $\frac{٢٧\sqrt{٣}}{٤}$ (جـ) $\frac{٢٧\sqrt{٣}}{٢}$ (د) ٩ $\sqrt{٣}$

١٢ في الشكل المقابل :



إذا كان الجسم متزن

تحت تأثير القوى المبينة بالشكل

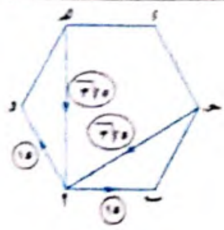
فإن : ق (∠ هـ) = ...

(أ) ٣٠°   (ب) ٦٠°

(جـ) ٤٥°   (د) ١٥°

---

١٣ في الشكل المقابل :



أ ب جـ د هـ و سداسي منتظم

أثرت القوى ١٥ ، ٥ $\sqrt{٣}$ ، ٥ $\sqrt{٣}$ ، ١٥ نيوتن

على الترتيب في الأضلاع $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{جـأ}$ ، $\overleftarrow{هـأ}$ ، $\overleftarrow{أو}$

فإن : مقدار المحصلة ح = ... نيوتن.

(أ) ٥   (ب) ١٠   (جـ) ٢٥   (د) صفر

---

١٤ إذا اتزنت ثلاث قوى متلاقية في نقطة فإن مقدار كل قوة يتناسب مع .... الزاوية المحصورة بين القوتين الأخريين.

(أ) جيب تمام   (ب) جيب   (جـ) ظل   (د) ظل تمام

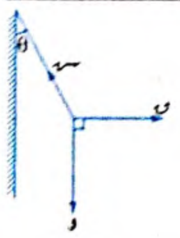
---

١٥ طول نصف قطر قاعدة مخروط دائري قائم مساحته الكلية ٩٦ π سم^2. وطول راسمه ١٠ سم. يساوي .... سم.

(أ) ٦   (ب) ١٤   (جـ) ١٦   (د) −١٦

---

١٦ في الشكل المقابل :



علق ثقل مقداره (و) نيوتن في طرف خيط مثبت طرفه الآخر في حائط رأسي وشد الثقل بقوة أفقية مقدارها ق نيوتن حتى أصبح الخيط مائلاً على الحائط بزاوية قياسها θ

فأي الجمل الآتية غير صحيح في وضع الاتزان ....

(أ) ق = و ظا θ   (ب) ش = ق + و

(جـ) $\overrightarrow{و}$ + $\overrightarrow{ق}$ + $\overrightarrow{ش}$ = $\overrightarrow{صفر}$ (د) ش^2 = ق^2 + و^2

١٧ إذا كان حجم هرم سداسى منتظم يساوى $٨\sqrt{٣}$ سم^٣، وارتفاعه يساوى ٤ سم.

فإن : محيط قاعدته = ... سم.

(أ) ٢ (ب) ١٢ (جـ) ٦ (د) $٦\sqrt{٣}$

---

١٨ قوة مقدارها $٥\sqrt{٣}$ نيوتن تؤثر فى اتجاه ٣٠° شرق الشمال حللت إلى مركبتين متعامدين

فإن : مقدار المركبة فى اتجاه الشرق = ... نيوتن.

(أ) ٥ (ب) $٧\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٥\sqrt{٣}}{٢}$ (د) ١٥

---

١٩ معادلة الدائرة التى تمس المحورين ومركزها النقطة (-٤ ، ٤) هى ....

(أ) $س^٢ + ص^٢ + ٨ س - ٨ ص + ١٦ = ٠$

(ب) $س^٢ + ص^٢ = ١٦$

(جـ) $س^٢ + ص^٢ - ٨ س + ٨ ص + ١٦ = ٠$

(د) $س^٢ + ص^٢ = ٨$

---

٢٠ أقل عدد من المستويات التى تحدد مجسمًا هو ....

(أ) ٣ مستويات. (ب) ٤ مستويات. (جـ) مستويان. (د) ٥ مستويات.

---

٢١ فى الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٢٠ سم ووزنه ٣٠ نيوتن متصل بمفصل مثبت فى حائط رأسى عند أ والطرف ب مربوط بخيط خفيف طوله $٢٠\sqrt{٢}$ سم. مثبت طرفه الآخر عند حـ على الحائط فإذا اتزن القضيب أفقيًا فإن رد الفعل المفصل على القضيب ....

(أ) فى اتجاه $\overleftarrow{أب}$ (ب) خط عمله يبتعد عن الحائط مسافة ١٠ سم.

(جـ) ينصف $\overline{ب حـ}$ (د) مقداره ١٥ نيوتن.

النموذج الخامس

أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ قوتان متلاقيتان فى نقطة مقدارهما ٣ ق ، ٢ ق ومقدار محصلتهما ٥ ق فيكون قياس الزاوية بينهما ....

(أ) ٦٠° (ب) صفر° (جـ) ٣٠° (د) ١٨٠°

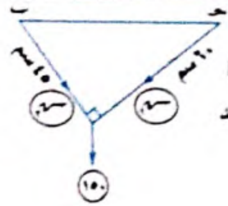
---

٢ قوتان مقدارهما ق ، ٢ ق محصلتهما تكون عمودية على إحداهما فإن : ح = ...

(أ) $\sqrt{٥}$ ق (ب) $\sqrt{٣}$ ق (جـ) ٣ ق (د) ق

---

٣ فى الشكل المقابل :



جسم وزنه ١٥٠ ث.جم متزن بربطه بخيطين متعامدين طولاهما ٦٠ سم ، ٤٥ سم وطرفا الخيطين حـ ، ب على خط أفقى واحد

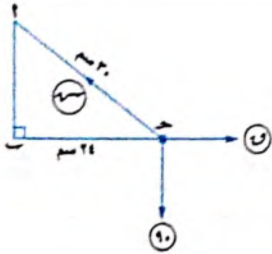
فإن : $ش_١ - ش_٢$ = ... ث.جم

(أ) ١٢٠ (ب) ٩٠

(جـ) ٦٠ (د) ٣٠

---

٤ فى الشكل المقابل :



جسم وزنه ٩٠ ث.جم ، على بعد ٢٤ سم. من الحائط وطول الخيط ٣٠ سم.

فإن : ش - ق = ... ث.جم.

(أ) ١٥٠ (ب) ١٢٠

(جـ) ٥٠ (د) ٣٠

---

٥ أ ب حـ ء شبه منحرف قائم الزاوية عند كل من أ ، ء فيه :

أء = حـ ء = ٤٠ سم ، أب = ٧٠ سم ، م ∈ $\overline{أب}$ حيث أم = ٤٠ سم أثرت القوى ٢٥ ، ق ، $١٠\sqrt{٢}$ ، ٢٥ ث.جم فى $\overrightarrow{حـ ب}$ ، $\overrightarrow{حـ م}$ ، $\overrightarrow{حـ أ}$ ، $\overrightarrow{حـ ء}$ على الترتيب وكان معيار محصلة هذه القوى يساوى ٥٠ ث.جم فإن : قيمة ق = ... ث.جم

(أ) ١٠ (ب) ٥٠ (جـ) ٢٠ (د) ٣٠

٦ أى مجموعات القوى التى مقاديرها كالتالى لا يمكن أن تكون متزنة ....

(أ) ١٠ نيوتن ، ١٠ نيوتن ، ٥ نيوتن. (ب) ٤ نيوتن ، ٦ نيوتن ، ٨ نيوتن.

(جـ) ١٢ نيوتن ، ٧ نيوتن ، ٨ نيوتن. (د) ٨ نيوتن ، ٤ نيوتن ، ١٤ نيوتن.

---

٧ وضع جسم وزنه ١٠٠ نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ فى حالة توازن بواسطة قوة أفقية.

فإن مقدار القوة الأفقية = ... نيوتن.

(أ) ١٠٠ (ب) ٥٠ (جـ) $\frac{١٠٠}{\sqrt{٣}}$ (د) ١٥٠

---

٨ قوتان مقدارهما ق ، $\sqrt{٣}$ ق نيوتن متلاقيتان فى نقطة وكان مقدار محصلتهما $ح_1$ عندما كان قياس الزاوية بينهما ٩٠° ثم أصبح مقدار محصلتهما $ح_2$ عندما كان قياس الزاوية بينهما ١٥٠° فإن : ....

(أ) $ح_1 = ح_2$ (ب) $ح_1 = ٢ ح_2$ (جـ) $ح_1 = \frac{٣}{٥} ح_2$ (د) $ح_1 = \frac{١}{٢} ح_2$

---

٩ أثرت قوى مقاديرها ق ، ٦ ، $٤\sqrt{٢}$ ، $٥\sqrt{٢}$ ، ك نيوتن فى نقطة مادية فى اتجاهات الشرق ، الشمال ، الشمال الغربى ، الجنوب الغربى ، الجنوب على الترتيب.

وكان مقدار محصلة القوى = ٢ نيوتن فى اتجاه الشمال فإن : ق - ك = ...

(أ) ١٢ (ب) ٢٧ (جـ) ٦ (د) ١٢

---

١٠ قوتان متعامدتان مقدارهما ٢ ق - ٥ ، ق + ٢ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية.

مقدار محصلتهما يساوى $٣\sqrt{٥}$ نيوتن فإن : ق = ... نيوتن

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

---

١١ كرة ملساء من الحديد وزنها و ث.كجم مستقرة بين حائط رأسى أملس ومستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ حيث جا هـ = $\frac{٣}{٥}$ فإذا اتزنت الكرة فإن مجموع مقدارى الضغط على كل من الحائط والمستوى المائل = ... ث.كجم.

(أ) $\frac{٤}{٣}$ و (ب) $\frac{٥}{٣}$ و (جـ) ٢ و (د) $\frac{١}{٣}$ و

١٢ عدد المستويات التى تمر بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٦ (د) عدد لا نهائى

---

١٣ حجم هرم رباعى منتظم محيط قاعدته ٣٦ سم وارتفاعه ١٠ سم يساوى .... سم³

(أ) ٨١٠ (ب) ١٨٠ (جـ) ٣٦٠ (د) ٢٧٠

---

١٤ مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٢٤ سم وطول راسمه ٢٦ سم

فإن مساحة قاعدته .... سم²

(أ) ٢٥ π (ب) ١٠٠ π (جـ) ٢٠ π (د) ٥٠ π

---

١٥ إذا كان حجم نصف كرة طول نصف قطرها (نق) يساوى حجم مخروط طول نصف قطر قاعدته نق وارتفاعه ع فإن : ......

(أ) ع = $\frac{٥}{٢}$ نق (ب) ع = ٢ نق (جـ) ع = ٢ نق² (د) ع = ٤ نق

---

١٦ النسبة بين حجم هرم ثلاثى منتظم وحجم أكبر مخروط دائرى قائم يمكن وضعه داخل الهرم يساوى ....

(أ) $\frac{٣\sqrt{٣}}{\pi}$ (ب) $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢\pi}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{\pi}$ (د) $\frac{٣\sqrt{٣}}{٤\pi}$

---

١٧ إذا كان مجموع أطوال أحرف هرم ثلاثى منتظم الأوجه يساوى ١٨ سم

فإن حجمه = ... سم³

(أ) $٩\sqrt{٢}$ (ب) $\frac{٩\sqrt{٢}}{٤}$ (جـ) $\frac{٢٧\sqrt{٢}}{٥}$ (د) $٩\sqrt{٣}$

---

١٨ معادلة الدائرة التى مركزها (١ ، ٢) وتمس المستقيم ٣ س + ٤ ص + ٩ = ٠ هى ....

(أ) س² + ص² - ٢ س - ٤ ص = ١٦ (ب) س² + ص² + ٢ س + ٤ ص = ١١

(جـ) س² + ص² + ٢ س + ٤ ص - ١٦ = ٠ (د) س² + ص² - ٢ س - ٤ ص = ١١

١٩ الدائرتان (س + ٢)^{2} = ١ − ص^{2} ، س^{2} + ص^{2} − ٢ س − ٨ ص − ١٩ = ٠

تكونان ....

(أ) متقاطعتين.　　(ب) متماستين من الداخل.

(جـ) متباعدتين.　　(د) متماستين من الخارج.

---

٢٠ مساحة سطح مضلع منتظم عدد أضلاعه ١٢ ضلعًا وتمر برؤوسه الدائرة :

س^{2} + ص^{2} − ١٦ = ٠ هي .... وحدة مربعة.

(أ) ٢٤　　(ب) ٣٦　　(جـ) ٤٨　　(د) ٧٢

---

٢١ طول القطعة المماسة للدائرة : س^{2} + ص^{2} = نق^{2}

من النقطة (٠ ، ٢ نق) = ... وحدة طول

(أ) نق　　(ب) ٢ نق　　(جـ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ نق　　(د) $\sqrt{3}$ نق

الإجابــات



إجابات الاختبارات التراكمية القصيرة فى الاستاتيكا

الاختبار الأول

1. ① (د) ② (ب) ③ (أ) ④ (جـ)
2. ق = ٨ نيوتن / قياس زاوية ميل المحصلة على $\overrightarrow{ق}$ = ٣٠°
3. ق = ٨ نيوتن

الاختبار الثانى

1. ① (أ) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (د)
2. ق = $٢\sqrt{٢}$ نيوتن ، ع = ٤ نيوتن
3. ٥٠ ، $١٠٠\sqrt{٣}$ نيوتن.

الاختبار الثالث

1. ① (ب) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (جـ)
2. ع = ١٦,١٥ ث.كجم ، ه = ٩٩ ٣٠°
3. ٢٢ ، ١٠ ث.كجم ، ع = $٢\sqrt{٢٠١}$ ث.كجم

الاختبار الرابع

1. ① (جـ) ② (د) ③ (ب) ④ (أ)
2. $١٠٠\sqrt{٣}$ ث.جم ، $١٠٠\sqrt{٣}$ ث.جم
3. أ = −١ ، ب = ١

الاختبار الخامس

1. ١٣٥° ، أثبت بنفسك.
2. ع = $٤\sqrt{٢}$ نيوتن وتعمل فى إتجاه $\overrightarrow{أحـ}$

3. سم = $\frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$ ث.جم ، ص = $\frac{١٠\sqrt{٣}}{٣}$ ث.جم
4. $٦\sqrt{٢}$ نيوتن ، $٦\sqrt{٢}$ نيوتن

إجابات الاختبارات التراكمية القصيرة فى الهندسة والقياس

الاختبار الأول

1. ① (د) ② (أ) ③ (د) ④ (أ) ⑤ (د)
2. ① المستويان أ ب حـ ء ، أ ب حَ ءَ
   (يوجد إجابات أخرى)
   ② المستويان أ ب حـ ء ، أ ب بَ أَ
   (يوجد إجابات أخرى)
   ③ المستقيمان $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{بَحَ}$
   (يوجد إجابات أخرى)
   ④ $\overleftrightarrow{أب}$ ، المستوى أ بَ حَ ءَ
   (يوجد إجابات أخرى)
   ⑤ $\overleftrightarrow{أب}$

الاختبار الثانى

1. ① (ب) ② (جـ) ③ (ب) ④ (د)
2. ① المساحة الجانبية = ٨٠٠ سم²
   ② الحجم = $\frac{٤٠٠٠\sqrt{٣}}{٣}$ سم³
3. المساحة الكلية = $٢٧٦\sqrt{٣}$ سم²

الاختبار الثالث

1. ① (أ) ② (أ) ③ (د) ④ (د)

الاختبار الرابع

إجابات امتحان الكتاب المدرسى

1. ① (أ) ② (د) ③ (د) ④ (ب)
2. (أ) أ = −١ ، ب = ١
   (ب) $١٠٠\sqrt{٢}$ ث.جم ، $١٠٠\sqrt{٢}$ ث.جم
3. (أ) $س^٢ + ص^٢ - ٤س + ٢ص - ٤ = ٠$
   (ب) $\frac{٢٠\sqrt{٢}}{٢}$ ، $\frac{١٠\sqrt{٢}}{٢}$ ث.جم
4. (أ) ٢٢,٩٥٩ سم
   (ب) ١٢٠ ث.جم ، ٩٠ ث.جم
5. (أ) ع = $\sqrt{٦٥١}$ نيوتن ، هـ = ٤٠ ٩°
   (ب) $١٥\sqrt{٢}$ ، $١٥\sqrt{٢}$ نيوتن.

إجابات نماذج الامتحانات النهائية

النموذج الأول

النموذج الثاني

١ (أ) **٢** (ب) **٣** (أ)

٤ (ب) **٥** (د)

٦

$ح_١ = ٢ ق \text{ جتا } \frac{ى}{٢} = ١٢$

$\therefore ق \text{ جتا } \frac{ى}{٢} = ٦$ (١)

، $ح_٢ = ٢ ق \text{ جتا } \left(\frac{١٨٠ - ى}{٢}\right) = ٦$

$\therefore ق \text{ جا } \frac{ى}{٢} = ٣$ (٢)

بتربيع المعادلتين وجمعهما :

$\therefore ق^٢ \text{ جتا}^٢ \frac{ى}{٢} + ق^٢ \text{ جا}^٢ \frac{ى}{٢} = ٦^٢ + ٣^٢$

$\therefore ق^٢ \left(\text{جتا}^٢ \frac{ى}{٢} + \text{جا}^٢ \frac{ى}{٢}\right) = ٤٥$

$\therefore ق^٢ = ٤٥$

$\therefore ق = \sqrt{٤٥} = ٣\sqrt{٥}$ ث.كجم.

٧ (ج) **٨** (أ) **٩** (د)

١٠ (ج) **١١** (ب)

١٢

① في Δ م ن هـ :

م ن $= \sqrt{(٢٥)^٢ - (٢٠)^٢}$

$= ١٥$ سم

$\therefore$ الارتفاع $= ١٥$ سم

② المساحة الجانبية

$= \frac{١}{٢} \times$ محيط القاعدة $\times$ الارتفاع الجانبي

$= \frac{١}{٢} \times (٤ \times ٤٠ \times ٢٥) = ٢٠٠٠$ سم^٢

③ المساحة الكلية $= ٢٠٠٠ + (٤٠)^٢ = ٣٦٠٠$ سم^٢

④ الحجم $= \frac{١}{٣} \times (٤٠)^٢ \times ١٥ = ٨٠٠٠$ سم^٣

١٣ (د) **١٤** (ج) **١٥** (ج)

١٦

طول القوس أ ب

$=$ م ب $\times \theta^{د}$

$= ٣٦ \times \frac{٢١٠}{١٨٠} \pi$

$= ٤٢ \pi$ سم

$\because$ محيط قاعدة المخروط $= ٤٢ \pi$

$\therefore ٢ \pi$ نق $= ٤٢ \pi$

$\therefore$ نق $= ٢١$

$\therefore ع = \sqrt{(٣٦)^٢ - (٢١)^٢}$

$= ٣\sqrt{٩٥}$ سم $\simeq ٢٩,٢$ سم

١٧ (أ) **١٨** (أ) **١٩** (ب)

٢٠ (أ) **٢١** (ج) **٢٢** (ب)

٢٣ (أ) **٢٤** (أ)

النموذج الثالث

١ (ج) **٢** (أ) **٣** (ج) **٤** (ب)

٥

$\because (٦٠)^٢ + (٨٠)^٢ = (١٠٠)^٢$

$\therefore \Delta$ أ حـ ب قائم الزاوية في حـ

، باستخدام قاعدة لامي :

$\frac{٢٠٠}{\text{جا } ٩٠} = \frac{ش_١}{\text{جا هـ}_١} = \frac{ش_٢}{\text{جا هـ}_٢}$

، $\because$ جا هـ$_١ = \frac{ب حـ}{أ ب} = \frac{٨٠}{١٠٠} = \frac{٤}{٥}$

، جا هـ$_٢ = \frac{أ حـ}{أ ب} = \frac{٦٠}{١٠٠} = \frac{٣}{٥}$

$\therefore \frac{٢٠٠}{١} = \frac{ش_١}{\frac{٤}{٥}} = \frac{ش_٢}{\frac{٣}{٥}}$

$\therefore ش_١ = ٢٠٠ \times \frac{٤}{٥} = ١٦٠$ ث.جم

، $ش_٢ = ٢٠٠ \times \frac{٣}{٥} = ١٢٠$ ث.جم.

٦ (د) **٧** (ج) **٨** (ج)

٩ (ب)

١٠

بفرض أن :

$\overrightarrow{و س}$ هو اتجاه القوة الأولى

س $= ٨$ جتا صفر$^\circ$

$+ ٤\sqrt{٣}$ جتا ٣٠°

$+ ٦\sqrt{٣}$ جتا ١٥٠°

$+ ١٤$ جتا ٢٤٠°

$= ٨ \times ١ + ٤\sqrt{٣} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + ٦\sqrt{٣} \times \left(\frac{-\sqrt{٣}}{٢}\right)$

$+ ١٤ \times \left(\frac{-١}{٢}\right) = -٢$

ص $= ٨$ جا صفر $+ ٤\sqrt{٣}$ جا $٣٠^\circ + ٦\sqrt{٣}$ جا ١٥٠°

$+ ١٤$ جا $٢٤٠^\circ = ٨ \times$ صفر $+ ٤\sqrt{٣} \times \frac{١}{٢}$

$+ ٦\sqrt{٣} \times \frac{١}{٢} + ١٤ \times \left(\frac{-\sqrt{٣}}{٢}\right) = -٢\sqrt{٣}$

$\overrightarrow{ح} = -٢ \overrightarrow{س} - ٢\sqrt{٣} \overrightarrow{ص}$

$ح = \sqrt{(-٢)^٢ + (-٢\sqrt{٣})^٢} = ٤$ نيوتن.

ظا هـ $= \frac{-٢\sqrt{٣}}{-٢} = \sqrt{٣}$

س < ٠ ، ص < ٠ $\therefore$ هـ $= ٢٤٠^\circ$

مقدار المحصلة $= ٤$ نيوتن وتصنع زاوية قياسها ٢٤٠° مع و س

١١ [illegible] **١٢** (ب) **١٣** (ج)

١٤ [illegible] **١٥** (ب)

١٦

$\because$ مركز الدائرة الأولى م$_١$ $(١ ، -٣)$

، الدائرة الثانية :

س^٢ + ص^٢ $- ٢$ س $+ ٦$ ص $+ \frac{٣٤}{٤} = ٠$

$\therefore$ مركز الدائرة الثانية م$_٢$ $= (١ ، -٣)$

$\therefore$ الدائرتان لهما نفس المركز.

$\therefore$ الدائرتان متحدتان المركز.

نق$_١ = \sqrt{(١)^٢ + (-٣)^٢ - ١} = ٣$ وحدة طول

نق$_٢ = \sqrt{(١)^٢ + (-٣)^٢ - \frac{٣٤}{٤}} = ١,٥$ وحدة طول

١٧ (ب) **١٨** (ب) **١٩** (د)

٢٠ (د) **٢١** (د) **٢٢** (ج)

٢٣ (ب) **٢٤** (ب)

النموذج الرابع

١ (د) **٢** (ب) **٣** (ج)

٤

من هندسة الشكل

حـ هـ $= ٢\sqrt{١٠}$ سم

$\because$ القوى متزنة.

$\therefore$ س $=$ صفر

، ص $=$ صفر

$\therefore$ ق جتا صفر $+ ٥$ جتا هـ $- ٦\sqrt{١٠}$ جتا ى

$+$ ك جتا $٩٠^\circ =$ صفر

$\therefore$ ق $+ ٥ \times \frac{٨}{١٠} - ٦\sqrt{١٠} \times \frac{٢}{٢\sqrt{١٠}} +$ ك $\times$ صفر

$=$ صفر

$\therefore$ ق $= ٢$ نيوتن.

، ق جا صفر $+ ٥$ جا هـ $- ٦\sqrt{١٠}$ جا ى $+$ ك جا ٩٠°

$=$ صفر

$\therefore$ صفر $+ ٥ \times \frac{٦}{١٠} - ٦\sqrt{١٠} \times \frac{٢}{\sqrt{١٠}٢} +$ ك $\times ١$

$=$ صفر

$\therefore$ ك $= ١٥$ نيوتن.

٥ (د) **٦** (د)

٧

طول نصف قطر قاعدة المخروط $= ٦$ وحدات

، ارتفاعه $= ٨$ وحدات.

$\therefore$ حجم المخروط $= \frac{١}{٣} \times \pi (٦)^٢ \times ٨$

$= ٩٦ \pi$ وحدة مكعبة.

، طول الراسم $= \sqrt{(٦)^٢ + (٨)^٢} = ١٠$ وحدات.

$\therefore$ المساحة الكلية $= \pi$ نق (ل + نق)

$= \pi \times ٦ (١٠ + ٦)$

$= ٩٦ \pi$ وحدة مربعة.

٨ (د) **٩** (ب) **١٠** (د)

١١ (أ) **١٢** (أ)

١٣

بفرض أن المركز (س ، ٠) $\in$ محور السينات.

$\therefore$ المركز يقع على أبعاد متساوية من (١ ، ٣) ، (٢ ، -٤)

$\therefore \sqrt{(س - ١)^٢ + (٠ - ٣)^٢}$

$= \sqrt{(س - ٢)^٢ + (٠ - (-٤))^٢}$

$\therefore \sqrt{س^٢ - ٢ س + ١ + ٩} = \sqrt{س^٢ - ٤ س + ٤ + ١٦}$

$\therefore$ س^٢ $- ٢$ س $+ ١٠ =$ س^٢ $- ٤$ س $+ ٢٠$

$\therefore ٢$ س $= ١٠$ $\therefore$ س $= ٥$

$\therefore$ المركز $= (٥ ، ٠)$

$\therefore$ نق $= \sqrt{(٥ - ١)^٢ + (٠ - ٣)^٢} = ٥$

$\therefore$ معادلة الدائرة هي (س $- ٥)^٢$ + ص^٢ $= ٢٥$

١٤ (أ) **١٥** (د) **١٦** (أ)

١٧ (ج) **١٨** (ج) **١٩** (ب)

٢٠ (ج) **٢١** (ج) **٢٢** (ج)

٢٣ (د) **٢٤** (د)

النموذج الخامس

١ (د) **٢** (أ) **٣** (د)

٤ (ب) **٥** (ج)

٦

$\because$ المساحة الكلية

$= \pi$ نق (ل + نق)

$\therefore ٩٦ \pi = \pi \times$ نق $\times (١٠ +$ نق$)$

$\therefore ٩٦ =$ نق $\times (١٠ +$ نق$)$

$\therefore$ نق^٢ $+ ١٠$ نق $- ٩٦ = ٠$

$\therefore$ نق $= -١٦$ (مرفوض) أو نق $= ٦$ سم

$\therefore$ ع $= \sqrt{(١٠)^٢ - (٦)^٢} = ٨$ سم

$\therefore$ حجم المخروط $= \frac{١}{٣} \pi (٦)^٢ \times ٨$ ٩٦π سم^٣

٧

من الشكل :

Δ أ ب حـ يمثل مثلث القوى

أ ب $= \sqrt{(٢٠)^٢ - (١٠)^٢}$

$= ١٠\sqrt{٣}$

$\therefore \frac{٢٠}{١٠\sqrt{٣}} = \frac{ر}{١٠} = \frac{ش}{٢٠}$

$\therefore$ ش $= \frac{٢٠ \times ٢٠}{١٠\sqrt{٣}} = ٢٠\sqrt{٣}$ ثقل جم.

، ر $= \frac{٢٠ \times ١٠}{١٠\sqrt{٣}} = ١٠\sqrt{٣}$ ثقل جم.

٨ (ب)

٩ (ج)

١٠

اعتبر $\overrightarrow{حـ ب}$ ، $\overrightarrow{حـ ء}$

هو المحوران $\overrightarrow{و س}$ ، $\overrightarrow{و ص}$

$\therefore$ س $= ٢$ جتا صفر$^\circ$

$+ ٧\sqrt{٥}$ جتا θ

$+ ٤\sqrt{٢}$ جتا $٤٥^\circ + ٤$ جتا ٩٠°

$= ٢ + ٧\sqrt{٥} \times \frac{١٠}{٥\sqrt{٥}} + ٤\sqrt{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$+$ صفر $= ٢٠$ نيوتن.

، ص $= ٢$ جا صفر $+ ٧\sqrt{٥}$ جا $\theta + ٤\sqrt{٢}$ جا ٤٥°

$+ ٤$ جا $٩٠^\circ =$ صفر $+ ٧\sqrt{٥} \times \frac{٥}{٥\sqrt{٥}} + ٤\sqrt{٢}$

$\times \frac{١}{\sqrt{٢}} + ٤ = ١٥$ نيوتن.

$\therefore ح = \sqrt{(٢٠)^٢ + (١٥)^٢} = ٢٥$ نيوتن.

، ظا هـ $= \frac{ص}{س} = \frac{١٥}{٢٠} = \frac{٣}{٤}$

$\therefore \theta = ٣٦^\circ ٥٢'$ مع القوى الأولى.

١١ (ب) **١٢** (د) **١٣** (ب)

١٤ (ب) **١٥** (ج) **١٦** (د)

١٧ (د) **١٨** (د)

١٩ (ج) **٢٠** (ج) **٢١** (ب)

٢٢ (د) **٢٣** (ب) **٢٤** (د)

النموذج السادس

١ (ج) **٢** (أ) **٣** (د)

٤ (ب) **٥** (ج)

٦ (ج) **٧** (أ)

٨

$\because$ (أ ب)^٢ = (ب حـ)^٢ + (أ حـ)^٢

$\therefore$ ق (ـ أ حـ ب) $= ٩٠^\circ$

$\therefore$ حـ ء $= \frac{١}{٢}$ أ ب $= ٥٠$ سم

$\therefore$ حـ ء $=$ ء ب

$\therefore$ ق (ـ ب) $=$ هـ

، حـ ء $=$ ء أ $\therefore$ ق (ـ أ) $=$ هـ

$\therefore \frac{ش_١}{\text{جا}(٩٠^\circ + هـ)} = \frac{ش_٢}{\text{جا}(٩٠^\circ + هـ)} = \frac{١٥٠}{\text{جا } ٩٠^\circ}$

$\therefore \frac{ش_١}{\text{جتا هـ}} = \frac{ش_٢}{\text{جتا هـ}} = \frac{١٥٠}{١}$

$\therefore \frac{ش_١}{\frac{٤}{٥}} = \frac{ش_٢}{\frac{٣}{٥}} = \frac{١٥٠}{١}$

$\therefore$ ش$_١$ $= ٩٠$ ثقل.جم ، ش$_٢$ $= ١٢٠$ ثقل.جم

٩ (د)

١٠

$\because$ حجم الهرم $= ١٢٩٦$

$\therefore \frac{١}{٣} \times (١٨)^٢ \times ع = ١٢٩٦$

$\therefore$ ع $= ١٢$ سم

$\therefore$ الارتفاع الجانبي $= \sqrt{(١٢)^٢ + (٩)^٢} = ١٥$ سم

$\therefore$ المساحة الجانبية $= \frac{١}{٢}$ محيط القاعدة

$\times$ الارتفاع الجانبي $= \frac{١}{٢} \times (٤ \times ١٨) \times ١٥$

$= ٥٤٠$ سم^٢

١١ (أ) **١٢** (د) **١٣** (ج)

١٤ (ج) **١٥** (ج)

١٦

المجسم الناشئ من

الدوران حول ب حـ

عبارة عن مخروطين

لهما نفس القاعدة ومتطابقان

١٧ (أ) **١٨** (جـ) **١٩** (جـ) **٢٠** (جـ)

٢١ (أ) **٢٢** (ب) **٢٣** (جـ) **٢٤** (جـ)

∴ ٢ء = √((١٠)٢ − (٦)٢) = ٨ سم

∴ حجم الجسم الناتج = ٢ (١/٣ π نق٢ ع)

= ٢ × ١/٣ × π × (٨)٢ × ٦

= ٢٥٦ π سم٣

النموذج السابع

١ (جـ) **٢** (أ) **٣** (أ) **٤** (ب)

٥ (جـ) **٦** (ب) **٧** (أ)

٨

∵ المساحة الجانبية = ٢٤٠

∴ ١/٢ (محيط القاعدة) × الارتفاع الجانبي = ٢٤٠

وبفرض طول ضلع القاعدة = ل سم

∴ ١/٢ × ٤ ل × ١٢ = ٢٤٠

∴ ل = ١٠ سم

∴ ع = √((١٢)٢ − (٥)٢) = √١١٩ سم

، حجم الهرم = ١/٣ × مساحة القاعدة × ع

= ١/٣ × (١٠)٢ × √١١٩

= ١٠٠/٣ √١١٩ ≃ ٣٦٣,٦ سم٣

٩ (جـ)

١٠

∵ المستويان أملسان

∴ كلًّا من ر١ ، ر٢ عمودى على مستويهما ويمران بمركز الكرة وبتطبيق قاعدة لامى

∴ ر١ / جا ١٥٠° = ر٢ / جا ٩٠° = ٤٠٠ / جا ١٢٠°

∴ ر١ = (٤٠٠ × جا ١٥٠°) / جا ١٢٠° = ٤٠٠√٣ / ٣ ثقل كجم.

∴ ر٢ = (٤٠٠ × جا ٩٠°) / جا ١٢٠° = ٨٠٠√٣ / ٣ ثقل كجم.

١١ (د) **١٢** (ب)

١٣

∵ Δ أهـ ب قائم الزاوية فى ب

∴ أهـ = √((٥)٢ + (١٢)٢)

= ١٣ سم

∴ جا (د ب أ هـ) = ٥/١٣

، جتا (د ب أ هـ) = ١٢/١٣

، ∵ أحـ قطر فى المربع أ ب حـ ء

∴ θ = ٤٥°

∴ س = ٢ جتا صفر° + ١٣ جتا (د ب أ هـ) + ٩ جتا ٩٠° + ٤√٢ جتا ٢٢٥°

= ٢ × ١ + ١٣ × ١٢/١٣ + ٩ × صفر + ٤√٢ × −١/√٢ = ١٠

، ص = ٢ جا صفر° + ١٣ جا (د ب أ هـ) + ٩ جا ٩٠° + ٤√٢ جا ٢٢٥°

= ٢ × صفر + ١٣ × ٥/١٣ + ٩ × ١ + ٤√٢ × −١/√٢ = ١٠

∴ ح = ١٠ س + ١٠ ص

∴ ح = √((١٠)٢ + (١٠)٢) = ١٠√٢ ثقل جم.

، ظا هـ = ١٠/١٠ = ١ ، ∵ س > ٠ ، ص > ٠

∴ هـ = ٤٥°

∴ ح يؤثر فى اتجاه أحـ

١٤ (جـ) **١٥** (ب)

١٦ (د) **١٧** (ب) **١٨** (ب)

١٩ (جـ) **٢٠** (جـ) **٢١** (جـ)

٢٢ (ب) **٢٣** (د) **٢٤** (جـ)

النموذج الثامن

١ (جـ) **٢** (د) **٣** (د)

٤ (ب) **٥** (د)

٦

∵ حجم الهرم = ١/٣ × مساحة القاعدة × الارتفاع

∴ ٨√٣ = ١/٣ × مساحة القاعدة × ٤

∴ مساحة القاعدة = ٦√٣ سم٢

∴ ٦/٤ × س٢ ظتا π/٦ = ٦√٣

∴ س٢ = ٤ ∴ س = ٢

∴ طول ضلع السداسى = ٢ سم

∴ محيط القاعدة = ٢ × ٦ = ١٢ سم

٧ (جـ) **٨** (أ)

٩ (د) **١٠** (د)

١١

س = ق جتا صفر + ٨٠ جتا ٦٠° + ك جتا ٩٠° + ٥٠ جتا ١٨٠° + ٨٠√٣ جتا ٢٧٠°

= ق × ١ + ٨٠ × ١/٢ + ك × صفر + ٥٠ × −١ + ٨٠√٣ × صفر = ق − ١٠

، ص = ق جا صفر + ٨٠ جا ٦٠° + ك جا ٩٠° + ٥٠ جا ١٨٠° + ٨٠√٣ جا ٢٧٠°

= ق × صفر + ٨٠ × √٣/٢ + ك × ١ + ٥٠ × صفر + ٨٠√٣ × −١ = ك − ٤٠√٣

∴ ح = (ق − ١٠) س + (ك − ٤٠√٣) ص   (١)

، ∵ ح = ٤٠ نيوتن فى اتجاه ٦٠° شمال شرق.

∴ ح = (٤٠ جتا ٦٠°) س + (٤٠ جا ٦٠°) ص

= ٢٠ س + ٢٠√٣ ص   (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ ق − ١٠ = ٢٠

∴ ق = ٣٠ نيوتن.

، ك − ٤٠√٣ = ٢٠√٣

∴ ك = ٦٠√٣ نيوتن.

١٢ (د) **١٣** (أ) **١٤** (ب)

١٥ (ب)

١٦

بالنسبة للدائرة د١ : نق١ = √ك ، م١ = (−٢ ، −١١)

، بالنسبة للدائرة د٢ : نق٢ = √١٦ = ٤ ، م٢ = (٣ ، ١)

∴ المسافة بين المركزين م١ م٢

= √((٣ + ٢)٢ + (١ + ١١)٢)

= ١٣ وحدة طول.

فى حالة أن الدائرتين متماستين من الخارج

∴ م١ م٢ = نق١ + نق٢   ∴ √ك + ٤ = ١٣

∴ √ك = ٩   ∴ ك = ٨١

، فى حالة أن الدائرتين متماستين من الداخل فإن :

م١ م٢ = | نق١ − نق٢ | ∴ | √ك − ٤ | = ١٣

∴ √ك − ٤ = ١٣

ومنها √ك = ١٧ ومنها ك = ٢٨٩

أ، √ك − ٤ = −١٣ ومنها √ك = −٩   (مرفوض)

∴ قيم ك هى ٨١ أ، ٢٨٩

١٧ (د) **١٨** (د)

١٩ (أ) **٢٠** (د) **٢١** (ب)

٢٢ (د) **٢٣** (ب) **٢٤** (ب)

النموذج التاسع

١ (جـ) **٢** (جـ) **٣** (ب) **٤** (د)

٥ (أ) **٦** (جـ) **٧** (د) **٨** (جـ)

٩

∵ أحـ = أء = ٤ متر

∴ ق (د أحـ ء) = ٤٥°

∴ حـ ء = ٤√٢ متر

من Δ م حـ ن :

∴ م ن = ١ متر

، ق (د ن حـ م) = ٤٥° ، ق (د ن م حـ) = ٩٠°

∴ ن حـ = √٢ متر

∴ ء ن = ٤√٢ − √٢ = ٣√٢ متر

، من Δ أ م ن : أ ن = √١٠ متر

، ∵ Δ أ ن ء هو مثلث القوى

∴ ر / √١٠ = ش / ٣√٢ = ٨ / ٤

∴ ر = ٢√١٠ ثقل كجم ، ش = ٦√٢ ثقل كجم.

١٠ (د) **١١** (ب)

١٢

∵ طول راسم المخروط = ١٨ سم.

، ∵ محيط دائرة قاعدة المخروط = طول القوس أ ب

= نق × هـ = ١٨ × (٦٠° × π) / ١٨٠° = ٦ π

، ٢ π نق = ٦ π   ∴ نق = ٣ سم

، ع = √(ل٢ − نق٢) = √((١٨)٢ − (٣)٢) = ٣√٣٥

∴ حجم المخروط

= ١/٣ π نق٢ ع

= ١/٣ × π × (٣)٢ × ٣√٣٥

≃ ١٦٧,٢ سم٣

١٣ (جـ)

١٤

س = ١٠ جتا صفر° + ٢٠ جتا ١٢٠° + ٣٠ جتا ٢٤٠°

= ١٠ + ٢٠ × −١/٢ + ٣٠ × −١/٢ = −١٥

، ص = ١٠ جا صفر° + ٢٠ جا ١٢٠° + ٣٠ جا ٢٤٠°

= صفر + ٢٠ × √٣/٢ + ٣٠ × −√٣/٢ = −٥√٣

∴ ح = −١٥ س − ٥√٣ ص

∴ ح = √((−١٥)٢ + (−٥√٣)٢) = ١٠√٣ نيوتن

، ظا هـ = −٥√٣ / −١٥ = √٣/٣   ∴ هـ = ٢١٠°

∴ خط عمل المحصلة فى اتجاه ٣٠° جنوب الغرب.

١٥ (ب) **١٦** (جـ) **١٧** (د) **١٨** (د)

١٩ (أ) **٢٠** (ب) **٢١** (جـ) **٢٢** (أ)

٢٣ (ب) **٢٤** (ب)

النموذج العاشر

١ (د) **٢** (أ) **٣** (جـ)

٤ (أ) **٥** (أ)

٦

الارتفاع الجانبى

= √((١٠√٣)٢ + (١٠)٢)

= ٢٠ سم.

المساحة الجانبية = ١/٢ (محيط القاعدة) × الارتفاع الجانبى

= ١/٢ × (٤ × ٢٠) × ٢٠ = ٨٠٠ سم٢

، الحجم = ١/٣ مساحة القاعدة × ع

= ١/٣ × (٢٠)٢ × ١٠√٣ = ٤٠٠٠√٣ / ٣ سم٣

٧ (ب) **٨** (ب) **٩** (أ)

١٠ (جـ) **١١** (د)

١٢

∵ حجم المخروط = ١/٣ × π × (٢)٢ × ١٢ = ١٦ π سم٣

∴ حجم الماء المرتفع فى الإناء الأسطوانى = ١٦ π سم٣

∴ ١٦ π = π نق٢ × ١

∴ نق٢ = ١٦   ∴ نق = ٤ سم

∴ طول قطر قاعدة الإناء = ٤ × ٢ = ٨ سم

١٣ (ب)

١٤

س = ١٢ جتا صفر° + ٩ جتا ٩٠° + ٥√٢ جتا ١٣٥° + ٧√٢ جتا ٢٢٥° + ٧ جتا ٢٧٠°

= ١٢ + صفر − ٥ − ٧ + صفر = صفر

، ص = ١٢ جا صفر° + ٩ جا ٩٠° + ٥√٢ جا ١٣٥° + ٧√٢ جا ٢٢٥° + ٧ جا ٢٧٠°

= صفر + ٩ + ٥ − ٧ − ٧ = صفر

∴ ح = صفر   ∴ المجموعة متزنة

١٥ (أ) **١٦** (أ) **١٧** (د) **١٨** (د)

١٩ (د) **٢٠** (أ) **٢١** (جـ) **٢٢** (جـ)

٢٣ (ب) **٢٤** (جـ)

اجابات نماذج امتحانات بنظام اسئلة الاختيار من متعدد

النموذج الأول

١ (جـ)

٢ (ب)

الحل :

∵ المحصلة تنصف الزاوية بين خطي عمل القوتين $\overline{ق_١}$ ، $\overline{ق_٢}$

∴ $ق_١ = ق_٢$ ∴ ق = ٧ ث.كجم

٣ (جـ)

٤ (ب)

الحل :

$(٢ق - ٥)^٢ + (ق + ٢)^٢ = (٢\sqrt{٥})^٢$

∴ $٤ق^٢ - ٢٠ق + ٢٥ + ق^٢ + ٤ق + ٤ = ٤٥$

∴ $٥ق^٢ - ١٦ق - ١٦ = ٠$

∴ (ق − ٤) (٥ق + ٤) = ٠

∴ ق = ٤ نيوتن أ ، ق = $\frac{-٤}{٥}$ (مرفوضة)

٥ (جـ)

٦ (أ)

الحل :

٥ $\overline{س}$ + ٢ $\overline{ص}$ + أ $\overline{س}$ + ٦ $\overline{ص}$ − ١٤ $\overline{س}$

+ ب $\overline{ص}$ = (١٠ $\sqrt{٢}$ جتا ١٣٥°) $\overline{س}$

+ (١٠ $\sqrt{٢}$ جا ١٣٥°) $\overline{ص}$

∴ (أ − ٩) $\overline{س}$ + (ب + ٩) $\overline{ص}$

= −١٠ $\overline{س}$ + ١٠ $\overline{ص}$

∴ أ − ٩ = −١٠ ∴ أ = −١ ، ب + ٩ = ١٠

∴ ب = ١ ∴ (أ ، ب) = (−١ ، ١)

٧ (د)

الحل :

$\overline{ق_١}$ = (٦٠ ، ٩٠°)

، $\overline{ق_٢}$ = (٨٨ ، ٢١٠°)

، $\overline{ق_٣}$ = (٦٠ ، ٣٣٠°)

س = ٦٠ جتا ٩٠° + ٨٨ جتا ٢١٠°

+ ٦٠ جتا ٣٣٠° = −١٤ $\sqrt{٣}$

، ص = ٦٠ جا ٩٠° + ٨٨ جا ٢١٠° + ٦٠ جا ٣٣٠°

= −١٤

∴ ح = $\sqrt{(-١٤\sqrt{٣})^٢ + (-١٤)^٢}$ = ٢٨ نيوتن

٨ (جـ)

٩ (أ)

الحل :

$\frac{شـ_١}{جا هـ_١} = \frac{شـ_٢}{جا هـ_٢} = \frac{٢٠٠}{جا ٩٠°}$

∴ $\frac{شـ_١}{\frac{٨٠}{١٠٠}} = \frac{شـ_٢}{\frac{٦٠}{١٠٠}} = \frac{٢٠٠}{١}$

∴ $شـ_١ = \frac{٨٠}{١٠٠} \times ٢٠٠$

= ١٦٠ ث.جم

، $شـ_٢ = \frac{٦٠}{١٠٠} \times ٢٠٠$ = ١٢٠ ث.جم

١٠ (جـ)

١١ (ب)

الحل :

من هندسة الشكل و

باستخدام قاعدة لامي نجد أن :

$\frac{ر_١}{جا ١٥٠°} = \frac{ر_٢}{جا ١٢٠°}$

$= \frac{٢٤}{جا ٩٠°}$

∴ $ر_١$ = ٢٤ جا ١٥٠° = ١٢ نيوتن

، $ر_٢$ = ٢٤ جا ١٢٠° = ١٢ $\sqrt{٣}$ نيوتن

١٢ (جـ)

الحل :

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ ($\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ٨) × ١٠ = ١٦٠ $سم^٣$

١٣ (ب)

الحل :

بقسمة المعادلة على ٤

∴ $س^٢ + ص^٢$ + ٤ س − ٢ ص − ٤ = ٠

∴ ل = −٢ ، ك = ١ ، جـ = −٤

∴ نق = $\sqrt{ل^٢ + ك^٢ - جـ} = \sqrt{٤ + ١ + ٤}$ = ٣ وحدة طول

∴ طول قطر الدائرة = ٦ وحدة طول

١٤ (جـ)

١٥ (د)

الحل :

ل = $\sqrt{٣^٢ + ٤^٢}$ = ٥ سم

١٦ (ب)

١٧ (د)

الحل :

$\frac{١}{٣}$ π $نق^٢$ × ٣ = ٤٩ π

∴ $نق^٢$ = ٤٩ ∴ نق = ٧ سم

∴ طول قوس القطاع = محيط الدائرة التي تمثل قاعدة المخروط = ٢ π نق = ٢ π × ٧ = ١٤ π سم

١٨ (جـ)

١٩ (ب)

الحل :

$\frac{٢٢}{٧}$ نق × ٢٥ = ٥٥٠

∴ نق = ٧ سم

∴ ع = $\sqrt{٢٥^٢ - ٧^٢}$ = ٢٤ سم

∴ حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π $نق^٢$ ع

= $\frac{١}{٣} \times \frac{٢٢}{٧}$ × ٤٩ × ٢٤

= ١٢٣٢ $سم^٣$

٢٠ (جـ)

الحل :

بفرض أن : طول ضلع قاعدة الهرم = س سم

، ارتفاع الهرم الجانبي = ل سم

المساحة الكلية للهرم = مساحة القاعدة + المساحة الجانبية

∴ ٧٠ = مساحة القاعدة + ٤٥

∴ مساحة القاعدة = ٢٥ $سم^٢$

∴ $س^٢$ = ٢٥ ∴ س = ٥ سم

، ∵ المساحة الجانبية

= $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة

× الارتفاع الجانبي.

∴ ٤٥ = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٥ × ل

∴ ل = ٤,٥ سم

∴ ع = $\sqrt{(٤,٥)^٢ - (٢,٥)^٢} = \sqrt{١٤}$ سم

٢١ (د)

الحل :

$س^٢ - ت^٢ ص^٢$ − ٤٩ = ٠

∴ $س^٢ + ص^٢$ = ٤٩ ∴ نق = ٧ وحدة طول

النموذج الثاني

١ (جـ)

٢ (أ)

الحل :

طول ضلع قاعدة الهرم = $\sqrt{١٠٠}$

= ١٠ سم

الإرتفاع الجانبي = $\sqrt{١٢^٢ + ٥^٢}$

= ١٣ سم

∴ المساحة الجانبية للهرم = $\frac{١}{٢}$ (١٠ × ٤) × ١٣

= ٢٦٠ $سم^٢$

٣ (د)

الحل :

$\overline{ح}$ = ٢ $\overline{س}$ + ٤ $\overline{س}$ + ٨ $\overline{ص}$ = ٦ $\overline{س}$ + ٨ $\overline{ص}$

∴ ‖$\overline{ح}$‖ = $\sqrt{٣٦ + ٦٤}$ = ١٠ وحدة قوة

٤ (أ)

الحل :

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ ($\frac{١}{٤}$ × ٦ × $٨^٢$ × ظتا $\frac{π}{٦}$) × ١٠

= ٣٢٠ $\sqrt{٣}$ $سم^٣$

٥ (جـ)

الحل :

ح = ٢ ق جتا $\frac{ى}{٢}$ ∴ ١٦ = ٢ ق جتا ٤٥°

∴ ق = ٨ $\sqrt{٢}$ نيوتن

∴ القيمة العظمى للمحصلة = ٨ $\sqrt{٢}$ + ٨ $\sqrt{٢}$

= ١٦ $\sqrt{٢}$ نيوتن

٦ (ب)

الحل :

عندما : ى = ٠° ∴ ح = ٦ + ٢ = ٨ نيوتن

، عندما : ى = ١٨٠° ∴ ح = ٦ − ٢ = ٤ نيوتن

، ∵ ى ∈]٠ ، ١٨٠°[∴ ح ∈]٤ ، ٨[

٧ (ب)

الحل :

∵ الدائرة تمس محور السينات ∴ نق = |ك|

، ∵ ل = ٢ ، ك = −٤

∴ نق = |−٤| = ٤ وحدة طول

∴ جـ = $ل^٢ + ك^٢ - نق^٢$ = ٩ + ١٦ − ١٦ = ٩

٨ (جـ)

الحل :

$\frac{ر}{جا ٩٠°} = \frac{ق}{جا ١٥٠°}$

$= \frac{١٨}{جا ١٢٠°}$

∴ ر = $\frac{١٨ جا ٩٠°}{جا ١٢٠°}$ = ١٢ $\sqrt{٣}$ وحدة قوة

، ق = $\frac{١٨ جا ١٥٠°}{جا ١٢٠°}$ = ٦ $\sqrt{٣}$ وحدة قوة

∴ ق + ر = ١٢ $\sqrt{٣}$ + ٦ $\sqrt{٣}$ = ١٨ $\sqrt{٣}$ وحدة قوة

٩ (د)

الحل :

نق = $\sqrt{٩}$

= ٣ وحدة طول

، أب = $\sqrt{٥^٢ - ٣^٢}$ = ٤ وحدة طول

١٠ (ب)

١١ (جـ)

١٢ (د)

الحل :

س = ٦ $\sqrt{٢}$ جتا ٠° + ٦ $\sqrt{٢}$ جتا ٩٠° + ١٢ جتا ١٣٥° = ٠

، ص = ٦ $\sqrt{٢}$ جا ٠° + ٦ $\sqrt{٢}$ جا ٩٠° + ١٢ جا ١٣٥°

= ١٢ $\sqrt{٢}$ وحدة قوة

∴ $\overline{ح}$ = ١٢ $\sqrt{٢}$ $\overline{ص}$

∴ المحصلة تعمل في اتجاه الشمال

١٣ (أ)

الحل :

مقدار المركبة في اتجاه $\overline{أجـ}$

= ١٠ جتا ٣٠° = ٥ $\sqrt{٣}$ نيوتن

، مقدار المركبة في اتجاه $\overline{أو}$

= ١٠ جا ٣٠° = ٥ نيوتن

١٤ (ب)

الحل :

بفرض أن : $ق_١$ = ٤ ك ، $ق_٢$ = ٣ ك

، ح = $\sqrt{١٣}$ ك من وحدات القوة

، ∵ $ح^٢ = ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢$ جتا ى

∴ ١٣ $ك^٢$ = ١٦ $ك^٢$ + ٩ $ك^٢$ + ٢

× ٤ ك × ٣ ك × جتا ى

∴ −١٢ = ٢٤ جتا ى ∴ جتا ى = $-\frac{١}{٢}$

∴ ى = ١٢٠°

١٥ (جـ)

الحل :

بقسمة المعادلة على ٢

∴ $س^٢ + ص^٢$ + ٦ س − ٨ ص = ٠

∴ ل = −٣ ، ك = ٤

∴ م (مركز الدائرة) = (−٣ ، ٤)

١٦ (د)

الحل :

من هندسة الشكل

م ب = ٢ + ٣ = ٥ سم

، ∵ م أ = ٣ سم ∴ أ ب = $\sqrt{٥^٢ - ٣^٢}$ = ٤ سم

، Δ م ب أ مثلث القوى ∴ $\frac{شـ}{٥} = \frac{ر}{٣} = \frac{٤٠}{٤}$

∴ شـ = ٥٠ نيوتن ، ر = ٣٠ نيوتن

∴ شـ + ر = ٥٠ + ٣٠ = ٨٠ نيوتن

١٧ (أ)

الحل :

محصلة القوتين = $\overline{ق_١}$ + $\overline{ق_٢}$ + $\overline{ق_١}$ − $\overline{ق_٢}$ = ٢ $\overline{ق_١}$

∴ قياس الزاوية بين $\overline{ق_١}$ ، ٢ $\overline{ق_١}$ تساوي صفر°

١٨ (د)

الحل :

نق = $\sqrt{٥^٢ - ٤^٢}$ = ٣ سم

∴ حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π $نق^٢$ ع

= $\frac{١}{٣}$ π × ٩ × ٤ = ١٢ π $سم^٣$

١٩ (جـ)

٢٠ (أ)

الحل :

مركز الدائرة م = (٠ ، ٠) ، ∵ م منتصف $\overline{أب}$

وبفرض أن ب (س ، ص)

∴ $\frac{س - ٢}{٢}$ = ٠ ومنها س = ٢

، $\frac{ص + ٥}{٢}$ = ٠ ومنها ص = −٥

∴ ب (٢ ، −٥)

٢١ (جـ)

النموذج الثالث

١ (أ)

٢ (د)

الحل :

∵ ع = ٣ سم ، ل = ٥ سم

∴ نق = $\sqrt{٥^٢ - ٣^٢}$ = ٤ سم

∴ المساحة الكلية للمخروط = π نق (ل + نق)

= π × ٤ (٥ + ٤)

= ٣٦ π $سم^٢$

٣ (ب)

الحل :

جـ = ٤ + ١ − ٩ = −٤

∴ معادلة الدائرة هي :

$س^٢ + ص^٢$ − ٤ س + ٢ ص − ٤ = ٠

(ج) ٤

الحل:

ق١ = −(ق٢ + ق٣) = −(−١٠ ، −٣٠) = (١٠ ، ٣٠)

(ب) ٥

الحل:

ظا θ = ق٢ جا α / (ق١ + ق٢ جتا α) = (١٥ × ٤/٥) / (١٢ + ١٥ × −٤/٥) = ∞

∴ θ = ٩٠°

∴ المحصلة عمودية على القوة الأولى.

(أ) ٦

الحل:

ق / جا ١٣٥° = ك / جا ١٣٥° = ٤√٢ / جا ٩٠°

∴ ق = ك = (٤√٢ × جا ١٣٥°) / جا ٩٠° = ٤ نيوتن

(أ) ٧

(د) ٨

الحل:

حجم الهرم = ١/٣ مساحة القاعدة × ارتفاع الهرم

∴ ١/٣ مساحة القاعدة × ٤ = ٤٨

∴ مساحة القاعدة = ٣٦ سم²

∴ طول ضلع القاعدة = √٣٦ = ٦ سم

Δ م ح ك فيه: م ك = √(٣² + ٤²) = ٥ سم

، المساحة الجانبية = ١/٢ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

= ١/٢ × ٦ × ٤ × ٥

= ٦٠ سم²

(د) ٩

الحل:

نق = √(١٧² − ١٥²) = ٨ سم

(ب) ١٠

(د) ١١

الحل:

|أ| = √(٢ + ٢) = ٢ وحدة طول

، جتا θ = √٢/√٢ ... ∴ θ = ٤٥°

∴ أ = (٢ ، ٤٥°)

(د) ١٢

الحل:

ح = √((٨√٢)² + ٨² + ٢ × ٨√٢ × ٨ × جتا ١٣٥°)

= ٨ نيوتن

(ب) ١٣

(ب) ١٤

الحل:

أ١ = √(٨² + ٦²) = ١٠ سم

، ح٢ = √(٢² + ٦²) = ٢√١٠ سم

∵ مجموعة القوى متزنة

∴ ص = ٠

∴ ٥ جا ٩٠° + ٥ جا ٠° − ٦√١٠ جا هـ + ك جا ٩٠° = ٠

∴ ٥ + ٠ − ٦√١٠ × ٦/(٢√١٠) + ك = ٠

∴ ٣ − ١٨ + ك = ٠ ∴ ك = ١٥

(د) ١٥

الحل:

ب ح = √(٣² + ٤²) = ٥ سم

∴ Δ أ ب ح مثلث القوى

∴ ق١/٣ = ق٢/٤ = ق٣/٥

∴ ق١ : ق٢ : ق٣ = ٣ : ٤ : ٥

(ب) ١٦

(د) ١٧

(د) ١٨

الحل:

∵ ل = −٣ ، ع = ٦ ، م = ٥

∴ نق = √((−٣)² + ٦² − ٥) = √٤٠ = ٢√١٠ وحدة

∴ نق = ٢√١٠ × ١٠ = ٢٠√١٠ سم

∴ مساحة سطح المخمس المنتظم

= ٥ × (١/٢ × (٢٠√١٠)² × جا ٧٢°)

≈ ٣٣٧٨ سم²

(ب) ١٩

الحل:

ق / جا(١٨٠° − هـ) = ... / جا ٩٠°

= ٨ / جا(٩٠° + هـ)

ق / ظا هـ = ... / ١ = ٨ / جتا هـ

∴ ق = ٦ ث جم

∴ ق = ٦ × ٩٨٠ = ٥٨٨٠ داين

(د) ٢٠

الحل:

مركز الدائرة م = (٣ ، −٣)

، نق = √٢٥ = ٥ وحدة طول

∴ م ب = √((٧ − ٣)² + (٢ − (−٣))²)

= √٤١ وحدة طول

∴ أ ب = √(٤١ − ٢٥) = ٤ وحدة طول

(ب) ٢١

الحل:

س = ٨ جتا ٩٠° + ٤√٣ جتا ٢١٠° + ٥ جتا ٣٠° ...

ص = ٨ جا ٩٠° + ٤√٣ جا ٢١٠° + ٥ جا ٣٠° ...

∴ ح = ... نيوتن

النموذج الرابع

(د) ١

الحل:

ح = ٢ س + ٣ ص + س − ص + ... = ٣ س + ٤ ص

∴ |ح| = √(٣² + ٤²) = ٥ نيوتن

(ب) ٢

(د) ٣

الحل:

حجم الهرم = ١/٣ مساحة القاعدة × ارتفاع الهرم

∴ ١٢ = ١/٣ × مساحة القاعدة × ٤

∴ مساحة القاعدة = ٩ سم²

∴ طول ضلع القاعدة = ٣ سم

(د) ٤

الحل:

ق = ١٢ جا ٣٠° / جا(٤٥° + ٣٠°) = ٦ قتا ٧٥°

(أ) ٥

(أ) ٦

الحل:

ل = √(٦² + ٨²) = ١٠ سم

∴ المساحة الجانبية = π نق ل = π × ٦ × ١٠

= ٦٠ π سم²

(ج) ٧

الحل:

س = ١٠√٢ جتا ٤٥° + ١٠ جتا ٢٤٠° + ١٠ جتا ١٢٠°

+ ١٠√٢ جتا ٢١٥° = ١٠

، ص = ١٠√٢ جا ٤٥° + ١٠ جا ١٢٠° + ١٠ جا ٢٤٠°

+ ١٠√٢ جا ٢١٥° = ٠

∴ ح = ١٠ س

∴ مقدار المحصلة = ١٠ نيوتن

(د) ٨

(ج) ٩

الحل:

نق = ٥ سم

∴ محيط الدائرة = ٢ π نق = ١٠ π سم

(ج) ١٠

الحل:

٥ س + ٢ ص + أ س + ٦ ص

− ١٤ س + ب ص

= (١٠√٢ جتا ١٣٥°) س + (١٠√٢ جا ١٣٥°) ص

∴ (أ − ٩) س + (ب + ٩) ص

= −١٠ س + ١٠ ص

∴ أ − ٩ = −١٠ ∴ أ = −١

ب + ٩ = ١٠ ∴ ب = ١

∴ أ + ب = −١ + ١ = ٠

(د) ١١

الحل:

طول حرف الهرم = ١٨/٦ = ٣ سم

المساحة الكلية للهرم المنتظم الوجوه

= مساحة الوجه الواحد × ٤

= (١/٢ × ٣ × ٣ × جا ٦٠°) × ٤ = ٩√٣ سم²

(أ) ١٢

الحل:

باستخدام قاعدة لامي:

و / جا ٩٠° = (١/٢ و) / جا(١٨٠° − هـ)

∴ ١/١ = (١/٢) / جا هـ

∴ جا هـ = ١/٢ ∴ هـ = ٣٠°

(د) ١٣

الحل:

س = ١٥ جتا ٠° − ٥√٣ جتا ٣٠° − ٥√٣ جتا ٩٠°

+ ١٥ جتا ١٢٠° = ٠

، ص = ١٥ جا ٠° − ٥√٣ جا ٣٠° − ٥√٣ جا ٩٠°

+ ١٥ جا ١٢٠° = ٠

∴ ح = صفر نيوتن

(ب) ١٤

(أ) ١٥

الحل:

المساحة الكلية للمخروط = π نق (ل + نق)

∴ ٩٦ π = π نق (١٠ + نق)

∴ نق² + ١٠ نق − ٩٦ = ٠

∴ (نق − ٦)(نق + ١٦) = ٠

∴ نق = ٦ سم أو نق = −١٦ (مرفوضة)

(ب) ١٦

(ب) ١٧

الحل:

١/٣ مساحة القاعدة × الارتفاع = ٨√٣

∴ ١/٣ (١/٢ × ٦ × س² × جا(π/٣)) × ٤ = ٨√٣

∴ س² = ٤ ∴ س = ٢

∴ محيط القاعدة = ٢ × ٦ = ١٢ سم

(ج) ١٨

الحل:

مقدار المركبة

في اتجاه الشرق

ق = ٢√٢ جتا ٣٠°

= ٣/٢ √٢ نيوتن

(أ) ١٩

الحل:

نق = ٤ وحدة طول ، م = (−٤ ، ٤)

∴ حـ = ١٦ + ١٦ − ١٦ = ١٦

∴ معادلة الدائرة هي

س² + ص² + ٨ س − ٨ ص + ١٦ = ٠

(ب) ٢٠

(ج) ٢١

النموذج الخامس

(د) ١

(ب) ٢

الحل:

∴ ح = √((٣ ق)² − ق²)

= ٢√٢ ق وحدة قوة

(د) ٣

الحل:

ب ح = √((٦٠)² + (٤٥)²)

= ٧٥ سم

وبتطبيق قاعدة لامي

ش١ / (٦٠/٧٥) = ش٢ / (٤٥/٧٥) = ١٥٠ / ١

∴ ش١ = ١٥٠ × ٣/٥ = ٩٠ ث جم

، ش٢ = ١٥٠ × ٤/٥ = ١٢٠ ث جم

∴ ش٢ − ش١ = ١٢٠ − ٩٠ = ٣٠ ث جم

(د) ٤

الحل:

ب ح = √(٣٠² − ٢٤²) = ١٨ سم

Δ أ ب ح مثلث القوى

∴ ش١/٣٠ = ش٢/٢٤ = ٩٠/١٨

∴ ش١ = (٣٠ × ٩٠)/١٨ = ١٥٠ ث جم

، ش٢ = (٢٤ × ٩٠)/١٨ = ١٢٠ ث جم

∴ ش١ − ش٢ = ١٥٠ − ١٢٠ = ٣٠ ث جم

8 (أ)

الحل :

$\because \Delta$ حـ م ب فيه

ق ($\angle$ حـ م ب)

$= ٩٠^\circ$

$\therefore$ ب حـ $= \sqrt{٣٠^٢ + ٤٠^٢} = ٥٠$ سم

$\therefore$ س $= ٢٥$ جتا $٠^\circ + ١٠\sqrt{٢}$ جتا ٤٥°

$+$ ق جتا $٩٠^\circ + ٢٥$ جتا $(٩٠^\circ +$ هـ$)$

$= ٢٥ + ١٠ + ٠ - ٢٥$ جا هـ

$= ٤٥ - ٢٥ \times \frac{٣٠}{٥٠} = ٣٠$

، ص $= ٢٥$ جا $٠^\circ + ١٠\sqrt{٢}$ جا ٤٥°

$+$ ق جا $٩٠^\circ + ٢٥$ جا $(٩٠ +$ هـ$)$

$= ٠ + ١٠ +$ ق $+ ٢٥$ جتا هـ

$= ١٠ +$ ق $+ ٢٥ \times \frac{٤٠}{٥٠} = ٣٠ +$ ق

$\therefore \sqrt{(٣٠)^٢ + (٣٠ + ق)^٢} = ٥٠$

$\therefore (٣٠ + ق)^٢ = ١٦٠٠$

$\therefore ٣٠ +$ ق $= ٤٠$ ومنها ق $= ١٠$ ث.جم

أو $٣٠ +$ ق $= -٤٠$ $\therefore$ ق $= -٧٠$ (مرفوض)

9 (د)

10 (حـ)

الحل :

بتطبيق قاعدة لامي :

$\therefore \frac{ق}{جا ١٥٠^\circ} = \frac{١٠٠}{جا ١٢٠^\circ}$

$\therefore$ ق $= \frac{١٠٠ \times جا ١٥٠^\circ}{جا ١٢٠^\circ} = \frac{١٠٠}{\sqrt{٣}}$ نيوتن

8 (ب)

الحل :

$\frac{ح_١}{ح_٢} = \frac{\sqrt{ق^٢ + ٢ ق^٢}}{\sqrt{ق^٢ + ٣ ق^٢ + ٢ \times ق \times \sqrt{٣} ق \times جتا ١٥٠^\circ}}$

$= \frac{\sqrt{٣ ق^٢}}{\sqrt{٤ ق^٢ - ٣ ق^٢}} = \frac{\sqrt{٣} ق}{ق} = \sqrt{٣}$

$\therefore ح_١ = \sqrt{٣} ح_٢$

9 (د)

الحل :

ح $= ٢$ ص

، س $=$ ق جتا $٠^\circ + ٦$ جتا ٩٠°

$+ ٤\sqrt{٢}$ جتا ١٣٥°

$+ ٥\sqrt{٢}$ جتا $٢٢٥^\circ +$ ك جتا ٢٧٠°

$=$ ق $+ ٠ - ٤ - ٥ + ٠ =$ ق $- ٩$

، ص $=$ ق جا $٠^\circ + ٦$ جا $٩٠^\circ + ٤\sqrt{٢}$ جا ١٣٥°

$+ ٥\sqrt{٢}$ جا $٢٢٥^\circ +$ ك جا ٢٧٠°

$= ٠ + ٦ + ٤ - ٥ -$ ك $= ٥ -$ ك

$\therefore$ ح $=$ (ق $- ٩$) س $+$ ($٥ -$ ك) ص

$\therefore$ ق $- ٩ = ٠$ ومنها ق $= ٩$ نيوتن

، $٥ -$ ك $= ٢$ ومنها

ك $= ٣$ نيوتن

$\therefore$ ق $-$ ك $= ٩ - ٣ = ٦$ نيوتن

10 (حـ)

الحل :

$(٢ ق - ٥)^٢ + (ق + ٢)^٢ = (٣\sqrt{٥})^٢$

$\therefore ٤ ق^٢ - ٢٠ ق + ٢٥ + ق^٢ + ٤ ق + ٤ - ٤٥ = ٠$

$\therefore ٥ ق^٢ - ١٦ ق - ١٦ = ٠$

$\therefore$ (ق $- ٤$) (٥ ق $+ ٤$) $= ٠$

$\therefore$ ق $= ٤$ نيوتن أو ق $= \frac{-٤}{٥}$ (مرفوضة)

11 (حـ)

الحل :

من هندسة الشكل

وبتطبيق قاعدة لامي

$\therefore \frac{ش_١}{جا (١٨٠^\circ - هـ)}$

$= \frac{ش_٢}{جا ٩٠^\circ} = \frac{و}{جا (٩٠^\circ + هـ)}$

$\therefore \frac{ش_١}{جا هـ} = \frac{ش_٢}{١} = \frac{و}{جتا هـ}$

$\therefore \frac{ش_١}{\frac{٣}{٥}} = \frac{ش_٢}{١} = \frac{و}{\frac{٤}{٥}}$

$\therefore ش_١ = \frac{و \times \frac{٣}{٥}}{\frac{٤}{٥}} = \frac{٣}{٤}$ و

، $ش_٢ = \frac{و}{\frac{٤}{٥}} = \frac{٥}{٤}$ و

$\therefore ش_١ + ش_٢ = \frac{٣}{٤}$ و $+ \frac{٥}{٤}$ و $= ٢$ و ث.كجم

12 (أ)

13 (د)

الحل :

طول ضلع القاعدة $= \frac{٣٦}{٤} = ٩$ سم

حجم الهرم $= \frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة $\times$ ارتفاع الهرم

$= \frac{١}{٣} \times ٩^٢ \times ١٠ = ٢٧٠$ سم^٣

14 (ب)

الحل :

نق $= \sqrt{٢٦^٢ - ٢٤^٢} = ١٠$ سم

$\therefore$ مساحة القاعدة $= \pi$ نق^٢

$= \pi \times ١٠^٢$

$= ١٠٠ \pi$ سم^٢

15 (ب)

الحل :

حجم نصف الكرة $= \frac{١}{٢} \times \frac{٤}{٣} \pi$ نق^٣

$= \frac{٢}{٣} \pi$ نق^٣ وحدة حجم

حجم المخروط $= \frac{١}{٣} \pi$ نق^٢ ع

$\therefore \frac{١}{٣} \pi$ نق^٢ ع $= \frac{٢}{٣} \pi$ نق^٣

$\therefore$ ع $= ٢$ نق

16 (أ)

الحل :

نق $= \frac{١}{٣} \sqrt{ل^٢ - (\frac{١}{٢} ل)^٢}$

$= \frac{\sqrt{٣}}{٦}$ ل

$\frac{\text{حجم الهرم الثلاثي المنتظم}}{\text{حجم أكبر مخروط يمكن وضعه داخل الهرم}}$

$= \frac{\frac{١}{٣} \times \frac{\sqrt{٣}}{٤} ل^٢ \times ع}{\frac{١}{٣} \times \pi نق^٢ \times ع} = \frac{\frac{\sqrt{٣}}{٤} ل^٢}{\pi (\frac{\sqrt{٣}}{٦} ل)^٢} = \frac{\frac{\sqrt{٣}}{٤} ل^٢}{\pi \times \frac{١}{١٢} ل^٢}$

$= \frac{٣\sqrt{٣}}{\pi}$

17 (ب)

الحل :

طول الحرف $= \frac{١٨}{٦} = ٣$ سم

حجم الهرم الثلاثي المنتظم الرباعي الأوجه

$= \frac{\sqrt{٢}}{١٢}$ ل$^٣ = \frac{\sqrt{٢}}{١٢} \times ٢٧ = \frac{٩\sqrt{٢}}{٤}$ سم^٣

18 (د)

الحل :

نق $= \frac{|٣ \times ١ + ٤ \times ٢ + ٩|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = \frac{٢٠}{٥} = ٤$ وحدة طول

، ل $= -١$ ، ك $= -٢$ $\therefore$ حـ $= ١ + ٤ - ١٦ = -١١$

معادلة الدائرة هي

س^٢ + ص^٢ $- ٢$ س $- ٤$ ص $- ١١ = ٠$

19 (ب)

الحل :

$د_١$: (س $+ ٢$)^٢ + ص^٢ $= ١$

$\therefore م_١ = (-٢ ، ٠)$ ، $نق_١ = ١$ وحدة طول

$د_٢$: س^٢ + ص^٢ $- ٢$ س $- ٨$ ص $- ١٩ = ٠$

$\therefore م_٢ = (١ ، ٤)$ ، حـ $= -١٩$

$\therefore نق_٢ = \sqrt{١ + ١٦ + ١٩} = ٦$ وحدة طول

، $\because م_١ م_٢ = \sqrt{(-٢ - ١)^٢ + (٠ - ٤)^٢} = ٥$ وحدة

$\therefore م_١ م_٢ = نق_٢ - نق_١$

$\therefore$ الدائرتان متماستان من الداخل

20 (حـ)

الحل :

معادلة الدائرة هي : س^٢ + ص^٢ $= ١٦$

$\therefore$ نق $= \sqrt{١٦} = ٤$ وحدة طول

$\therefore$ مساحة سطح المضلع $= \frac{١٢}{٢} \times ٤^٢ \times$ جا $(\frac{٣٦٠}{١٢})$

$= ٤٨$ وحدة مربعة

21 (د)

الحل :

من هندسة الشكل

أ ب $= \sqrt{٤ نق^٢ - نق^٢}$

$= \sqrt{٣}$ نق وحدة طول

تطبيقات

الرياضيات

الجزء الخاص

بالإجابات

موقع التفوق

altFwok.com

2022

المعاصر

إعداد نخبة من خبراء التعليم

الصف الثانى الثانوى

القسم العلمى

الفصل الدراسى الأول

إجابات تمارين

الاستاتيكا

إجابات تمرين تراكمي على المتجهات

١

① (جـ) ② (ب) ③ (جـ) ④ (جـ) ⑤ (جـ)
⑥ (ب) ⑦ (د) ⑧ (د) ⑨ (جـ) ⑩ (جـ)
⑪ (أ) ⑫ (جـ) ⑬ (د) ⑭ (ب) ⑮ (د)
⑯ (جـ) ⑰ (أ) ⑱ (أ)

٢

١٨ ى⃗ ، ٤٥ ى⃗ ، −٥٠ ى⃗

٣

أحـ⃗ ، ٢ ءم⃗ (أو ءب⃗) ، و⃗ ، أء⃗ ، م ب⃗

إجابات الوحدة الأولى

إجابات تمارين 1

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

① (د) ② (جـ) ③ (د) ④ (جـ) ⑤ (جـ)
⑥ (ب) ⑦ (ب) ⑧ (جـ) ⑨ (ب) ⑩ (جـ)
⑪ (ب) ⑫ (ب) ⑬ (أ) ⑭ (أ) ⑮ (جـ)
⑯ (د) ⑰ (ب) ⑱ (ب) ⑲ (د) ⑳ (د)
(٢١) (ب) (٢٢) (جـ) (٢٣) (جـ) (٢٤) (جـ) (٢٥) (جـ)
(٢٦) (د) (٢٧) (ب) (٢٨) (أ) (٢٩) (جـ) (٣٠) (د)
(٣١) (جـ) (٣٢) (أ) (٣٣) (أ) (٣٤) (ب) (٣٥) (جـ)
(٣٦) (ب) (٣٧) (ب) (٣٨) (جـ) (٣٩) (ب) (٤٠) (د)
(٤١) (د) (٤٢) (جـ) (٤٣) (أ) (٤٤) (أ) (٤٥) (ب)
(٤٦) (جـ) (٤٧) (د) (٤٨) (د) (٤٩) (ب) (٥٠) (جـ)
(٥١) (جـ)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

ع = √((٨)² + (١٥)²) = ١٧ ث.كجم

، ظا هـ = ١٥/٨ ∴ هـ ≃ ٦١° ٥٥َ ٣٩ً

٢

بفرض أن : ق١ > ق٢

∴ ق١ + ق٢ = ١٧ ، ق١ − ق٢ = ٧

وبالجمع : ∴ ٢ ق١ = ٢٤

∴ ق١ = ١٢ ث.كجم ، ق٢ = ٥ ث.كجم

٣

ى = ٣٠° × ٢ = ٦٠° ∴ ٤√٣ = ٢ ق جتا ٣٠°

∴ ق = ٤ ث.كجم

٤

بفرض مقداري القوتين ق١ ، ق٢ نيوتن

∴ (٥٠)² = ق١² + ق٢² ∴ ق١² + ق٢² = ٢٥٠٠ (١)

، ∵ ظا هـ = ق٢/ق١ ∴ ق٢/ق١ = ظا ٣٠°

∴ ق٢/ق١ = ١/√٣ ∴ ق١ = √٣ ق٢ (٢)

∴ ق١² = ٣ ق٢² (٣)

وبالتعويض من (٣) في (١)

∴ ٣ ق٢² + ق٢² = ٢٥٠٠ ∴ ٤ ق٢² = ٢٥٠٠

∴ ق٢² = ٢٥٠٠/٤ = ٦٢٥

∴ ق٢ = ٢٥ نيوتن وبالتعويض في (٢)

∴ ق١ = ٢٥√٣ نيوتن

∴ مقدارا القوتين ٢٥√٣ ، ٢٥ نيوتن

٥

(٣٦)² = (٣٠)² + (١٦)² + ٢ × ٣٠ × ١٦ × جتا ى

∴ جتا ى = −١/٢ ∴ ى = ١٢٠°

٦

∵ المحصلة عمودية على القوة الأولى

∴ ٨ + ١٦ جتا ى = صفر

∴ جتا ى = −٨/١٦ = −١/٢ ∴ ى = ١٢٠°

٧

(٣√٧)² = (٩)² + (٦)² + ٢ × ٩ × ٦ جتا ى

∴ جتا ى = −١/٢ ∴ ى = ١٢٠°

، ظا هـ = ٦ جا ١٢٠° / (٩ + ٦ جتا ١٢٠°) = √٣/٢

∴ هـ ≃ ٤٠° ٥٣َ ٣٦ً

٨

$ع = \sqrt{(١٥)^٢ + (١٨)^٢ + ٢ × ١٥ × ١٨ \text{ جتا } ١٢٠°}$

$= ٣\sqrt{٢١}$ ث.كجم

، $\text{ظا هـ} = \frac{١٨ \text{ جا } ١٢٠°}{١٥ + ١٨ \text{ جتا } ١٢٠°}$

$= \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$

$\therefore$ هـ ≃ ٦٨° ٥٦َ ٥٤ً

٩

ى = ١٢٠° ، هـ = ٣٠°

$\text{ظا } ٣٠° = \frac{ق \text{ جا } ١٢٠°}{١٢ + ق \text{ جتا } ١٢٠°}$

$\therefore \frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{ق × \frac{\sqrt{٣}}{٢}}{١٢ + ق × \frac{-١}{٢}}$

$\therefore \frac{٣}{٢} ق = ١٢ - \frac{١}{٢} ق$ $\therefore$ ق = ٦ ث.كجم

، $ع = \sqrt{١٢^٢ + ٦^٢ + ٢ × ١٢ × ٦ × \text{ جتا } ١٢٠°}$

$\therefore ع = ٦\sqrt{٣}$ ث.كجم

حل آخر :

∵ المحصلة عمودية على القوة الثانية

$\therefore \text{جتا } ١٢٠° = \frac{-ق}{١٢}$ $\therefore$ ق = ٦ ث.كجم

$\therefore ع = \sqrt{(١٢)^٢ - (٦)^٢} = ٦\sqrt{٣}$ ث.كجم

١٠

بفرض أن $ق_١$ هي القوة الصغرى

، $ق_٢$ الكبرى

، ∵ المحصلة عمودية على $ق_١$

$\therefore ق_١ + ٣٠ \text{ جتا ى} = ٠$

$\therefore ق_١ = ٣٠ × \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ١٥\sqrt{٣}$ ث.كجم

، $ع = \sqrt{(١٥\sqrt{٣})^٢ + (٣٠)^٢ + ٢ × ١٥\sqrt{٣} × ٣٠ × \frac{-\sqrt{٣}}{٢}}$

= ١٥ ث.كجم

١١

① $ع = \sqrt{(٥\sqrt{٢})^٢ + (٥)^٢ + ٢ × ٥\sqrt{٢} × ٥ \text{ جتا } ٤٥°}$

$\therefore ع = ٥\sqrt{٥}$ نيوتن

، $\text{ظا هـ} = \frac{٥ \text{ جا } ٤٥°}{٥\sqrt{٢} + ٥ \text{ جتا } ٤٥°} = \frac{١}{٣}$

هـ ≃ ١٨° ٢٦َ ٦ً مع القوة الأولى

② $ع = \sqrt{٣^٢ + (٣\sqrt{٢})^٢ + ٢ × ٣ × ٣\sqrt{٢} \text{ جتا } ٤٥°}$

$\therefore ع = ٣\sqrt{٥}$ نيوتن

، $\text{ظا هـ} = \frac{٣\sqrt{٢} \text{ جا } ٤٥°}{٣ + ٣\sqrt{٢} \text{ جتا } ٤٥°} = \frac{١}{٢}$

هـ ≃ ٢٦° ٣٣َ ٥٤ً مع القوة الأولى

③ $ع = \sqrt{(١٥٠)^٢ + (١٥٠)^٢ + ٢ × ١٥٠ × ١٥٠ \text{ جتا } ١٢٠°}$

$\therefore$ ع = ١٥٠ نيوتن

حل آخر :

ع = ٢ × ١٥٠ × جتا ٦٠° = ١٥٠ نيوتن

، المحصلة تنصف الزاوية بين القوتين.

١٢

$(٤\sqrt{٣})^٢ = ق^٢ + (٤)^٢ + ٢ × ق × ٤ \text{ جتا } ١٢٠°$

$\therefore ق^٢ - ٤ق - ٣٢ = ٠$

$\therefore (ق + ٤)(ق - ٨) = ٠$ $\therefore$ ق = ٨ نيوتن

، $\text{ظا هـ} = \frac{٤ \text{ جا } ١٢٠°}{٨ + ٤ \text{ جتا } ١٢٠°} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$ $\therefore$ هـ = ٣٠°

١٣

∵ المحصلة عمودية على القوة الأولى

$\therefore \sqrt{٣} ق + ٢ق \text{ جتا ى} = \text{صفر}$

$\therefore \text{جتا ى} = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ $\therefore$ ى = ١٥٠°

، عند ق = ١٥

$\therefore ع = \sqrt{(١٥\sqrt{٣})^٢ + (٣٠)^٢ + ٢ × ١٥\sqrt{٣} × ٣٠ \text{ جتا } ١٥٠°}$

= ١٥ نيوتن

١٤

∵ المحصلة عمودية على القوة الثانية

$\therefore ع^٢ = ق_١^٢ - ق_٢^٢$ $\therefore ٢ = ٨ - ق_٢^٢$

$\therefore ق_٢^٢ = ٦$ $\therefore ق_٢ = \sqrt{٦}$ نيوتن

∵ $ق_٢ + ق_١ \text{ جتا ى} = ٠$ $\therefore \sqrt{٦} + ٢\sqrt{٢} \text{ جتا ى} = ٠$

$\therefore \text{جتا ى} = \frac{-\sqrt{٦}}{٢\sqrt{٢}} = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\therefore$ ى = ١٥٠°

١٥

∵ $\text{ظا } ٣٠° = \frac{ق \text{ جا } ١٢٠°}{١٦ + ق \text{ جتا } ١٢٠°}$ $\therefore \frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{\frac{\sqrt{٣}}{٢} ق}{١٦ - \frac{١}{٢} ق}$

$\therefore ١٦ - \frac{١}{٢} ق = \frac{٣}{٢} ق$ $\therefore$ ٢ق = ١٦

$\therefore$ ق = ٨ ث.كجم

، $ع = \sqrt{(١٦)^٢ + (٨)^٢ + ٢ × ١٦ × ٨ \text{ جتا } ١٢٠°}$

$= ٨\sqrt{٣}$ ث.كجم

١٦

محصلة القوتين الأولى والثانية

$= \sqrt{(٥)^٢ + (١٠)^٢ + ٢ × ٥ × ١٠ \text{ جتا } ٦٠°}$

$= ٥\sqrt{٧}$ نيوتن

∴ القيمة العظمى لمحصلة القوى الثلاث

$= ٥\sqrt{٧} + ٤\sqrt{٧} = ٩\sqrt{٧}$ نيوتن

، القيمة الصغرى لمحصلة القوى الثلاث

$= ٥\sqrt{٧} - ٤\sqrt{٧} = \sqrt{٧}$ نيوتن

١٧

① ∵ $(٣ق)^٢ = (٢ق)^٢ + (٣ق)^٢ + ٢ × ٢ق × ٣ق \text{ جتا هـ}$

$\therefore ٩ق^٢ = ١٣ق^٢ + ١٢ق^٢ \text{ جتا هـ}$

$\therefore \text{جتا هـ} = -\frac{١}{٣}$ $\therefore$ هـ ≃ ١٠٩° ٢٨َ ١٦ً

② ∵ المحصلة = ق = ٣ق − ٢ق

∴ الزاوية بين القوتين قياسها ١٨٠°

③ ∵ المحصلة = ٥ق = ٢ق + ٣ق

∴ الزاوية بين القوتين قياسها صفر

④ $(\sqrt{١٣} ق)^٢$

$= (٢ق)^٢ + (٣ق)^٢ + ٢ × ٢ق × ٣ق \text{ جتا هـ}$

$\therefore ١٣ق^٢ = ١٣ق^٢ + ١٢ق^٢ \text{ جتا هـ}$

∴ جتا هـ = صفر ∴ هـ = ٩٠°

١٨

① ∵ اتجاه المحصلة عمودي على القوة الثانية

$\therefore ق + ٢ \text{ جتا } ١٢٠° = ٠$ ∴ ق = ١ نيوتن

② ∵ $\text{ظا } ٤٥° = \frac{٢ \text{ جا } ١٢٠°}{ق + ٢ \text{ جتا } ١٢٠°}$ $\therefore \sqrt{٣} = ق - ١$

$\therefore ق = (\sqrt{٣} + ١)$ نيوتن

١٩

∵ ع ∈ [٢ ، ١٠]

∴ أصغر قيمة للمحصلة = ٢ نيوتن

$\therefore ق_١ - ق_٢ = ٢$ (١)

، أكبر قيمة للمحصلة = ١٠ نيوتن

$\therefore ق_١ + ق_٢ = ١٠$ (٢)

بجمع (١) ، (٢) $\therefore ٢ق_١ = ١٢$

$\therefore ق_١ = ٦$ نيوتن $\therefore ق_٢ = ٤$ نيوتن

$\therefore ع = \sqrt{٦^٢ + ٤^٢ + ٢ × ٦ × ٤ \text{ جتا } ١٢٠°}$

$= ٢\sqrt{٧}$ نيوتن

٢٠

بفرض القوتين ق ، ق + ٣

، $\because$ المحصلة عمودية على القوة الصغرى

$\therefore ق + (ق + ٣)\ جتا\ ى = صفر \qquad \therefore جتا\ ى = \frac{-ق}{ق + ٣}$

، $\because$ المحصلة = $٣\sqrt{٣}$

$\therefore ٢٧ = ق^{٢} + (ق + ٣)^{٢} + ٢ \times ق \times (ق + ٣) \times \frac{-ق}{ق + ٣}$

$\therefore ٢٧ = ق^{٢} + ق^{٢} + ٦ق + ٩ - ٢ق^{٢}$

$\therefore ق = ٣$ $\qquad$ $\therefore$ القوتان مقدارهما ٣ ، ٦ نيوتن

، $جتا\ ى = \frac{-٣}{٦} = -\frac{١}{٢} \qquad \therefore ى = ١٢٠°$

٢١

بفرض القوتين $ق_{١}$ ، $ق_{٢}$

* فى الحالة الأولى : $١٠ = ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢}$ $\qquad$ (١)
* فى الحالة الثانية :

$١٣ = ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} + ٢ ق_{١} ق_{٢} \times \frac{١}{٢}$ وبالتعويض من (١)

$\therefore ١٣ = ١٠ + ق_{١} ق_{٢} \qquad \therefore ق_{١} ق_{٢} = ٣$

$\therefore ق_{٢} = \frac{٣}{ق_{١}}$ وبالتعويض فى (١)

$\therefore ١٠ = ق_{١}^{٢} + \frac{٩}{ق_{١}^{٢}} \qquad \therefore ١٠ ق_{١}^{٢} = ق_{١}^{٤} + ٩$

$\therefore ق_{١}^{٤} - ١٠ ق_{١}^{٢} + ٩ = ٠$

$\therefore (ق_{١}^{٢} - ٩)(ق_{١}^{٢} - ١) = ٠$

$\therefore$ القوتان هما ١ ، ٣ نيوتن

٢٢

$ح_{١} = ٢\ ق\ جتا \frac{ى}{٢} = ١٢$

$\therefore ق\ جتا \frac{ى}{٢} = ٦$ $\qquad$ (١)

، $ح_{٢} = ٢\ ق\ جتا \left(\frac{١٨٠° - ى}{٢}\right) = ٦$

منها $ق\ جا \frac{ى}{٢} = ٣$ $\qquad$ (٢)

بتربيع كل من المعادلتين وجمعهما

$\therefore ق^{٢}\ جتا^{٢} \frac{ى}{٢} + ق^{٢}\ جا^{٢} \frac{ى}{٢} = ٦^{٢} + ٣^{٢}$

$\therefore ق^{٢} \left(جتا^{٢} \frac{ى}{٢} + جا^{٢} \frac{ى}{٢}\right) = ٤٥$

$\therefore ق = \sqrt{٤٥} = ٣\sqrt{٥}$ ث.كجم

٢٣

فى الحالة الأولى : $ح^{٢} = ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} + ٢ ق_{١} ق_{٢}\ جتا\ ١٢٠°$

$\therefore ح^{٢} = ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} - ق_{١} ق_{٢}$ $\qquad$ (١)

وفى الحالة الثانية يصبح قياس الزاوية بين اتجاهى $ق_{١}$ ، $ق_{٢}$ هو ٦٠°

$\therefore ٣ ح^{٢} = ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} + ق_{١} ق_{٢}$ $\qquad$ (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) :

$\therefore ٣ (ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} - ق_{١} ق_{٢}) = ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} + ق_{١} ق_{٢}$

$\therefore ٢ ق_{١}^{٢} + ٢ ق_{٢}^{٢} - ٤ ق_{١} ق_{٢} = ٠$

$\therefore ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} - ٢ ق_{١} ق_{٢} = ٠$

$\therefore (ق_{١} - ق_{٢})^{٢} = ٠ \qquad \therefore ق_{١} = ق_{٢}$

$\therefore \overleftarrow{ح_{١}}$ فى الحالة الأولى تصنع مع $\overleftarrow{ق_{١}}$ زاوية قياسها ٦٠°

، $\overleftarrow{ح_{٢}}$ فى الحالة الثانية تصنع مع $\overleftarrow{ق_{١}}$ زاوية قياسها ٣٠° من الجهة الأخرى.

$\therefore$ قياس الزاوية بين المحصلتين = ٩٠°

٢٤

$\overleftarrow{ق_{١}} = (٤ ، ٠°)$ ، $\overleftarrow{ق_{٢}} = (ق ، ى°)$ ، $\overleftarrow{ح} = (١٠ ، ٦٠°)$

$\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{ق_{١}} + \overleftarrow{ق_{٢}}$

$\therefore (١٠\ جتا\ ٦٠° ، ١٠\ جا\ ٦٠°) = (٤\ جتا\ ٠° ، ٤\ جا\ ٠°)$
$+ (ق\ جتا\ ى ، ق\ جا\ ى)$

$\therefore (٥ ، ٥\sqrt{٣}) = (٤ ، ٠) + (ق\ جتا\ ى ، ق\ جا\ ى)$

$\therefore ق\ جتا\ ى + ٤ = ٥ \qquad \therefore ق\ جتا\ ى = ١$ $\qquad$ (١)

، $ق\ جا\ ى = ٥\sqrt{٣}$ $\qquad$ (٢)

بقسمة (٢) على (١) :

$\therefore ظا\ ى = ٥\sqrt{٣}$

$\therefore جا\ ى = \frac{٥\sqrt{٣}}{\sqrt{٧٦}}$

وبالتعويض فى (٢) :

$\therefore ق \times \frac{٥\sqrt{٣}}{\sqrt{٧٦}} = ٥\sqrt{٣}$

$\therefore ق = \sqrt{٧٦} = ٢\sqrt{١٩}$ نيوتن.

<u>حل آخر :</u>

بتطبيق قاعدة جيب التمام نجد أن :

$ق^{٢} = (١٠)^{٢} + (٤)^{٢}$
$- ٢ \times ٤ \times ١٠ \times جتا\ ٦٠° = ٧٦$

$\therefore ق = ٢\sqrt{١٩}$ نيوتن.

٢٥

بفرض أن : $ق_{١} > ق_{٢}$ $\qquad \therefore ق_{١} - ق_{٢} = ١٥$

$\therefore ق_{١} = ١٥ + ق_{٢}$ $\qquad$ (١)

، $(٣٥)^{٢} = ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} + ٢ ق_{١} ق_{٢} \times \frac{١}{٢}$

$\therefore ١٢٢٥ = (١٥ + ق_{٢})^{٢} + ق_{٢}^{٢} - (١٥ + ق_{٢}) ق_{٢}$

$\therefore ١٢٢٥ = ٢٢٥ + ق_{٢}^{٢} + ٣٠ ق_{٢} + ق_{٢}^{٢} - ١٥ ق_{٢} - ق_{٢}^{٢}$

$\therefore ق_{٢}^{٢} + ١٥ ق_{٢} - ١٠٠٠ = ٠$

$\therefore (ق_{٢} + ٤٠)(ق_{٢} - ٢٥) = ٠$

$\therefore$ القوتان هما ٤٠ ، ٢٥ نيوتن

٢٦

$ق_{١} + ق_{٢} = ٤ \qquad \therefore ق_{١} = ٤ - ق_{٢}$ $\qquad$ (١)

، $١٣ = ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} + ٢ ق_{١} ق_{٢}\ جتا\ ٦٠°$

وبالتعويض من (١) :

$\therefore ١٣ = (٤ - ق_{٢})^{٢} + ق_{٢}^{٢} + (٤ - ق_{٢}) ق_{٢}$

$\therefore ١٣ = ١٦ - ٨ ق_{٢} + ق_{٢}^{٢} + ق_{٢}^{٢} + ٤ ق_{٢} - ق_{٢}^{٢}$

$\therefore ق_{٢}^{٢} - ٤ ق_{٢} + ٣ = ٠$

$\therefore (ق_{٢} - ١)(ق_{٢} - ٣) = ٠$

$\therefore$ القوتان هما : ١ ، ٣ نيوتن

٢٧

بفرض القوتين $ق_{١}$ ، $ق_{٢}$ حيث $ق_{١} < ق_{٢}$

$\therefore ق_{١} + ق_{٢} = ٤٠$ ومنها $ق_{١} = ٤٠ - ق_{٢}$ $\qquad$ (١)

، $\because$ المحصلة = ٢٠ ثكجم

$\therefore ٤٠٠ = ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} + ٢ ق_{١} ق_{٢}\ جتا\ ى$ $\qquad$ (٢)

، $\because$ المحصلة عمودية على القوة الصغرى

$\therefore ق_{١} + ق_{٢}\ جتا\ ى = ٠$

$\therefore جتا\ ى = \frac{-ق_{١}}{ق_{٢}}$ وبالتعويض فى (٢)

$\therefore ٤٠٠ = ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} - ٢ ق_{١} ق_{٢} \times \frac{ق_{١}}{ق_{٢}}$

$\therefore ٤٠٠ = ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} - ٢ ق_{١}^{٢}$

$\therefore ٤٠٠ = ق_{٢}^{٢} - ق_{١}^{٢}$ وبالتعويض من (١)

$\therefore ٤٠٠ = ق_{٢}^{٢} - (٤٠ - ق_{٢})^{٢}$

$\therefore ٤٠٠ = ق_{٢}^{٢} - ١٦٠٠ + ٨٠ ق_{٢} - ق_{٢}^{٢}$

$\therefore ٢٠٠٠ = ٨٠ ق_{٢} \qquad \therefore ق_{٢} = ٢٥$ ثكجم

وبالتعويض فى (١) :

$\therefore ق_{١} = ١٥$ ثكجم ، $جتا\ ى = \frac{-١٥}{٢٥} = \frac{-٣}{٥}$

٢٨

$ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} = ٢٥$ $\qquad$ (١)

، $\because ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} + ٢ ق_{١} ق_{٢}\ جتا\ ١٢٠° = ١٣$

$\therefore ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} - ق_{١} ق_{٢} = ١٣$ $\qquad$ (٢)

وبطرح (٢) من (١) $\therefore ق_{١} ق_{٢} = ١٢$

$\therefore ق_{١} = \frac{١٢}{ق_{٢}}$ وبالتعويض فى (١)

$\therefore \left(\frac{١٢}{ق_{٢}}\right)^{٢} + ق_{٢}^{٢} = ٢٥ \qquad \therefore \frac{١٤٤}{ق_{٢}^{٢}} + ق_{٢}^{٢} = ٢٥$

∴ ق$_2^4$ − ٢٥ ق$_2^2$ + ١٤٤ = ٠

∴ (ق$_2^2$ − ٩) (ق$_2^2$ − ١٦) = ٠ ، ∵ ق$_1$ > ق$_2$

∴ ق$_1$ = ٤ ثقل.كجم ، ق$_2$ = ٣ ثقل.كجم

٢٩

ح$_1$ = ٢ ق جتا ٦٠° = ق

، ح$_2$ = ٢ (٢ ق) جتا ٣٠° = ٢ √٣ ق

، ∵ ح$_2$ − ح$_1$ = ١١ ∴ ٢ √٣ ق − ق = ١١

∴ ق = $\frac{١١}{٢\sqrt{٣} - ١}$ ∴ ق = ١ + ٢ √٣

٣٠

الحالة الأولى :

$(\sqrt{٥}$ ق (م + ١)$)^2$

= ق^2 + (٢ ق)^2 + ٢ × ق × ٢ ق جتا ى

∴ ٥ ق^2 (م^2 + ٢ م + ١) − ٥ ق^2 = ٤ ق^2 جتا ى

∴ ٥ ق^2 م (م + ٢) = ٤ ق^2 جتا ى (١)

الحالة الثانية :

$(\sqrt{٥}$ ق (م − ١)$)^2$

= ق^2 + (٢ ق)^2 + ٢ × ق × ٢ ق × جتا (٩٠° − ى)

∴ ٥ ق^2 (م^2 − ٢ م + ١) − ٥ ق^2 = ٤ ق^2 جا ى

∴ ٥ ق^2 م (م − ٢) = ٤ ق^2 جا ى (٢)

بقسمة (٢) ÷ (١) :

$\frac{\text{٥ ق}^2 \text{ م (م − ٢)}}{\text{٥ ق}^2 \text{ م (م + ٢)}} = \frac{\text{٤ ق}^2 \text{ جا ى}}{\text{٤ ق}^2 \text{ جتا ى}}$ ∴ ظا ى = $\frac{\text{م − ٢}}{\text{م + ٢}}$

ثالثاً مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

١

① (د) ② (د) ③ (ب) ④ (د)

⑤ (أ) ⑥ (ب) ⑦ (جـ) ⑧ (د)

⑨ (أ) ⑩ (د) ⑪ (جـ)

إرشادات لحل رقم **١**

① ∵ القيمة العظمى = ق$_1$ + ق$_2$

، والقيمة الصغرى = ق$_1$ − ق$_2$ حيث ق$_1$ > ق$_2$

∴ $\frac{\text{ق}_1 + \text{ق}_2}{\text{ق}_1 - \text{ق}_2} = \frac{٧}{٣}$

∴ ٣ ق$_1$ + ٣ ق$_2$ = ٧ ق$_1$ − ٧ ق$_2$

∴ ٤ ق$_1$ = ١٠ ق$_2$ ∴ $\frac{\text{ق}_1}{\text{ق}_2} = \frac{١٠}{٤} = \frac{٥}{٢}$

∴ النسبة بين القوتين = ٥ : ٢

② ∵ ق$_1$: ق$_2$: ح = ٤ : ٣ : √١٣

∴ ق$_1$ = ٤ م ، ق$_2$ = ٣ م ، ح = √١٣ م

∴ $(\sqrt{١٣}$ م$)^2$ = (٤ م)^2 + (٣ م)^2 + ٢ (٤ م) (٣ م) جتا ى

∴ جتا ى = $\frac{\text{١٣ م}^2 - \text{١٦ م}^2 - \text{٩ م}^2}{\text{٢٤ م}^2} = \frac{-١}{٢}$

∴ قياس الزاوية بين القوتين = جتا$^{-1}$ $\left(\frac{-١}{٢}\right)$ = ١٢٠°

③ ∵ المحصلة ⊥ ق$_1$

∴ ق$_1$ + ق$_2$ جتا ى = صفر

∴ جتا ى = $\frac{-\text{ق}_1}{\text{ق}_2}$

∴ قياس الزاوية بين القوتين = جتا$^{-1}$ $\left(\frac{-\text{ق}_1}{\text{ق}_2}\right)$

④ ∵ قياس الزاوية بين القوتين = ٩٠°

وإذا تساوت القوتين فإن المحصلة تنصف الزاوية

، ∵ القوتين غير متساويتين

∴ المحصلة تميل أكثر ناحية القوة الأكبر

∴ قياس الزاوية θ بين القوة الأكبر والمحصلة لابد وأن تكون أقل من ٤٥°

⑤ بتمثيل القوتين $\overrightarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_2}$ بمتوازى الأضلاع كما بالشكل

∴ $\overrightarrow{\text{ق}_1}$ + $\overrightarrow{\text{ق}_2}$ = $\overrightarrow{\text{أب}}$ + $\overrightarrow{\text{أء}}$

= $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ = $\overrightarrow{\text{ح}}$

، $\overrightarrow{\text{ق}_1}$ + (−$\overrightarrow{\text{ق}_2}$) = $\overrightarrow{\text{أب}}$ + (−$\overrightarrow{\text{أء}}$) = $\overrightarrow{\text{أب}}$ − $\overrightarrow{\text{أء}}$

= $\overrightarrow{\text{ءب}}$ = $\overrightarrow{\text{ح'}}$

∵ $\overrightarrow{\text{ح}}$ ، $\overrightarrow{\text{ح'}}$ يمثلان بقطرى المتوازى

∴ فى حالة تعامدهما يكون الشكل معيناً

∴ أب = أء منها ق$_1$ = ق$_2$

⑥ ح^2 = ق^2 + (٤)^2 + ٢ (ق) (٤) جتا ١٢٠°

∴ ح^2 = ق^2 − ٤ ق + ١٦

∴ ح^2 = (ق − ٢)^2 + ١٢

∴ ح = $\sqrt{(\text{ق} - ٢)^2 + ١٢}$

∴ أصغر قيمة للمحصلة تكون عندما ق = ٢

⑦ كلما زادت القوة ق$_2$ كلما اقتربت المحصلة من القوة الأكبر التى تتضاعف وبالتالى تزداد الزاوية التى تصنعها المحصلة مع القوة الثانية أى أن θ$_2$ > θ$_1$

⑧ ∵ ق^2 = ق^2 + ٣ ق^2 + ٢ (ق) (ق √٣) جتا ى

∴ جتا ى = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ ى = ١٥٠°

، ∵ ظا هـ$_1$ = $\frac{\text{ق} \sqrt{٣} \text{ جا ١٥٠°}}{\text{ق + ق} \sqrt{٣} \text{ جتا ١٥٠°}}$ = −√٣

∴ هـ$_1$ = ١٢٠°

وبالتالى هـ$_2$ = ١٥٠° − ١٢٠° = ٣٠°

∴ هـ$_1$ = ٤ هـ$_2$

⑨ ∵ ٣ ≤ ق$_1$ ≤ ١٢ ∴ ٩ ≤ ق$_1^2$ ≤ ١٤٤ (١)

، ٤ ≤ ق$_2$ ≤ ١٦ ∴ ١٦ ≤ ق$_2^2$ ≤ ٢٥٦ (٢)

بجمع (١)، (٢) ∴ ٢٥ ≤ ق$_1^2$ + ق$_2^2$ ≤ ٤٠٠

∴ ٥ ≤ ح ≤ ٢٠

⑩ ∵ ١ ≤ ق$_1$ ≤ ٩ ، ٣ ≤ ق$_2$ ≤ ٧

∴ ٤ ≤ ق$_1$ + ق$_2$ ≤ ١٦ (١)

∴ ١ ≤ ق$_1$ ≤ ٩ ، −٧ ≤ −ق$_2$ ≤ −٣

∴ −٦ ≤ ق$_1$ − ق$_2$ ≤ ٦

∴ ٠ ≤ |ق$_1$ − ق$_2$| ≤ ٦ (٢)

من (١)، (٢) يتضح أن ≤ ح ≤ ١٦

⑪ ∵ ٤ ≤ ق$_1$ ≤ ٢٠

، ٣٢ ≤ ق$_2$ ≤ ٣٦

∴ ١٧ ≤ ق$_2$ − ق$_1$ ≤ ٤٦

وتتحقق عندما θ = صفر

، ٥^2 − (١٣)^2 ≤ ق$_2^2$ − ق$_1^2$ ≤ [illegible]

∴ ١٦٩ ≤ ق$_2^2$ − ق$_1^2$ ≤ ٨٤١

∴ ١٣ ≤ $\sqrt{\text{ق}_1^2 + \text{ق}_2^2}$ ≤ ٢٩

وتتحقق عندما θ = $\frac{\pi}{٢}$

∴ ١٣ ≤ ح ≤ ٤٦

عندما ٠ ≤ θ ≤ $\frac{\pi}{٢}$

٣

فى الحالة الأولى

نفرض أن القوتين ق ، ٢ ق بينهما زاوية قياسها ى

∴ ظا هـ = $\frac{\text{٢ ق جا ى}}{\text{ق + ٢ ق جتا ى}}$

∴ ظا هـ = $\frac{\text{٢ جا ى}}{\text{١ + ٢ جتا ى}}$ (١)

، فى الحالة الثانية القوة الأولى تصبح [illegible]

القوة الثانية = [illegible]

∴ ظا هـ = [illegible] (٢)

من (١)، (٢) ∴ [illegible]

$\therefore \frac{1}{1 + 2\text{ جتا ى}} = \frac{2\text{ ق}}{\text{ق} + 4 + 4\text{ ق جتا ى}}$

$\therefore$ ق + ٤ + ٤ ق جتا ى = ٢ ق + ٤ ق جتا ى

$\therefore$ ق + ٤ = ٢ ق $\therefore$ ق = ٤ ثقل.كجم

$\therefore$ في الحالة الأولى :

القوة الأولى مقدارها ٤ ث.كجم

، القوة الثانية مقدارها ٨ ث.كجم

، $ح_1 = \sqrt{16 + 64 + 2 \times 4 \times 8 \text{ جتا ى}}$

$= 4\sqrt{5 + 4\text{ جتا ى}}$

، في الحالة الثانية :

القوة الأولى مقدارها ٨ ث.كجم

، القوة الثانية مقدارها ١٦ ث.كجم

، $ح_2 = \sqrt{64 + 256 + 2 \times 8 \times 16 \text{ جتا ى}}$

$= 8\sqrt{5 + 4\text{ جتا ى}}$

$\therefore \frac{ح_1}{ح_2} = \frac{4\sqrt{5 + 4\text{ جتا ى}}}{8\sqrt{5 + 4\text{ جتا ى}}} = \frac{1}{2}$

٣

الحالة الأولى :

$ح^2 = ق_1^2 + ق_2^2 + 2\,ق_1\,ق_2 \text{ جتا ى}$ (١)

الحالة الثانية :

$3\,ح^2 = ق_1^2 + ق_2^2 + 2\,ق_1\,ق_2 \text{ جتا}(180^\circ - \text{ى})$

$\therefore 3\,ح^2 = ق_1^2 + ق_2^2 - 2\,ق_1\,ق_2 \text{ جتا ى}$ (٢)

وبضرب (١) × ٣ ثم طرح (٢) من (١) :

$\therefore$ صفر $= 2\,ق_1^2 + 2\,ق_2^2 + 8\,ق_1\,ق_2 \text{ جتا ى}$

$\therefore \text{جتا ى} = \frac{-ق_1^2 - ق_2^2}{4\,ق_1\,ق_2}$ (٣)

وبفرض هـ$_1$ زاوية ميل ح على القوة ق$_1$

$\therefore \text{ظا هـ}_1 = \frac{ق_2 \text{ جا ى}}{ق_1 + ق_2 \text{ جتا ى}}$

وبفرض هـ$_2$ زاوية ميل ح $\sqrt{3}$ على ق$_1$

$\therefore \text{ظا هـ}_2 = \frac{ق_2 \text{ جا}(180^\circ - \text{ى})}{ق_1 + ق_2 \text{ جتا}(180^\circ - \text{ى})}$

$\therefore \text{ظا هـ}_2 = \frac{ق_2 \text{ جا ى}}{ق_1 - ق_2 \text{ جتا ى}}$

، $\because$ هـ$_1$ + هـ$_2$ = ٩٠° $\therefore$ ظا هـ$_1$ = ظتا هـ$_2$

$\therefore \frac{ق_2 \text{ جا ى}}{ق_1 + ق_2 \text{ جتا ى}} = \frac{ق_1 - ق_2 \text{ جتا ى}}{ق_2 \text{ جا ى}}$

$\therefore ق_2^2 \text{ جا}^2 \text{ى} = ق_1^2 - ق_2^2 \text{ جتا}^2 \text{ى}$

$\therefore ق_2^2 (\text{جا}^2\text{ى} + \text{جتا}^2\text{ى}) = ق_1^2 \qquad \therefore ق_2^2 = ق_1^2$

وبالتعويض في (٣) : $\therefore \text{جتا ى} = \frac{-2\,ق_1^2}{4\,ق_1^2} = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ ى = ١٢٠°

<u>حل آخر :</u>

$\because$ أ د = أ هـ = ب حـ

= ب و

$\therefore$ في $\triangle$ حـ أ و :

$\because$ ق (∠ حـ أ و) = ٩٠°

، $\because \overline{\text{أ ب}}$ متوسط خارج من رأس القائمة

$\therefore$ أ ب = $\frac{1}{2}$ حـ و = حـ ب = ب و

$\therefore ق_1 = ق_2$

، $\because$ ظا (∠ حـ و أ) = $\frac{ح}{ح\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ ق (∠ حـ و أ) = ٣٠° $\therefore$ ق (∠ أ حـ و) = ٦٠°

$\therefore \triangle$ أ ب حـ متساوي الأضلاع

$\therefore$ ق (∠ أ حـ ب) = ق (∠ حـ أ ب) = ق (∠ حـ أ د)

= ٦٠°

$\therefore$ ق (∠ ى) = ١٢٠°

إجابات تمارين 2

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

① (حـ)	② (د)	③ (د)	④ (د)	⑤ (حـ)
⑥ (أ)	⑦ (حـ)	⑧ (ب)	⑨ (ب)	⑩ (ب)
⑪ (أ)	⑫ (حـ)	⑬ (ب)	⑭ (أ)	⑮ (د)
⑯ (حـ)	⑰ (حـ)	⑱ (حـ)	⑲ (حـ)	⑳ (أ)
㉑ (أ)	㉒ (ب)	㉓ (حـ)	㉔ (ب)	㉕ (ب)
㉖ (ب)	㉗ (حـ)	㉘ (حـ)	㉙ (حـ)	㉚ (د)

ثانياً الأسئلة المقالية

١

$ق_1 = \frac{600 \text{ جا } 45^\circ}{\text{جا } 75^\circ} \approx 439.2$ ث.جم

، $ق_2 = \frac{600 \text{ جا } 30^\circ}{\text{جا } 75^\circ} \approx 310.6$ ث.جم

٢

المركبة في اتجاه الشمال = ١٠٠ جا ٤٥°

= ٥٠ $\sqrt{2}$ ث.جم

، المركبة في اتجاه الغرب = ١٠٠ جتا ٤٥°

= ٥٠ $\sqrt{2}$ ث.جم

٣

$ق_1 = \frac{12 \text{ جا } 90^\circ}{\text{جا } 135^\circ} = 12\sqrt{2}$ ث.كجم

، $ق_2 = \frac{12 \text{ جا } 135^\circ}{\text{جا } 135^\circ} = 12$ ث.كجم

٤

ق$_1$ = ١٦٠ جتا ٣٠°

= ٨٠ $\sqrt{3}$ ث.جم

، ق$_2$ = ١٦٠ جا ٣٠°

= ٨٠ ث.جم

٥

ق$_1$ = ٣٠٠ جتا ٦٠° = ١٥٠

، ق$_2$ = ٣٠٠ جا ٦٠° = ١٥٠ $\sqrt{3}$

٦

ق$_1$ = ١٨٠ جتا ٦٠° = ٩٠ نيوتن

، ق$_2$ = ١٨٠ جا ٦٠° = ٩٠ $\sqrt{3}$ نيوتن

٧

= ٢٠ $\sqrt{3}$ نيوتن

٨

ق١ = ٨٠ جتا ٦٠° = ٤٠ نيوتن

، ق٢ = ٨٠ جتا ٣٠° = ٤٠ $\sqrt{3}$ نيوتن

٩

∵ ظا ى = − $\frac{1}{\sqrt{3}}$

∴ ى = ١٥٠°

∵ ق١ = $\frac{\text{ع جا } 90°}{\text{جا } 150°}$

∴ ع = $\frac{\text{٣٠ جا } 150°}{\text{جا } 90°}$ = ١٥ نيوتن

، ق٢ = $\frac{\text{١٥ جا } 60°}{\text{جا } 150°}$ = ١٥ $\sqrt{3}$ نيوتن

١٠

∵ ق١ = $\frac{\text{ق جا } 90°}{\text{جا } 150°}$

∴ ق = $\frac{\text{٤٠ جا } 150°}{\text{جا } 90°}$

= ٢٠ نيوتن

، ق٢ = $\frac{\text{٢٠ جا } 60°}{\text{جا } 150°}$ = ٢٠ $\sqrt{3}$ نيوتن

١١

ق١ = ٤٢ جتا ٦٠°

= ٢١ نيوتن

، ق٢ = ٤٢ جا ٦٠°

= ٢١ $\sqrt{3}$ نيوتن

١٢

ق١ = ٦٠ جا هـ = ٦٠ × $\frac{3}{5}$ = ٣٦ نيوتن

، ق٢ = ٦٠ جتا هـ = ٦٠ × $\frac{4}{5}$ = ٤٨ نيوتن

١٣

ق١ = $\frac{\text{١٢٠ جا } 48°}{\text{جا } (48° + 90°)}$ = ١٣٣,٢٧ ث.جم

ق٢ = $\frac{\text{١٢٠ جا } 90°}{\text{جا } (48° + 90°)}$ = ١٧٩,٣٤ ث.جم

١٤

$(30)^2 = (15\sqrt{3})^2 + (\text{ق}_2)^2$

∴ ق٢ = ١٥ نيوتن

١٥

ق١ = ق٢ = $\frac{\text{٢٠ جا } 85°}{\text{جا } (85° + 85°)}$ = ١١٤,٧٤ نيوتن

– عندما يقل قياس الزاوية مع الأفقى عن ٥° فإن مقدار مركبة الوزن فى اتجاهى الحبلين يزداد إلى أن يصبح لا نهائيًا عندما تكون الحبال أفقية.

١٦

ق١ = ٣٩٠ جا هـ

= ١٥٠ ث.جم

ق٢ = ٣٩٠ جتا هـ

= ٣٦٠ ث.جم

١٧

ق١ فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أب}}$

∴ ق١ = $\frac{\text{٥٠٠٠ × جا } 30°}{\text{جا } 75°}$ = ٢٥٨٨,٢ نيوتن

، ق٢ فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أحـ}}$

ق٢ = $\frac{\text{٥٠٠٠ جا } 45°}{\text{جا } 75°}$ = ٣٦٦٠,٢ نيوتن

إجابات التمارين 3

• ملاحظة هامة : سوف نحل مسائل هذا التمرين باستخدام الزوايا القطبية ولكن يمكن للطالب استخدام تحليل القوى فى اتجاهين متعامدين

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (جـ) (٢) (ب) (٣) (جـ) (٤) (د) (٥) (د)

(٦) (أ) (٧) (ب) (٨) (جـ) (٩) (أ) (١٠) (جـ)

(١١) (د) (١٢) (جـ) (١٣) (د) (١٤) (د)

(١٥) أولًا : (ب) ثانيًا : (جـ) (١٦) (ب) (١٧) (جـ)

(١٨) (د) (١٩) (أ) (٢٠) (أ) (٢١) (جـ) (٢٢) (ب)

(٢٣) (أ) (٢٤) (ب)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

(١) س = ٢٧ جتا ٠° + ١٨ جتا ٩٠° + ١٢ $\sqrt{2}$ جتا ١٣٥°

+ ١٥ $\sqrt{2}$ جتا ٢٢٥° + ٩ جتا ٢٧٠°

= ٢٧ × ١ + ١٨ × ٠ + ١٢ $\sqrt{2}$ × − $\frac{1}{\sqrt{2}}$

+ ١٥ $\sqrt{2}$ × − $\frac{1}{\sqrt{2}}$ + ٩ × ٠ = صفر

، ص = ٢٧ جا ٠° + ١٨ جا ٩٠° + ١٢ $\sqrt{2}$ جا ١٣٥°

+ ١٥ $\sqrt{2}$ جا ٢٢٥° + ٩ جا ٢٧٠°

= ٢٧ × ٠ + ١٨ × ١ + ١٢ $\sqrt{2}$ × $\frac{1}{\sqrt{2}}$

+ ١٥ $\sqrt{2}$ × $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ + ٩ × −١ = ٦

∴ $\overleftarrow{\text{ح}}$ = ٦ $\overleftarrow{\text{ص}}$ ∴ ح = ٦ نيوتن

∴ مقدار المحصلة ٦ نيوتن وتعمل فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$

(٢) س = ٤ جتا ٦٠° + ٢ $\sqrt{3}$ جتا ٢٧٠° + ٢ $\sqrt{3}$ جتا ٣٣٠°

= ٤ × $\frac{1}{2}$ + ٢ $\sqrt{3}$ × ٠ + ٢ $\sqrt{3}$ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$

= ٥

، ص = ٤ جا ٦٠° + ٢ $\sqrt{3}$ جا ٢٧٠° + ٢ $\sqrt{3}$ جا ٣٣٠°

= ٤ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ + ٢ $\sqrt{3}$ × −١ + ٢ $\sqrt{3}$ × $\frac{-1}{2}$

= −٣ $\sqrt{3}$

∴ $\overleftarrow{\text{ح}}$ = ٥ $\overleftarrow{\text{س}}$ − ٣ $\sqrt{3}$ $\overleftarrow{\text{ص}}$

∴ ح = $\sqrt{(5)^2 + (-3\sqrt{3})^2}$ = $\sqrt{52}$ نيوتن

، ظا هـ = $\frac{-3\sqrt{3}}{5}$ ∴ هـ = ٣٢٤° ١٧

∴ مقدار المحصلة $\sqrt{52}$ نيوتن وتصنع زاوية قياسها ٣٢٤° ١٧ مع $\overleftarrow{\text{و س}}$

٢

نعتبر $\overleftarrow{\text{و س}}$ هو اتجاه القوة الأولى

∴ س = ١ × جتا ٠° + ٢ × جتا ٦٠° + $\sqrt{3}$ × جتا ٩٠°

= ١ + ٢ × $\frac{1}{2}$ + $\sqrt{3}$ × صفر = ٢

، ص = ١ × جا ٠° + ٢ × جا ٦٠° + $\sqrt{3}$ × جا ٩٠°

= ١ × صفر + ٢ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ + $\sqrt{3}$ = ٢ $\sqrt{3}$

∴ $\overleftarrow{\text{ح}}$ = ٢ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٢ $\sqrt{3}$ $\overleftarrow{\text{ص}}$

∴ ح = $\sqrt{(2)^2 + (2\sqrt{3})^2}$ = ٤ نيوتن

، ظا هـ = $\frac{2\sqrt{3}}{2}$ = $\sqrt{3}$ ∴ هـ = ٦٠°

∴ مقدار المحصلة ٤ نيوتن وتعمل فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و ح}}$

٣

بفرض $\overleftarrow{\text{و س}}$ فى اتجاه القوة الأولى

∴ س = ٨ جتا ٠° + ٤ √٣ جتا ٣٠° + ٦ √٣ جتا ١٥٠° + ١٤ جتا ٢٤٠° = ٨ × ١ + ٤ √٣ × √٣/٢ + ٦ √٣ × (−√٣/٢) + ١٤ × (−١/٢)

= ٨ + ٦ − ٩ − ٧ = −٢

، ص = ٨ جا ٠° + ٤ √٣ جا ٣٠° + ٦ √٣ جا ١٥٠° + ١٤ جا ٢٤٠°

= ٨ × ٠ + ٤ √٣ × ١/٢ + ٦ √٣ × ١/٢ + ١٤ × (−√٣/٢) = −٢ √٣

∴ ح = −٢ س − ٢ √٣ ص

∴ ح = √((−٢)² + (−٢ √٣)²) = ٤ نيوتن

، طا هـ = −٢ √٣ / −٢ = √٣

، ∵ س ، ص سالبتان ∴ هـ = ٢٤٠°

∴ مقدار المحصلة ٤ نيوتن واتجاهها يصنع زاوية قياسها ٢٤٠° مع و س أى فى اتجاه القوة الرابعة

٤

نعتبر و س فى اتجاه القوة الأولى

∴ س = ٢ جتا ٠° + ٣ √٢ جتا ٤٥° + ٢ √٣ جتا ١٥٠° + √٣ جتا ٢٧٠° = ٢ × ١ + ٣ √٢ × ١/√٢ + ٢ √٣ × (−√٣/٢) + √٣ × صفر = ٢

، ص = ٢ جا ٠° + ٣ √٢ جا ٤٥° + ٢ √٣ جا ١٥٠° + √٣ جا ٢٧٠° = ٢ × صفر + ٣ √٢ × ١/√٢ + ٢ √٣ × ١/٢ + √٣ × −١ = ٣

∴ ح = ٢ س + ٣ ص

∴ ح = √((٢)² + (٣)²) = √١٣ نيوتن

، طا هـ = ٣/٢ ∴ هـ ≃ ١٩َ ٥٦°

∴ مقدار المحصلة √١٣ نيوتن واتجاهها يصنع زاوية قياسها ١٩َ ٥٦° مع و س

أى بين القوتين الثانية والثالثة وتصنع زاوية قياسها ١٩َ ١١° مع القوة الثانية

٥

∵ س = ٩ جتا ٠° + ٦ جتا ٩٠° + ٤ √٢ جتا ١٣٥° + ٥ √٢ جتا ٢٢٥° + ٥ جتا ٢٧٠° = ٩ × ١

+ ٦ × صفر + ٤ √٢ × −١/√٢ + ٥ √٢ × −١/√٢ + ٥ × صفر = صفر

، ص = ٩ جا ٠° + ٦ جا ٩٠° + ٤ √٢ جا ١٣٥° + ٥ √٢ جا ٢٢٥° + ٥ جا ٢٧٠°

= ٩ × صفر + ٦ × ١ + ٤ √٢ × ١/√٢ + ٥ √٢ × −١/√٢ + ٥ × −١ = صفر

∴ ح = ٠ ∴ المجموعة متزنة

٦

∵ س = ٦٠ جتا ٩٠° + ٨٨ جتا ٢١٠° + ٦٠ جتا ٣٣٠°

= ٦٠ × صفر + ٨٨ × −√٣/٢ + ٦٠ × √٣/٢ = −١٤ √٣

، ص = ٦٠ جا ٩٠° + ٨٨ جا ٢١٠° + ٦٠ جا ٣٣٠°

= ٦٠ × ١ + ٨٨ × −١/٢ + ٦٠ × −١/٢ = −١٤

∴ ح = −١٤ √٣ س − ١٤ ص

∴ ح = √((−١٤ √٣)² + (−١٤)²) = ٢٨ ث جم

، طا هـ = −١٤ / −١٤ √٣ = ١/√٣

، ∵ س ، ص سالبتان ∴ هـ = ٢١٠°

∴ مقدار المحصلة ٢٨ ث جم وفى اتجاه ٣٠° جنوب الغرب

٧

∵ س = ٤ جتا ٠° + ٢ جتا ٦٠° + ٥ جتا ١٢٠° + ٣ √٣ جتا ٢١٠° = ٤ × ١ + ٢ × ١/٢

+ ٥ × −١/٢ + ٣ √٣ × −√٣/٢ = −٢

، ص = ٤ جا ٠° + ٢ جا ٦٠° + ٥ جا ١٢٠° + ٣ √٣ جا ٢١٠° = ٤ × صفر + ٢ × √٣/٢

+ ٥ × √٣/٢ + ٣ √٣ × ١/٢ − = ٢ √٣

∴ ح = −٢ س + ٢ √٣ ص

∴ ح = √((٢)² + (٢ √٣)²) = ٤ نيوتن

، طا هـ = ٢ √٣ / −٢ = −√٣

، ∵ س < ٠ ، ص > ٠ ∴ هـ = ١٢٠°

٨

نعتبر و س فى اتجاه القوة الأولى

∴ س = ٢ ن جتا ٠° + ٣ ن جتا ١٢٠° + ٤ ن جتا ٢٤٠°

= ٢ ن × ١ + ٣ ن × −١/٢

+ ٤ ن × −١/٢ = −١ ١/٢ ن

، ص = ٢ ن جا ٠° + ٣ ن جا ١٢٠° + ٤ ن جا ٢٤٠°

= ٢ ن × صفر + ٣ ن × √٣/٢ + ٤ ن × −√٣/٢

= −√٣/٢ ن

∴ ح = −١ ١/٢ ن س − √٣/٢ ن ص

∴ ح = √((−٣/٢ ن)² + (−√٣/٢ ن)²) = √٣ ن نيوتن

، طا هـ = −√٣/٢ × ٢/−٣ = √٣/٣ ∴ هـ = ٢١٠°

∴ المحصلة مقدارها √٣ ن نيوتن واتجاهها يصنع زاوية قياسها ٢١٠° مع و س

أى بين القوتين ٣ ن ، ٤ ن وعمودية على القوة ٢ ن

٩

نفرض و ص فى اتجاه القوة الثالثة

∴ س = [illegible]

= [illegible] × صفر + [illegible] × −√٣/٢ + [illegible] × √٣/٢

= [illegible] √٣

، ص = ٢٥ جا ٩٠° + ١٥ جا ٢١٠° + ٢٠ جا ٣٣٠°

= ٢٥ × ١ + ١٥ × $\frac{-١}{٢}$ + ٢٠ × $\frac{-١}{٢}$ = ٧٫٥

∴ ح = ٢٫٥ √٣ س + ٧٫٥ ص

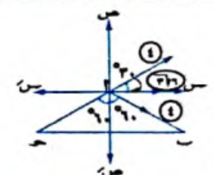
∴ ح = $\sqrt{(٢٫٥\sqrt{٣})^{٢} + (٧٫٥)^{٢}}$ = ٥ √٣ نيوتن

، ظا هـ = $\frac{٧٫٥}{٢٫٥\sqrt{٣}}$ = √٣ ∴ هـ = ٦٠°

∴ المحصلة مقدارها ٥ √٣ نيوتن واتجاهها يصنع مع و س زاوية قياسها ٦٠°

أى بين م أ ، م ب وتصنع زاوية قياسها ٣٠° مع م أ

١٠



بفرض ص ص َ محور تماثل Δ أ ب حـ

، نقطة أ تنطبق على نقطة و

∴ س = ٦ √٣ جتا ٠° + ٤ جتا ٣٠° + ٤ جتا ٣٣٠°

= ٦ √٣ × ١ + ٤ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

+ ٤ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ١٠ √٣

، ص = ٦ √٣ جا ٠° + ٤ جا ٣٠° + ٤ جا ٣٣٠°

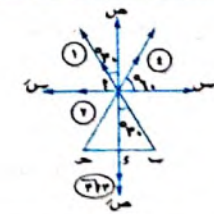
= ٦ √٣ × صفر + ٤ × $\frac{١}{٢}$ + ٤ × $\frac{-١}{٢}$ = صفر

∴ ح = ١٠ √٣ س

∴ ح = ١٠ √٣ نيوتن وتعمل فى اتجاه و س

أى فى اتجاه حـ ب

١١



بفرض ص ص َ محور تماثل Δ أ ب حـ ، نقطة أ تنطبق على نقطة و

∴ س = ٤ جتا ٦٠° + جتا ١٢٠° + ٢ جتا ١٨٠°

+ ٣ √٣ جتا ٢٧٠°

= ٤ × $\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ + ٢ × −١

+ ٣ √٣ × صفر = − $\frac{١}{٢}$

، ص = ٤ جا ٦٠° + جا ١٢٠° + ٢ جا ١٨٠°

+ ٣ √٣ جا ٢٧٠°

= ٤ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٢ × صفر

+ ٣ √٣ × −١ = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$

∴ ح = − $\frac{١}{٢}$ س − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ص

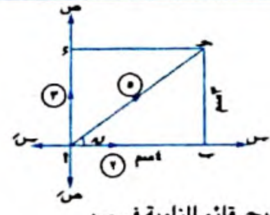
∴ ح = $\sqrt{(-\frac{١}{٢})^{٢} + (-\frac{\sqrt{٣}}{٢})^{٢}}$ = ١ نيوتن

، ظا هـ = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ × −٢ = √٣

، ∵ س < ٠ ، ص < ٠ ∴ هـ = ٢٤٠°

∴ مقدار المحصلة ١ نيوتن وتعمل فى اتجاه أ حـ

١٢



∵ Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب

∴ أ حـ = $\sqrt{(٣)^{٢} + (٤)^{٢}}$ = ٥ سم

∴ جتا هـ = $\frac{٤}{٥}$ ، جا هـ = $\frac{٣}{٥}$

∴ س = ٢ جتا ٠° + ٥ جتا هـ + ٣ جتا ٩٠°

= ٢ × ١ + ٥ × $\frac{٤}{٥}$ + ٣ × صفر = ٦

، ص = ٢ جا ٠° + ٥ جا هـ + ٣ جا ٩٠°

= ٢ × صفر + ٥ × $\frac{٣}{٥}$ + ٣ × ١ = ٦

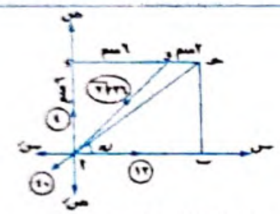
∴ ح = ٦ س + ٦ ص

∴ ح = $\sqrt{(٦)^{٢} + (٦)^{٢}}$ = ٦ √٢ ث.كجم

، ظا هـ = $\frac{٦}{٦}$ = ١ ∴ هـ = ٤٥°

∴ المحصلة مقدارها ٦ √٢ ث.كجم وتصنع زاوية قياسها ٤٥° مع أ ب

١٣



∵ Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب

∴ أ حـ = $\sqrt{٨^{٢} + ٦^{٢}}$ = ١٠ سم

∴ جا هـ = $\frac{٦}{١٠}$ = $\frac{٣}{٥}$ ، جتا هـ = $\frac{٤}{٥}$

∴ س = ١٢ جتا ٠° + ٣٦ √٢ جتا ٤٥°

+ ٤ جتا ٩٠° + ٤٠ جتا (١٨٠° + هـ)

= ١٢ × ١ + ٣٦ √٢ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٤ × ٠ + ٤٠ × $\frac{-٤}{٥}$ = ٦

، ص = ١٢ جا ٠° + ٣٦ √٢ جا ٤٥°

+ ٤ جا ٩٠° + ٤٠ جا (١٨٠° + هـ)

= ١٢ × ٠ + ٣٦ √٢ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٤ × ١ + ٤٠ × $\frac{-٣}{٥}$ = ٦

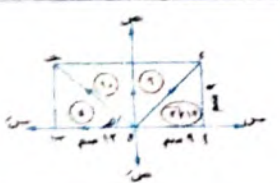
∴ ح = ٦ س + ٦ ص

∴ ح = $\sqrt{٦^{٢} + ٦^{٢}}$ = ٦ √٢ نيوتن

، ظا هـ = ١ ∴ هـ = ٤٥°

∴ مقدار المحصلة ٦ √٢ نيوتن وتصنع زاوية قياسها ٤٥° مع أ ب

١٤



∵ Δ أ ء و متساوى الساقين وقائم الزاوية فى أ

∴ ق (∠ أ ء و) = ٤٥°

، ∵ Δ و ب حـ قائم الزاوية فى ب

∴ و حـ = $\sqrt{(١٢)^{٢} + (٩)^{٢}}$ = ١٥ سم

∴ جتا هـ = $\frac{١٢}{١٥}$ = $\frac{٤}{٥}$ ، جا هـ = $\frac{٩}{١٥}$ = $\frac{٣}{٥}$

∴ س = ١٢ √٢ جتا ٤٥° + ٦ جتا ٩٠°

+ ١٠ جتا (١٨٠° − هـ) + ٤ جتا ١٨٠°

= ١٢ √٢ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٦ × صفر + ١٠ × $\frac{-٤}{٥}$

+ ٤ × −١ = صفر

، ص = ١٢ √٢ جا ٤٥° + ٦ جا ٩٠°

+ ١٠ جا (١٨٠° − هـ)

+ ٤ جا ١٨٠° = ١٢ √٢ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

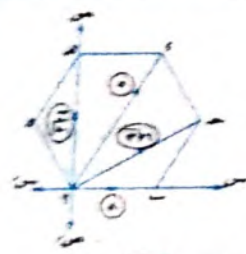
+ ٦ × ١ + ١٠ × $\frac{٣}{٥}$ + ٤ × صفر = ٢٤

∴ ح = ٢٤ ص ∴ ح = ٢٤ ث.كجم

∴ مقدار المحصلة ٢٤ ث.كجم وتعمل فى اتجاه و ص

أى فى اتجاه ب حـ

١٥



بفرض أ ب فى اتجاه و س

س = ٨ جتا ٠° + ٦ √٣ جتا ٣٠°

+ ٥ جتا ٦٠° + ٤ √٣ جتا ٩٠°

= ٨ × ١ + ٦ √٣ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٥ × $\frac{١}{٢}$ + ٤ √٣ × ٠

= $\frac{٣٩}{٢}$

، ص = ٨ جا ٠° + ٦ √٣ جا ٣٠° + ٥ جا ٦٠°
+ ٤ √٣ جا ٩٠°
= ٨ × ٠ + ٦ √٣ × ½ + ٥ × √٣/٢ + ٤ √٣ × ١
= ١٩ √٣ / ٢

∴ ح = ٣٩/٢ س + (١٩ √٣ / ٢) ص

∴ ح = √((٣٩/٢)² + (١٩ √٣ / ٢)²) = √٦٥١ نيوتن

∴ ظا هـ = (١٩/٣٩) √٣ ∴ هـ = ٩َ ٤٠°

أى أن المحصلة بين أحـ ، أء وتصنع زاوية قياسها ٩َ ٤٠° مع أب

١٦

بفرض أب فى اتجاه و س

∴ س = ٢ جتا ٠° + ٤ √٣ جتا ٣٠° + ٨ جتا ٦٠°
+ ٢ √٣ جتا ٩٠° + ٤ جتا ١٢٠°
= ٢ × ١ + ٤ √٣ × √٣/٢ + ٨ × ½ + ٢ √٣
× ٠ + ٤ × −½ = ١٠

، ص = ٢ جا ٠° + ٤ √٣ جا ٣٠° + ٨ جا ٦٠°
+ ٢ √٣ جا ٩٠° + ٤ جا ١٢٠°
= ٢ × ٠ + ٤ √٣ × ½ + ٨ × √٣/٢ + ٢ √٣
× ١ + ٤ × √٣/٢ = ١٠ √٣

∴ ح = ١٠ س + ١٠ √٣ ص

∴ ح = √((١٠)² + (١٠ √٣)²) = ٢٠ ث.كجم

، ظا هـ = ١٠ √٣ / ٢ = √٣ ∴ هـ = ٦٠°

∴ مقدار المحصلة ٢٠ ث.كجم واتجاهها يصنع زاوية قياسها ٦٠° مع أب

١٧

بفرض وأ فى اتجاه و س

∴ س = ٤ جتا ٠° + ٣ جتا ٦٠° + ٢ جتا ١٢٠°
+ ٥ جتا ١٨٠° + ٤ جتا ٢٤٠° + جتا ٣٠٠°
= ٤ × ١ + ٣ × ½ + ٢ × −½
+ ٥ × −١ + ٤ × −½ + ½ = −٢

، ص = ٤ جا ٠° + ٣ جا ٦٠° + ٢ جا ١٢٠°
+ ٥ جا ١٨٠° + ٤ جا ٢٤٠° + جا ٣٠٠°
= ٤ × صفر + ٣ × √٣/٢ + ٢ × √٣/٢
+ ٥ × صفر + ٤ × −√٣/٢ − √٣/٢ = صفر

∴ ح = −٢ س

∴ مقدار المحصلة ٢ ث.جم وتعمل فى اتجاه و سَ أى فى اتجاه وء

١٨

فى Δ أبحـ القائم الزاوية فى ب

أحـ = √((٦٠)² + (٨٠)²)
= ١٠٠ سم

∴ جا هـ = ٨٠/١٠٠ = ٤/٥

، جتا هـ = ٦٠/١٠٠ = ٣/٥

∴ س = ١٢ جتا ٠° + ١٠ جتا هـ
+ ١٥ جتا (١٨٠° − هـ) + ٨ جتا ٢٧٠°
= ١٢ × ١ + ١٠ × ٣/٥ + ١٥ × −٣/٥
+ ٨ × صفر = ٩

، ص = ١٢ جا ٠° + ١٠ جا هـ
+ ١٥ جا (١٨٠° − هـ) + ٨ جا ٢٧٠°
= ١٢ × صفر + ١٠ × ٤/٥ + ١٥ × ٤/٥
+ ٨ × −١ = ١٢

∴ ح = ٩ س + ١٢ ص

∴ ح = √((٩)² + (١٢)²) = ١٥ نيوتن

، ظا ى = ١٢/٩ = ٤/٣

، ∵ ظا ى = ظا هـ ، س > ٠ ، ص > ٠

∴ المحصلة تعمل فى اتجاه بء

١٩

∵ Δ أهـب قائم الزاوية فى ب

∴ أهـ = √((٥)² + (١٢)²) = ١٣ سم

∴ جا (د ب أ هـ) = ٥/١٣ ، جتا (د ب أ هـ) = ١٢/١٣

، ∵ أحـ قطر فى المربع أبحـء

∴ ى = ٤٥°

∴ س = ٢ × جتا ٠° + ١٣ × جتا (د ب أ هـ)
+ ٩ × جتا ٩٠° + ٤ √٢ × جتا ٢٢٥°
= ٢ × ١ + ١٣ × ١٢/١٣ + ٩ × صفر
+ ٤ √٢ × −١/√٢ = ١٠

، ص = ٤ × جا ٠° + ١٣ × جا (د ب أ هـ)
+ ٩ × جا ٩٠° + ٤ √٢ × جا ٢٢٥°
= ٤ × صفر + ١٣ × ٥/١٣ + ٩ × ١
+ ٤ √٢ × −١/√٢ = ١٠

∴ ح = ١٠ س + ١٠ ص

∴ ح = √((١٠)² + (١٠)²) = ١٠ √٢ ث.جم

، ظا هـ = ١٠/١٠ = ١

، ∵ س > ٠ ، ص > ٠

∴ المحصلة تعمل فى اتجاه أحـ

٢٠

∵ أحـ قطر فى المربع

∴ ق (د حـ أ ء) = ٤٥°

، ∵ Δ أبهـ قائم الزاوية فى ب

∴ أهـ = √((٦)² − (٣)²) = ٣ √٥ سم

∴ جا ى = ٣ / (٣ √٥) = ١/√٥ ، جتا ى = ٦ / (٣ √٥) = ٢/√٥

، فى Δ أوء القائم الزاوية فى ء

أو = √(٣² + ٦²) = ٣ √٥ سم

∴ جا ل = ٦ / (٣ √٥) = ٢/√٥ ، جتا ل = ٣ / (٣ √٥) = ١/√٥

∴ س = ٢ جتا ٠° + ١٢ √٥ جتا ى
+ ٤ √٥ جتا (٩٠° − ل) + [illegible]
+ ٦ √٢ جتا ٢٢٥° = ٣ + ٤
+ ١٢ √٥ × ٢/√٥ + ٤ √٥ × ١/√٥ + [illegible] صفر
+ ٦ √٢ × −١/√٢ = [illegible]

، ص = ٢ جا ٠° + ١٢ √٥ جا ى

+ ٤ √٥ جا (٩٠° − ى) + ٤ جا ٩٠°

+ ٦ √٢ جا ٢٢٥° = ٢ × ٠ + ١٢ √٥ × ١/√٥

+ ٤ √٥ × ٢/√٥ + ٤ × ١ + ٦ √٢ × −١/√٢ = ١٨

∴ ح = ٢٤ س + ١٨ ص

∴ ح = √((٢٤)^٢ + (١٨)^٢) = ٣٠ ث.كجم

، ظا ه = ١٨/٢٤ = ٣/٤

، ∵ س > ٠ ، ص > ٠ ∴ ه ≃ ٣٦° ٥٢َ ١٢ً

∴ المحصلة مقدارها ٣٠ ث.كجم وتصنع زاوية قياسها ٣٦° ٥٢َ ١٢ً مع أب

٢١

∵ القوى متزنة ∴ س = ٠ ، ص = ٠

∴ ٤ جتا ٠° + ٤ √٢ جتا (د أ هـ) + ق جتا ٩٠°

+ ١٠ √٢ جتا ٢٢٥° = ٠

∴ ٤ × ١ + ٤ √٢ جتا (د أ هـ) + ق × صفر

+ ١٠ √٢ × −١/√٢ = ٠

∴ ٤ + ٤ √٢ جتا (د أ هـ) − ١٠ = ٠

∴ جتا (د أ هـ) = ٦/(٤ √٢) = √٢/٢

∴ ق (د أ هـ) = ٣٠°

، ٤ جا ٠° + ٤ √٢ جا ٣٠° + ق جا ٩٠°

+ ١٠ √٢ جا ٢٢٥° = ٠

∴ ٤ × ٠ + ٤ √٢ × ١/٢ + ق × ١ + ١٠ √٢ × −١/√٢ = ٠

∴ ٢ √٢ + ق − ١٠ = ٠

∴ ق = ١٠ − ٢ √٢ = ٢ (٥ − √٢) ث.كجم

٢٢

* تعتبر القوة التي مقدارها ٥ ث.كجم تعمل في اتجاه و س

، ∵ القوى متزنة ∴ س = ص = ٠

∴ س = ٥ جتا ٠° + ٤ جتا ٦٠° + ق جتا ١٢٠°

+ ٣ جتا ١٨٠° + ك جتا ٢٤٠° + ٧ جتا ٣٠٠° = ٠

∴ ٥ × ١ + ٤ × ١/٢ + ق × −١/٢ + ٣ × −١ + ك

× −١/٢ + ٧ × ١/٢ = ٠

∴ ق + ك = ١٥ (١)

، ص = ٥ جا ٠° + ٤ جا ٦٠° + ق جا ١٢٠°

+ ٣ جا ١٨٠° + ك جا ٢٤٠° + ٧ جا ٣٠٠° = ٠

∴ ٥ × ٠ + ٤ × √٣/٢ + ق × √٣/٢ + ٣ × ٠

+ ك × −√٣/٢ + ٧ × −√٣/٢ = ٠

∴ ق − ك = ٣ (٢) بحل المعادلتين (١) ، (٢)

∴ ق = ٩ ث.كجم ، ك = ٦ ث.كجم

٢٣

∵ س = ق جتا ٠° + ٦ جتا ٩٠°

+ ٤ √٢ جتا ١٣٥°

+ ٥ √٢ جتا ٢٢٥°

+ ك جتا ٢٧٠°

= ق × ١ + ٦ × صفر

+ ٤ √٢ × −١/√٢ + ٥ √٢ × −١/√٢

+ ك × صفر = ق − ٩

، ص = ق جا ٠° + ٦ جا ٩٠°

+ ٤ √٢ جا ١٣٥° + ٥ √٢ جا ٢٢٥°

+ ك جا ٢٧٠°

= ق × صفر + ٦ × ١ + ٤ √٢ × ١/√٢

+ ٥ √٢ × −١/√٢ + ك × −١ = ٥ − ك

∴ ح = (ق − ٩) س + (٥ − ك) ص

، ∵ محصلة القوى = ٢ نيوتن في اتجاه الشمال

∴ (ق − ٩) = صفر ∴ ق = ٩ نيوتن

، ٥ − ك = ٢ ∴ ك = ٣ نيوتن

٢٤

بفرض أن الزاوية القطبية للقوة ق قياسها ه

∴ س = ق جتا ه + ٤ √٣ جتا ٩٠°

+ ١٢ √٣ جتا ١٥٠° + ٣٦ جتا ٣٠٠°

= ق جتا ه + ٤ √٣ × صفر

+ ١٢ √٣ × −√٣/٢ + ٣٦ × ١/٢ = ق جتا ه

، ص = ق جا ه + ٤ √٣ جا ٩٠°

+ ١٢ √٣ جا ١٥٠° + ٣٦ جا ٣٠٠°

= ق جا ه + ٤ √٣ × ١ + ١٢ √٣ × ١/٢

+ ٣٦ × −√٣/٢ = ق جا ه − ٨ √٣

∴ ح = ق جتا ه س + (ق جا ه − ٨ √٣) ص

، ∵ المحصلة = ٨ ث.جم وتعمل في اتجاه الشرق

∴ ق جتا ه = ٨ (١) ، ق جا ه = ٨ √٣ (٢)

وبقسمة (٢) على (١) : ∴ ظا ه = ٨ √٣ / ٨ = √٣

، ∵ جتا ه > ٠ ، جا ه > ٠

∴ ه تقع في الربع الأول ∴ ه = ٦٠°

وبالتعويض في (١) : ∴ ق جتا ٦٠° = ٨

∴ ق = ١٦ ث.جم

٢٥

∵ س = ق جتا ٠° + ٨ جتا ٦٠°

+ ك جتا ٩٠°

+ ٥ جتا ١٨٠°

+ ٨ √٣ جتا ٢٧٠°

= ق × ١ + ٨ × ١/٢ + ك × صفر

+ ٥ × −١ + ٨ √٣ × صفر = ق − ١

، ص = ق جا ٠° + ٨ جا ٦٠° + ك جا ٩٠°

+ ٥ جا ١٨٠° + ٨ √٣ جا ٢٧٠° = ق × صفر

+ ٨ × √٣/٢ + ك × ١ + ٥ × صفر

+ ٨ √٣ × −١ = ك − ٤ √٣

∴ ح = (ق − ١) س + (ك − ٤ √٣) ص (١)

، ∵ ح = ٤ نيوتن في اتجاه ٦٠° شمال الشرق

∴ ح = ٤ جتا ٦٠° س + ٤ جا ٦٠° ص

= ٢ س + ٢ √٣ ص (٢)

من (١) ، (٢) : ∵ ق − ١ = ٢

∴ ق = ٣ نيوتن ، ك − ٤ √٣ = ٢ √٣

∴ ك = ٦ √٣ نيوتن

٢٦

∵ س = ٢٥ جتا ى + ق جتا ٩٠° + ١٠$\sqrt{٢}$ جتا ١٣٥°

+ ٣٥ جتا ١٨٠° = ٢٥ × $\frac{٣}{٥}$ + ق × ٠ + ١٠$\sqrt{٢}$

× $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ + ٣٥ × −١ = ١٥ − ١٠ − ٣٥ = −٣٠

، ص = ٢٥ جا ى + ق جا ٩٠° + ١٠$\sqrt{٢}$ جا ١٣٥°

+ ٣٥ جا ١٨٠° = ٢٥ × $\frac{٤}{٥}$ + ق × ١ + ١٠$\sqrt{٢}$

× $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = ٢٠ + ق + ١٠ = ٣٠ + ق

، ∵ ح٢ = س٢ + ص٢

∴ (٥٠)٢ = (−٣٠)٢ + (٣٠ + ق)٢

∴ ٢٥٠٠ = ٩٠٠ + ٩٠٠ + ٦٠ ق + ق٢

∴ ٢٥٠٠ = ١٨٠٠ + ٦٠ ق + ق٢

∴ ق٢ + ٦٠ ق − ٧٠٠ = ٠

∴ (ق + ٧٠) (ق − ١٠) = ٠

∴ ق = ١٠ ثقل جرام

٢٧

① ∵ س = ق جتا ٠° + ك جتا ١٢٠°

+ ٥$\sqrt{٣}$ جتا ٢١٠° + ٧$\sqrt{٣}$ جتا ٣٣٠° = صفر

∴ ق × ١ + ك × −$\frac{١}{٢}$ + ٥$\sqrt{٣}$ × −$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

+ ٧$\sqrt{٣}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = صفر

∴ ق − $\frac{١}{٢}$ك + ٣ = ٠ (١)

، ص = ق جا ٠° + ك جا ١٢٠°

+ ٥$\sqrt{٣}$ جا ٢١٠° + ٧$\sqrt{٣}$ جا ٣٣٠° = صفر

∴ ق × ٠ + ك × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٥$\sqrt{٣}$ × −$\frac{١}{٢}$

+ ٧$\sqrt{٣}$ × −$\frac{١}{٢}$ = صفر

∴ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ك = ٦$\sqrt{٣}$ ∴ ك = ١٢ نيوتن

ومن (١) : ق = ٣ نيوتن.

② ∵ س = ٦$\sqrt{٣}$ جتا ٠° + ق جتا ١٥٠°

+ ك جتا ٢١٠° = ٠

∴ ٦$\sqrt{٣}$ × ١ + ق × −$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ك × −$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

= صفر

∴ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ق + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ك = ٦$\sqrt{٣}$

∴ ق + ك = ١٢ (١)

، ص = ٦$\sqrt{٣}$ جا ٠°

+ ق جا ١٥٠°

+ ك جا ٢١٠° = ٠

∴ ٦$\sqrt{٣}$ × ٠ + ق

× $\frac{١}{٢}$ + ك × −$\frac{١}{٢}$ = ٠

∴ $\frac{١}{٢}$ ق − $\frac{١}{٢}$ ك = ٠

∴ ق − ك = ٠ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ ق = ٦ ك = ٦

③ ∵ س = ق جتا ٠° + ٤$\sqrt{٣}$ جتا ٣٠°

+ ٢$\sqrt{٣}$ جتا ٩٠°

+ ك جتا ١٢٠°

+ ١٢ جتا ٢٤٠° = ٠

∴ ق × ١ + ٤$\sqrt{٣}$

× $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٢$\sqrt{٣}$ × ٠

+ ك × −$\frac{١}{٢}$ + ١٢ × −$\frac{١}{٢}$ = ٠

∴ ق − $\frac{١}{٢}$ ك = ٠ (١)

، ص = ق جا ٠° + ٤$\sqrt{٣}$ جا ٣٠° + ٢$\sqrt{٣}$ جا ٩٠°

+ ك جا ١٢٠° + ١٢ جا ٢٤٠° = ٠

∴ ق × ٠ + ٤$\sqrt{٣}$ × $\frac{١}{٢}$ + ٢$\sqrt{٣}$ × ١

+ ك × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ١٢ × −$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ك = ٢$\sqrt{٣}$

∴ ك = ٤ ومن (١) : ∴ ق = ٢

٢٨

∵ س = ق جتا ٠° + ٣$\sqrt{٢}$ جتا ٤٥°

+ ٢$\sqrt{٣}$ جتا ١٥٠° + $\sqrt{٣}$ جتا ٢٧٠°

= ق × ١ + ٣$\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

+ ٢$\sqrt{٣}$ × $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ + $\sqrt{٣}$ × صفر = ق

، ص = ق جا ٠° + ٣$\sqrt{٢}$ جا ٤٥°

+ ٢$\sqrt{٣}$ جا ١٥٠° + $\sqrt{٣}$ جا ٢٧٠°

= ق × صفر + ٣$\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٢$\sqrt{٣}$ × $\frac{١}{٢}$

+ $\sqrt{٣}$ × −١ = ٣

∴ ح⃗ = ق س⃗ + ٣ ص⃗

∴ (٣$\sqrt{٢}$)٢ = ق٢ + ٣٢ ∴ ق٢ = ٩

∴ ق = ٣ نيوتن ∴ ح⃗ = ٣ س⃗ + ٣ ص⃗

، ظا هـ = $\frac{٣}{٣}$ = ١ ∴ هـ = ٤٥°

∴ الزاوية بين خط عمل المحصلة والقوة الأولى قياسها ٤٥°

٢٩

∵ س = ٤ جتا ٠° + ٢$\sqrt{٣}$ جتا ٣٠°

+ ق جتا ٦٠° + ٢$\sqrt{٣}$ جتا ٩٠°

+ ك جتا ١٢٠°

= ٤ × ١ + ٢$\sqrt{٣}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ق × $\frac{١}{٢}$

+ ٢$\sqrt{٣}$ × صفر + ك × −$\frac{١}{٢}$

= ٧ + $\frac{١}{٢}$ ق − $\frac{١}{٢}$ ك

، ص = ٤ جا ٠° + ٢$\sqrt{٣}$ جا ٣٠° + ق جا ٦٠°

+ ٢$\sqrt{٣}$ جا ٩٠° + ك جا ١٢٠°

= ٤ × صفر + ٢$\sqrt{٣}$ × $\frac{١}{٢}$

+ ق × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٢$\sqrt{٣}$ × ١ + ك × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

= ٣$\sqrt{٣}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ق + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ك

∴ ح⃗ = (٧ + $\frac{١}{٢}$ ق − $\frac{١}{٢}$ ك) س⃗

+ (٣$\sqrt{٣}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ق + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ك) ص⃗ (١)

، ∵ المحصلة تساوي ٢٠ ث.كجم في اتجاه أ ء⃗

∴ ح⃗ = ٢٠ جتا ٦٠° س⃗ + ٢٠ جا ٦٠° ص⃗

= ١٠ س⃗ + ١٠$\sqrt{٣}$ ص⃗ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ ٧ + $\frac{١}{٢}$ ق − $\frac{١}{٢}$ ك = ١٠

∴ ق − ك = ٦ (٣)

، ٣$\sqrt{٣}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ق + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ك = ١٠$\sqrt{٣}$

∴ ق + ك = ١٤ (٤)

، بجمع (٣) ، (٤) : ∴ ٢ ق = ٢٠

∴ ق = ١٠ ث.كجم ومنها ك = ٤ ث.كجم

٣٠

∵ هـ قياس زاوية حادة ، جا هـ = $\frac{٤}{٥}$

∴ جتا هـ = $\frac{٣}{٥}$

∴ س = ٤ ق جتا (٩٠° − هـ) + ٢ ك جتا (٩٠° + هـ)

+ ٢ ق جتا (١٨٠° + هـ) + ك جتا (٣٦٠° − هـ)

= ٤ ن ما هـ − ٢ ك ما هـ

− ٢ ن حتا هـ + ك حتا هـ

$= ٤ ن \times \frac{٤}{٥} - ٢ ك \times \frac{٤}{٥} - ٢ ن \times \frac{٣}{٥}$

$+ ك \times \frac{٣}{٥} = ٢ ن - ك$

، ص = ٤ ن ما (٩٠° − هـ) + ٢ ك ما (٩٠° + هـ)

+ ٢ ن ما (١٨٠° + هـ) + ك ما (٣٦٠° − هـ)

= ٤ ن حتا هـ + ٢ ك حتا هـ − ٢ ن ما هـ

− ك ما هـ $= ٤ ن \times \frac{٣}{٥} + ٢ ك \times \frac{٣}{٥}$

$- ٢ ن \times \frac{٤}{٥} - ك \times \frac{٤}{٥} = \frac{٤}{٥} ن + \frac{٢}{٥} ك$

$\therefore \overleftarrow{ح} = (٢ ن - ك) \overleftarrow{س} + \left(\frac{٤}{٥} ن + \frac{٢}{٥} ك\right) \overleftarrow{ص}$ (١)

، $\because \overleftarrow{ح} = ٨\sqrt{٢}$ حتا ١٣٥° $\overleftarrow{س} + ٨\sqrt{٢}$ ما ١٣٥° $\overleftarrow{ص}$

$= -٨ \overleftarrow{س} + ٨ \overleftarrow{ص}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ ٢ ن − ك = −٨ (٣)

، $\frac{٤}{٥} ن + \frac{٢}{٥} ك = ٨$

أى ٢ ن + ك = ٢٠ (٤)

بجمع (٣) ، (٤) : ∴ ٤ ن = ١٢

∴ ن = ٣ نيوتن ومن (٣) : ∴ ك = ١٤ نيوتن

٣١

$\because \overleftarrow{ح} = (٥ + أ - ١٤) \overleftarrow{س} + (٣ + ٦ + ب) \overleftarrow{ص}$

$= (أ - ٩) \overleftarrow{س} + (٩ + ب) \overleftarrow{ص}$ (١)

، ∵ ح = $(١٠\sqrt{٢}$ ، ١٣٥°)

$\therefore \overleftarrow{ح} = ١٠\sqrt{٢}$ حتا ١٣٥° $\overleftarrow{س}$

$+ ١٠\sqrt{٢}$ ما ١٣٥° $\overleftarrow{ص}$

$= -١٠ \overleftarrow{س} + ١٠ \overleftarrow{ص}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ أ − ٩ = −١٠ ∴ أ = −١

، ٩ + ب = ١٠ ∴ ب = ١

إجابات تمارين 4

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (ب) (٢) (ب) (٣) (ب) (٤) (جـ) (٥) (جـ)

(٦) (جـ) (٧) (ب) (٨) (جـ) (٩) (جـ) (١٠) (د)

(١١) (جـ) (١٢) (أ) (١٣) (جـ) (١٤) (ب) (١٥) (ب)

(١٦) (أ) (١٧) (ب) (١٨) (أ) (١٩) (د) (٢٠) (د)

(٢١) (د) (٢٢) (د) (٢٣) (ب) (٢٤) (جـ) (٢٥) (أ)

(٢٦) (جـ) (٢٧) (د) (٢٨) (ب) (٢٩) (أ) (٣٠) (ب)

(٣١) (ب) (٣٢) (د) (٣٣) (أ) (٣٤) (ب) (٣٥) (جـ)

(٣٦) (ب)

ثانياً الأسئلة المقالية

١

∵ القوى تمثل بأضلاع مثلث مأخوذة فى اتجاه دورى واحد

∴ القوى متزنة

وبتطبيق قاعدة مثلث القوى :

$\therefore \frac{ق_١}{٣} = \frac{ق_٢}{٤} = \frac{٧٥}{٥}$ ∴ $ق_١ = \frac{٣ \times ٧٥}{٥} = ٤٥$ نيوتن

، $ق_٢ = \frac{٤ \times ٧٥}{٥} = ٦٠$ نيوتن

٢

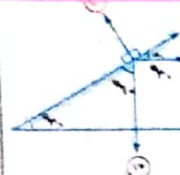
بتطبيق قاعدة لامى :

$\frac{٦٠}{ما ٩٠°} = \frac{ك}{ما ١٢٠°} = \frac{ن}{ما ١٥٠°}$

∴ ن = ٣٠ نيوتن.

، ك = $٣٠\sqrt{٣}$ نيوتن.

٣



بتطبيق قاعدة لامى :

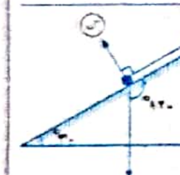
$\frac{ن}{ما ١٥٠°} = \frac{ر}{ما ٩٠°} = \frac{١٢}{ما ١٢٠°}$

$\therefore \frac{ن}{\frac{١}{٢}} = \frac{ر}{١} = \frac{١٢}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}$

$\therefore ن = \frac{١٢ \times \frac{١}{٢}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} = ٤\sqrt{٣}$ ث كجم

، $ر = \frac{١٢}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} = ٨\sqrt{٣}$ ث كجم

٤



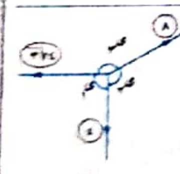
بتطبيق قاعدة لامى :

$\frac{٣٦}{ما ١٥٠°} = \frac{و}{ما ٩٠°} = \frac{ر}{ما ١٢٠°}$

$\therefore و = \frac{٣٦ ما ٩٠°}{ما ١٥٠°} = ٧٢$ نيوتن

، $ر = \frac{٣٦ ما ١٢٠°}{ما ١٥٠°} = ٣٦\sqrt{٣}$ نيوتن

٥



∵ القوى الثلاثة متزنة

∴ محصلة القوتين $\overleftarrow{ق_٢}$

، $\overleftarrow{ق_٣}$ تساوى فى المقدار $ق_١$

$\therefore (٨)^٢ = (٤\sqrt{٣})^٢ + (٤)^٢ + ٢ \times ٤\sqrt{٣} \times ٤$ حتا $ى_١$

$\therefore ٦٤ = ٦٤ + ٣٢\sqrt{٣}$ حتا $ى_١$

∴ حتا $ى_١$ = صفر ∴ $ى_١$ = ٩٠°

، محصلة القوتين $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ تساوى فى المقدار $ق_٣$

$\therefore (٤\sqrt{٣})^٢ = (٨)^٢ + (٤)^٢ + ٢ \times ٨ \times ٤$ حتا $ى_٢$

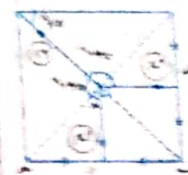
∴ ٤٨ = ٨٠ + ٦٤ حتا $ى_٢$

∴ حتا $ى_٢ = -\frac{١}{٢}$ ∴ $ى_٢$ = ١٢٠°

∴ $ى_٣$ = ٣٦٠° − (٩٠° + ١٢٠°) = ١٥٠°

∴ قياسات الزوايا هى ٩٠° ، ١٢٠° ، ١٥٠°

٦



من هندسة الشكل :

∴ ق(∠ هـ م د) = ٩٠°

، ق(∠ د م هـ) = ق(∠ د م و) = ١٣٥°

وبتطبيق قاعدة لامى

$\therefore \frac{ش_١}{ما ١٣٥°} = \frac{ش_٢}{ما ١٣٥°} = \frac{٤٢}{ما ٩٠°}$

$\therefore \frac{ش_١}{\frac{١}{\sqrt{٢}}} = \frac{ش_٢}{\frac{١}{\sqrt{٢}}} = \frac{٤٢}{١}$

$\therefore ش_١ = ش_٢ = ٤٢ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = ٢١\sqrt{٢}$ ث جم

٧

من هندسة الشكل

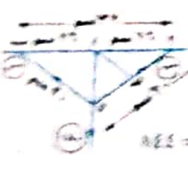
، وبتطبيق قاعدة لامى

$\therefore \frac{ش_١}{ما ١٣٠°} = \frac{ش_٢}{ما ١٢٠°} = \frac{١٠}{ما ١١٠°}$

$\therefore ش_١ = \frac{١٠ \times ما ١٣٠°}{ما ١١٠°} = ٨,١٥$ نيوتن

، $ش_٢ = \frac{١٠ \times ما ١٢٠°}{ما ١١٠°} = ٩,٢١٦$ نيوتن

٨



من هندسة الشكل :

$\overline{و د} \perp \overline{أ ب}$ ، و منتصف $\overline{أ ب}$

$\therefore (و د)^٢ = (٢٠)^٢ - (١٦)^٢ = ١٤٤$

∴ و د = ١٢ سم

، ∵ د منتصف $\overline{أ ب}$ ، برسم $\overline{د هـ} \parallel \overline{ب د}$

∴ هـ منتصف $\overline{أ و}$ ، د هـ = $\frac{١}{٢}$ د ب

∴ هـ و = ١٠ سم ، د هـ = ١٠ سم

∴ △ د و هـ هو مثلث القوى

$\therefore \frac{١٠}{د و} = \frac{ش_١}{و هـ} = \frac{ش_٢}{هـ د}$ ∴ $\frac{١٠}{١٢} = \frac{ش_١}{١٠} = \frac{ش_٢}{١٠}$

∴ $ش_١ = ش_٢ = \frac{١٠ \times ١٠}{١٢}$ = ٨,٣ ث كجم

9

بفرض أن قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى = هـ

$\therefore \text{حا هـ} = \frac{1}{2}$

$\therefore \text{هـ} = 30^\circ$

وبتطبيق قاعدة لامى :

$\therefore \frac{\text{ق}}{\text{حا}\,150^\circ} = \frac{\text{ر}}{\text{حا}\,150^\circ} = \frac{15}{\text{حا}\,60^\circ}$

$\therefore \frac{\text{ق}}{\frac{1}{2}} = \frac{\text{ر}}{\frac{1}{2}} = \frac{15}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\therefore \text{ق} = \text{ر} = \frac{15 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 5\sqrt{3}$ ث.كجم

10

بفرض أن قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى = هـ

، $\because \text{حتا هـ} = \frac{1}{2} \quad \therefore \text{هـ} = 60^\circ$

$\therefore \frac{\text{ق}}{\text{حا}\,120^\circ} = \frac{\text{ر}}{\text{حا}\,120^\circ} = \frac{\text{و}}{\text{حا}\,120^\circ}$

$\therefore \text{ق} = \text{ر} = \text{و}$

11

$\because (60)^2 + (80)^2 = (100)^2$

$\therefore \Delta$ أ حـ ب قائم الزاوية فى حـ

، من قاعدة لامى : $\therefore \frac{200}{\text{حا}\,90^\circ} = \frac{\text{ش}_1}{\text{حا هـ}_1} = \frac{\text{ش}_2}{\text{حا هـ}_2}$

، $\because \text{حا هـ}_1 = \frac{\text{ب حـ}}{\text{أ ب}} = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$

، $\text{حا هـ}_2 = \frac{\text{أ حـ}}{\text{أ ب}} = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$

$\therefore \frac{200}{1} = \frac{\text{ش}_1}{\frac{4}{5}} = \frac{\text{ش}_2}{\frac{3}{5}}$

$\therefore \text{ش}_1 = 200 \times \frac{4}{5} = 160$ ث.جم

، $\text{ش}_2 = 200 \times \frac{3}{5} = 120$ ث.جم

12

$\text{أ ب} = \sqrt{(50)^2 + (120)^2} = 130$ سم

، من قاعدة لامى : $\therefore \frac{6.5}{\text{حا}\,90^\circ} = \frac{\text{ش}_1}{\text{حا هـ}_1} = \frac{\text{ش}_2}{\text{حا هـ}_2}$

، $\because \text{حا هـ}_1 = \frac{\text{ب حـ}}{\text{أ ب}} = \frac{120}{130} = \frac{12}{13}$

، $\text{حا هـ}_2 = \frac{\text{أ حـ}}{\text{أ ب}} = \frac{50}{130} = \frac{5}{13}$

$\therefore \frac{6.5}{1} = \frac{\text{ش}_1}{\frac{12}{13}} = \frac{\text{ش}_2}{\frac{5}{13}}$

$\therefore \text{ش}_1 = 6.5 \times \frac{12}{13} = 6$ نيوتن

، $\text{ش}_2 = 6.5 \times \frac{5}{13} = 2.5$ نيوتن

13

بفرض أن زاويتى ميل الخطين على الرأسى قياساهما هـ_1 ، هـ_2

ومن قاعدة لامى : $\therefore \frac{50}{\text{حا}\,90^\circ} = \frac{25}{\text{حا هـ}_1} = \frac{25\sqrt{3}}{\text{حا هـ}_2}$

$\therefore \text{حا هـ}_1 = \frac{25 \times \text{حا}\,90^\circ}{50} = \frac{1}{2} \qquad \therefore \text{هـ}_1 = 30^\circ$

، $\text{حا هـ}_2 = \frac{25\sqrt{3} \times \text{حا}\,90^\circ}{50} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \text{هـ}_2 = 60^\circ$

$\therefore$ زاويتا ميل الخطين على الرأسى قياساهما 30° ، 60°

14

من هندسة الشكل وباستخدام قاعدة لامى :

$\therefore \frac{200}{\text{حا}\,120^\circ} = \frac{\text{ق}}{\text{حا}\,150^\circ} = \frac{\text{ش}}{\text{حا}\,90^\circ}$

$\therefore \frac{200}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\text{ق}}{\frac{1}{2}} = \frac{\text{ش}}{1}$

$\therefore \text{ق} = \frac{200 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{200\sqrt{3}}{3}$ ث.جم

، $\text{ش} = \frac{200 \times 1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{400\sqrt{3}}{3}$ ث.جم

15

من قاعدة لامى :

$\therefore \frac{60}{\text{حا}(90^\circ + \text{هـ})} = \frac{\text{ق}}{\text{حا}(180^\circ - \text{هـ})} = \frac{\text{ش}}{\text{حا}\,90^\circ}$

$\therefore \frac{60}{\text{حتا هـ}} = \frac{\text{ق}}{\text{حا هـ}} = \frac{\text{ش}}{1} \qquad \therefore \frac{60}{\frac{4}{5}} = \frac{\text{ق}}{\frac{3}{5}} = \frac{\text{ش}}{1}$

$\therefore \text{ق} = \frac{60 \times \frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = 45$ ثقل جم

، $\text{ش} = \frac{60}{\frac{4}{5}} = 75$ ثقل جم

16

بتطبيق قاعدة لامى

$\frac{\text{ق}}{\text{حا}\,150^\circ} = \frac{\text{ش}}{\text{حا}\,120^\circ} = \frac{16}{\text{حا}\,90^\circ}$

$\therefore \frac{\text{ق}}{\frac{1}{2}} = \frac{\text{ش}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 16$

$\therefore \text{ق} = 8$ نيوتن ، $\text{ش} = 8\sqrt{3}$ نيوتن

17

من هندسة الشكل وباستخدام قاعدة لامى :

$\therefore \frac{600}{\text{حا}\,90^\circ} = \frac{\text{ق}}{\text{حا}\,150^\circ} = \frac{\text{ش}}{\text{حا}\,120^\circ}$

$\therefore \frac{600}{1} = \frac{\text{ق}}{\frac{1}{2}} = \frac{\text{ش}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\therefore \text{ق} = 300$ ث.جم ، $\text{ش} = 300\sqrt{3}$ ث.جم

18

① $\because \text{أ حـ} = \sqrt{(170)^2 - (80)^2}$

$= 150$ سم

، $\because \Delta$ أ حـ ب هو مثلث القوى

$\therefore \frac{\text{ق}}{150} = \frac{\text{ش}}{170} = \frac{34}{80}$

$\therefore \text{ق} = \frac{34 \times 150}{80} = 63.75$ ثقل جم

، $\text{ش} = \frac{34 \times 170}{80} = 72.25$ ثقل جم

② من قاعدة لامى

$\therefore \frac{34}{\text{حا}\,90^\circ} = \frac{\text{ق}}{\text{حا هـ}} = \frac{\text{ش}}{\text{حا}(90^\circ - \text{هـ})}$

$\therefore \frac{34}{1} = \frac{\text{ق}}{\text{حا هـ}} = \frac{\text{ش}}{\text{حتا هـ}}$

$\therefore \frac{34}{1} = \frac{\text{ق}}{\frac{150}{170}} = \frac{\text{ش}}{\frac{80}{170}}$

$\therefore \text{ق} = 34 \times \frac{150}{170} = 30$ ثقل جم

، $\text{ش} = 34 \times \frac{80}{170} = 16$ ثقل جم

19

بتطبيق قاعدة لامى

$\frac{\text{ر}}{\text{حا}(90^\circ + \text{هـ})} = \frac{2\sqrt{3}}{\text{حا}(180^\circ - \text{هـ})} = \frac{6}{\text{حا}(90^\circ - \text{هـ})}$

$\therefore \frac{\text{ر}}{\text{حا}\,2\text{هـ}} = \frac{2\sqrt{3}}{\text{حا هـ}} = \frac{6}{\text{حتا هـ}}$

، ∵ $\frac{٢\sqrt{٣}}{\text{جا هـ}} = \frac{٦}{\text{جتا هـ}}$

∴ $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}} = \frac{٢\sqrt{٣}}{٦} = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$

∴ ظا هـ $= \frac{\sqrt{٣}}{٣}$

∴ هـ = ٣٠°

∴ $\frac{\text{ر}}{\text{جتا } ٦٠°} = \frac{٢\sqrt{٣}}{\text{جا } ٣٠°}$ ∴ ر = $٢\sqrt{٣}$ نيوتن

٢٠

بفرض أن زاوية ميل المستوى على الأفقي قياسها هـ

∴ $\frac{\text{و}}{\text{جا } ٩٠°} = \frac{\frac{١}{٢}\text{ و}}{\text{جا}(١٨٠° - \text{هـ})}$

$= \frac{\text{ر}}{\text{جا}(٩٠° + \text{هـ})}$

∴ $\frac{\text{و}}{١} = \frac{\frac{١}{٢}\text{ و}}{\text{جا هـ}} = \frac{\text{ر}}{\text{جتا هـ}}$ ∴ جا هـ $= \frac{\frac{١}{٢}\text{ و}}{\text{و}} = \frac{١}{٢}$

∴ هـ = ٣٠° ∴ $\frac{\text{و}}{١} = \frac{\text{ر}}{\text{جتا } ٣٠°}$

∴ ر = و جتا ٣٠° = و × $\frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ و

٢١

نفرض أن الخيط يصنع زاوية قياسها هـ مع اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى

∴ $\frac{٢\sqrt{٣}}{\text{جا } ١٥٠°} = \frac{٦}{\text{جا}(٩٠° - \text{هـ})}$

$= \frac{\text{ر}}{\text{جا}(١٢٠° + \text{هـ})}$

∴ $\frac{٢\sqrt{٣}}{\frac{١}{٢}} = \frac{٦}{\text{جتا هـ}} = \frac{\text{ر}}{\text{جا}(١٢٠° + \text{هـ})}$

∴ جتا هـ $= \frac{٦ \times \frac{١}{٢}}{٢\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ هـ = ٣٠°

∴ قياس الزاوية التي يصنعها الخيط مع المستوى = ٣٠°

، ∵ $\frac{٢\sqrt{٣}}{\frac{١}{٢}} = \frac{\text{ر}}{\text{جا}(١٢٠° + ٣٠°)}$

∴ ر $= \frac{٢\sqrt{٣} \times \text{جا } ١٥٠°}{\frac{١}{٢}} = \frac{٢\sqrt{٣} \times \frac{١}{٢}}{\frac{١}{٢}}$

$= ٢\sqrt{٣}$ ث.كجم

٢٢

بفرض أن زاوية ميل المستوى على الأفقي قياسها = هـ

∴ ظا هـ $= \frac{١}{\sqrt{٣}}$

∴ هـ = ٣٠°

∴ $\frac{\text{ق}}{\text{جا } ١٥٠°} = \frac{\text{ر}}{\text{جا } ١٥٠°} = \frac{٣٠٠}{\text{جا } ٦٠°}$

∴ $\frac{\text{ق}}{\frac{١}{٢}} = \frac{\text{ر}}{\frac{١}{٢}} = \frac{٣٠٠}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}$

∴ ق = ر $= \frac{٣٠٠ \times \frac{١}{٢}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} = ١٠٠\sqrt{٣}$ ث.جم

٢٣

بتطبيق قاعدة لامي :

$\frac{٨٠٠}{\text{جا}(٩٠° + \text{هـ})} = \frac{\text{ر}}{\text{جا } ٩٠°} = \frac{\text{ق}}{\text{جا}(١٨٠° - \text{هـ})}$

$\frac{٨٠٠}{\text{جتا هـ}} = \frac{\text{ر}}{١} = \frac{\text{ق}}{\text{جا هـ}}$

∴ ر = ٨٠٠ ÷ جتا هـ = ٨٠٠ × $\frac{١٠}{٨}$ = ١٠٠٠ ث.جم

، ق = ٨٠٠ × جا هـ ÷ جتا هـ = ٨٠٠ × $\frac{٦}{٨}$ = ٦٠٠ ث.جم

٢٤

∵ الحلقة ملساء

∴ الشد في فرعي الخيط متساوي

، برسم $\overleftrightarrow{\text{ءو}} // \overline{\text{ب حـ}}$

ويقطع $\overline{\text{أحـ}}$ في و ∴ و منتصف $\overline{\text{أحـ}}$

، Δ حـ ء و هو مثلث القوى

∴ $\frac{١٥٠}{١٢} = \frac{\text{ش}}{٧٫٥} = \frac{\text{ش}}{٧٫٥}$

∴ ش $= \frac{١٥٠ \times ٧٫٥}{١٢} = ٩٣٫٧٥$ ث.جم

٢٥

① ∵ أب $= \sqrt{(١٣٠)^٢ - (٥٠)^٢} = ١٢٠$ سم

، من هندسة الشكل نجد أن :

Δ أ ب حـ هو مثلث القوى

∴ $\frac{\text{ش}}{١٣٠} = \frac{\text{ق}}{٥٠} = \frac{٢٤}{١٢٠}$

∴ ش $= \frac{١٣٠ \times ٢٤}{١٢٠} = ٢٦$ نيوتن

، ق $= \frac{٥٠ \times ٢٤}{١٢٠} = ١٠$ نيوتن

② باستخدام قاعدة لامي :

∴ $\frac{\text{ش}}{\text{جا } ٩٠°} = \frac{\text{ق}}{\text{جا } ١٥٠°}$

$= \frac{٢٤}{\text{جا } ١٢٠°}$

∴ $\frac{\text{ش}}{١} = \frac{\text{ق}}{\frac{١}{٢}} = \frac{٢٤}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}$

∴ ش $= \frac{٢٤}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} = ١٦\sqrt{٣}$ نيوتن

، ق $= \frac{٢٤ \times \frac{١}{٢}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} = ٨\sqrt{٣}$ نيوتن

٢٦

أحـ $= \sqrt{(٢٥)^٢ - (٧)^٢} = ٢٤$ سم

∴ Δ أ ب حـ هو مثلث القوى

∴ $\frac{٧٢}{\text{أحـ}} = \frac{\text{ش}_٢}{\text{حـ ب}} = \frac{\text{ش}_١}{\text{أ ب}}$

∴ $\frac{٧٢}{٢٤} = \frac{\text{ش}_٢}{٧} = \frac{\text{ش}_١}{٢٥}$

∴ $\text{ش}_٢ = \frac{٧٢ \times ٧}{٢٤} = ٢١$ ثقل جم

، $\text{ش}_١ = \frac{٧٢ \times ٢٥}{٢٤} = ٧٥$ ثقل جم

∴ قوة الشد في الخيط الأفقي = ٢١ ث.جم

، قوة الشد في كل من جزأي الخيط الأول هما ٧٢ ، ٧٥ ث.جم

٢٧

باستخدام قاعدة لامي :

∴ $\frac{١٠٠}{\text{جا } ١٥٠°} = \frac{\text{ش}}{\text{جا}(١٨٠° - \text{هـ})}$

$= \frac{٢٠٠}{\text{جا}(٣٠° + \text{هـ})}$

∴ $\frac{١٠٠}{\frac{١}{٢}} = \frac{\text{ش}}{\text{جا هـ}} = \frac{٢٠٠}{\text{جا}(٣٠° - \text{هـ})}$

∴ جا(٣٠° + هـ) $= \frac{\frac{١}{٢} \times ٢٠٠}{١٠٠} = ١$

∴ ٣٠° + هـ = ٩٠° ∴ هـ = ٦٠°

∴ ش $= \frac{١٠٠ \times \text{جا } ٦٠°}{\frac{١}{٢}} = ١٠٠\sqrt{٣}$ ث.جم

٢٨

بتطبيق قاعدة لامي :

$\frac{\text{ش}_١}{\text{جا } ١٥٠°} = \frac{٢٠٠}{\text{جا } ١٠٠°}$

$= \frac{\text{ش}_٢}{\text{جا } ١١٠°}$

∴ $\text{ش}_١ = \frac{٢٠٠ \text{ جا } ١٥٠°}{\text{جا } ١٠٠°} \simeq ١٠٢$ نيوتن

، $\text{ش}_٢ = \frac{٢٠٠ \text{ جا } ١١٠°}{\text{جا } ١٠٠°} \simeq ١٩١$ نيوتن

٢٩

من هندسة الشكل وبتطبيق قاعدة لامى :

$\therefore \frac{ش}{\text{جا } ١١٥^\circ} = \frac{و}{\text{جا } ١٤٠^\circ} = \frac{٨٠}{\text{جا } ١٠٥^\circ}$

∴ ش ≃ ٧٥ نيوتن ، و ≃ ٥٣ نيوتن.

٣٠

ش١ = ٢٠ $\sqrt{٣}$ ث.كجم

، ش٢ = ٢٠ ث.كجم

وبتطبيق قاعدة لامى :

$\therefore \frac{٢٠}{\text{جا } ١٥٠^\circ} = \frac{٢٠\sqrt{٣}}{\text{جا }(٩٠^\circ + هـ)} = \frac{ك}{\text{جا }(١٢٠^\circ - هـ)}$

$\therefore \text{جتا } هـ = \frac{٢٠\sqrt{٣} \times \text{جا } ١٥٠^\circ}{٢٠} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\therefore هـ = ٣٠^\circ \text{ ، } ك = \frac{٢٠ \times \text{جا } ٩٠^\circ}{\text{جا } ١٥٠^\circ} = ٤٠$ ث.كجم

ثالثًا مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

١

ش٢ = ٣٠٠ ث.جم

وباستخدام قاعدة لامى :

$\therefore \frac{ش_١}{\text{جا } ٩٠^\circ} = \frac{٣٠٠}{\text{جا }(١٨٠^\circ - هـ)} = \frac{٤٠٠}{\text{جا }(٩٠^\circ + هـ)}$

$\therefore \frac{ش_١}{١} = \frac{٣٠٠}{\text{جا } هـ} = \frac{٤٠٠}{\text{جتا } هـ}$

$\therefore \frac{\text{جا } هـ}{\text{جتا } هـ} = \frac{٣٠٠}{٤٠٠} = \frac{٣}{٤}$

$\therefore \text{ظا } هـ = \frac{٣}{٤}$ ∴ هـ = ٥٢َ ٣٦°

∴ زاوية ميل $\overline{أب}$ على الرأسى قياسها = ٥٢َ ٣٦°

$\therefore \frac{ش_١}{١} = \frac{٣٠٠}{\frac{٣}{٥}}$ ∴ ش١ = ٥٠٠ ث.جم

٢

∵ القوى التى مقاديرها ش١ ، ش٢ ، ك المتلاقية فى نقطة حـ متزنة

وبتطبيق قاعدة لامى :

$\therefore \frac{ش_١}{\text{جا } ٩٠^\circ} = \frac{ش_٢}{\text{جا } ١٥٠^\circ} = \frac{ك}{\text{جا } ١٢٠^\circ}$

$\therefore \frac{ش_١}{١} = \frac{ش_٢}{\frac{١}{٢}} = \frac{ك}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}$ (١)

، ∵ القوى التى مقاديرها ش٢ ، ش٣ ، ٢٠ المتلاقية فى نقطة ء متزنة ، وبتطبيق قاعدة لامى :

$\therefore \frac{٢٠}{\text{جا } ١٥٠^\circ} = \frac{ش_٢}{\text{جا } ١٢٠^\circ} = \frac{ش_٣}{\text{جا } ٩٠^\circ}$

$\therefore \frac{٢٠}{\frac{١}{٢}} = \frac{ش_٢}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} = \frac{ش_٣}{١}$

$\therefore ش_٢ = \frac{٢٠ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}}{\frac{١}{٢}} = ٢٠\sqrt{٣}$ ث.كجم

$، ش_٣ = \frac{٢٠ \times ١}{\frac{١}{٢}} = ٤٠$ ث.كجم

وبالتعويض فى (١) : $\therefore \frac{ش_١}{١} = \frac{٢٠\sqrt{٣}}{\frac{١}{٢}} = \frac{ك}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}$

∴ ش١ = ٤٠ $\sqrt{٣}$ ث.كجم

$، ك = \frac{٢٠\sqrt{٣} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}}{\frac{١}{٢}} = ٦٠$ ث.كجم

٣

بفرض طول الحبل ٢ ل متر

• عند تثبيت الحبل من الموضعين أ ، ب

∴ ٢٠ = ٢ ش١ جتا هـ

$\therefore ش_١ = \frac{١٠}{\text{جتا } هـ}$

$= ١٠ \times \frac{ل}{\sqrt{ل^٢ - ٤}}$ (١)

• عند تثبيت الحبل من الموضعين حـ ، ء

∴ ٢٠ = ٢ ش٢ جتا ى

$\therefore ش_٢ = \frac{١٠}{\text{جتا } ى}$

$= ١٠ \times \frac{ل}{\sqrt{ل^٢ - ١}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ ش١ > ش٢

أى أن : الشد فى الحبل فى حالة التعليق من أ ، ب أكبر منه فى حالة التعليق من حـ ، ء

إجابات تمارين 5

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

① (ب) ② (ب) ③ (أ) ④ (جـ) ⑤ (ب)

⑥ (جـ) ⑦ (جـ) ⑧ (د)

⑨ أولًا : (د) ثانيًا : (أ) ⑩ (ب) ⑪ (ب)

⑫ (جـ)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

Δ م أ ب مثلث القوى

حيث م أ = ٣٠ + ٢٠ = ٥٠ سم ، ب م = ٣٠ سم

∴ أ ب = ٤٠ سم (فيثاغورس)

وبتطبيق قاعدة مثلث القوى

$\therefore \frac{ر}{ب م} = \frac{ش}{أ م} = \frac{٢٠٠}{ب أ}$

$\therefore \frac{ر}{٣٠} = \frac{ش}{٥٠} = \frac{٢٠٠}{٤٠}$

$\therefore ر = ٢٠٠ \times \frac{٣٠}{٤٠}$

= ١٥٠ ثقل جم

$، ش = ٢٠٠ \times \frac{٥٠}{٤٠} = ٢٥٠$ ثقل جم

٢

∵ الحائط أملس

∴ $\overline{ر}$ ⊥ الحائط

، ∵ مجموعة القوى متزنة

∴ $\overline{ش}$ يمر بالنقطة م

بتطبيق قاعدة لامى

$\therefore \frac{ش}{\text{جا } ٩٠^\circ} = \frac{١٠\sqrt{٣}}{\text{جا } ١٢٠^\circ} = \frac{ر}{\text{جا } ١٥٠^\circ}$

∴ ش = ٢٠ ثقل جرام ، ر = ١٠ ثقل جرام

٣

∵ الحائط أملس ∴ $\overline{ر}$ ⊥ الحائط

، ∵ مجموعة القوى متزنة ∴ $\overline{ش}$ يمر بالنقطة م

∴ Δ أ ب م هو مثلث القوى

حيث أ م = ٢ نق

، م ب = نق ، أ ب = $\sqrt{٣}$ نق

وبتطبيق قاعدة مثلث القوى

$\therefore \frac{ش}{٢ \text{ نق}} = \frac{ر}{\text{نق}} = \frac{١٥}{\sqrt{٣} \text{ نق}}$

∴ ش = ١٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن ، ر = ٥ $\sqrt{٣}$ نيوتن

∴ الضغط على الحائط = ٥ $\sqrt{٣}$ نيوتن

٤

∵ الحائطين أملسان

∴ $\overline{ر_١}$ ، $\overline{ر_٢}$ عموديان على الحائطين ويمران بمركز الكرة ،

بتطبيق قاعدة لامى

∴ [illegible]

∴ ر١ (رد فعل المستوى الرأسى) = [illegible] $\sqrt{٣}$ ثقل كجم

، ر٢ (رد فعل المستوى المائل) = [illegible] ثقل كجم

٥

∵ المجموعة متزنة

∴ خط عمل الوزن يمر بنقطة تقاطع $\overleftrightarrow{س_١}$ ، $\overleftrightarrow{س_٢}$ وهى حـ

∵ ا حـ = $\frac{١}{٢}$ ا ب

، ∠ ا حـ ب قائمة

∴ ق (∠ ب) = ٣٠°

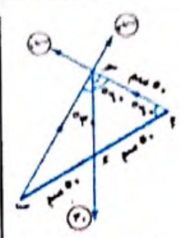
∴ ق (∠ ا) = ق (∠ ا حـ ء) = ٦٠°

∴ بتطبيق قاعدة لامى يكون :

$\frac{س_١}{جا ١٥٠°} = \frac{س_٢}{جا ١٢٠°} = \frac{٣٠}{جا ٩٠°}$

∴ $س_١ = ٣٠ \times \frac{١}{٢} = ١٥$ ثقل كجم.

، $س_٢ = ٣٠ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ١٥\sqrt{٣}$ ثقل كجم.



٦

∵ الشدين فى الخيطين يتقاطعان عند نقطة التعليق

∴ خط عمل الوزن يجب أن يمر بنفس النقطة كما موضح بالرسم

، ∵ $(ا حـ)^٢ + (ب حـ)^٢ = ١٦٩٠٠$

، $(ا ب)^٢ = ١٦٩٠٠$

∴ ق (∠ ا حـ ب) = ٩٠°

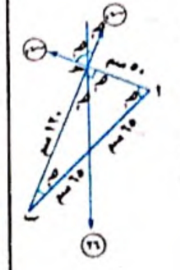
∴ جا هـ = $\frac{١٢}{١٣}$ ، جا هـ = $\frac{٥}{١٣}$

وبتطبيق قاعدة لامى :

∴ $\frac{س_١}{جا هـ} = \frac{س_٢}{جا هـ} = \frac{٢٦}{جا ٩٠°}$

∴ $\frac{س_١}{\frac{١٢}{١٣}} = \frac{س_٢}{\frac{٥}{١٣}} = ٢٦$

∴ $س_١ = ٢٤$ نيوتن ، $س_٢ = ١٠$ نيوتن



٧

∵ مجموعة القوى متزنة ∴ $\overrightarrow{ر}$ يمر بالنقطة هـ

∵ ء منتصف $\overline{ا ب}$ ، $\overline{ء هـ}$ // $\overline{ا حـ}$

∴ هـ منتصف $\overline{ب حـ}$

، ب حـ = $٦٠\sqrt{٢}$ سم (فيثاغورس)

، ∆ ا هـ حـ

مثلث القوى حيث

ا هـ = $\frac{١}{٢}$ ب حـ = $٣٠\sqrt{٢}$ سم

، هـ حـ = $٣٠\sqrt{٢}$ سم

، ا حـ = ٦٠ سم

∴ $\frac{ر}{٣٠\sqrt{٢}} = \frac{س}{٣٠\sqrt{٢}} = \frac{٤٠}{٦٠}$

∴ ر = س = $٢٠\sqrt{٢}$ نيوتن

٨

∵ مجموعة القوى متزنة

∴ $\overrightarrow{ر}$ يمر بالنقطة هـ

∵ $\overline{ء هـ}$ // $\overline{ا حـ}$

∴ هـ منتصف $\overline{ب حـ}$

∴ $\overline{ا هـ} \perp \overline{ب حـ}$

∴ ا هـ = ٤٠ سم (فيثاغورث)

، هـ حـ = $٤٠\sqrt{٣}$ سم ، ا حـ = ٨٠ سم

∆ ا هـ حـ هو مثلث القوى

∴ $\frac{ر}{٤٠} = \frac{س}{٤٠\sqrt{٣}} = \frac{٢٤}{٨٠}$

∴ $ر = ٤٠ \times \frac{٢٤}{٨٠} = ١٢$ ثقل كجم.

، $س = ٤٠\sqrt{٣} \times \frac{٢٤}{٨٠} = ١٢\sqrt{٣}$ ثقل كجم.

٩

∵ القضيب مماس للكرة

، رد الفعل عمودى على القضيب

∴ $ر_١$ ، $ر_٢$ يمران بمركز الكرة

وبتطبيق قاعدة لامى :

∴ $\frac{ر_١}{جا ١٥٠°} = \frac{ر_٢}{جا ١٥٠°} = \frac{٦٠}{جا ٦٠°}$

∴ $ر_١ = ر_٢ = ٢٠\sqrt{٣}$ نيوتن.

∴ $ض_١ = ض_٢ = ٢٠\sqrt{٣}$ نيوتن.

١٠

∵ ∆ م ا ب هو مثلث القوى

∴ $\frac{٥٠}{ا م} = \frac{٢٥}{م ب} = \frac{و}{ا ب}$

∴ $\frac{ا م}{م ب} = \frac{٥٠}{٢٥} = ٢$

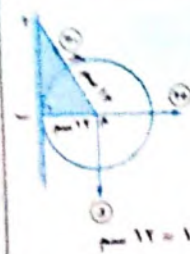
∴ ا م = ٢ × ١٢ = ٢٤ سم

∴ طول الخيط حـ ا = ٢٤ - ١٢ = ١٢ سم

، من ∆ ا م ب القائم الزاوية فى ب

يكون ا ب = $١٢\sqrt{٣}$ سم.

∴ $\frac{٢٥}{١٢} = \frac{و}{١٢\sqrt{٣}}$ ∴ و = $٢٥\sqrt{٣}$ نيوتن



١١

∵ مجموعة القوى متزنة

∴ خط عمل الوزن يمر بنقطة تقاطع $\overleftrightarrow{س_١}$ ، $\overleftrightarrow{س_٢}$ وهى حـ

∵ الحبلين متعامدان

∴ ∆ ا ب حـ قائم الزاوية

∴ طول الحبل الآخر = ٦٤ سم

∴ جا هـ = $\frac{٤٨}{٨٠} = \frac{٣}{٥}$ ، جا هـ = $\frac{٦٤}{٨٠} = \frac{٤}{٥}$

وبتطبيق قاعدة لامى : ∴ $\frac{س_١}{جا هـ} = \frac{س_٢}{جا هـ} = \frac{١٢}{جا ٩٠°}$

∴ $\frac{س_١}{\frac{٣}{٥}} = \frac{س_٢}{\frac{٤}{٥}} = ١٢$ ∴ $س_١ = ٧,٢$ نيوتن

، $س_٢ = ٩,٦$ نيوتن

١٢

رد فعل الحائط الأملس

يكون عموديًا على

الحائط $(ر_١)$

، وزن السلم يؤثر

رأسيًا لأسفل وتلاقيا فى نقطة (ء)

∴ رد فعل الأرض لابد وأن يمر بالنقطة (ء)

، ب هـ = ا هـ = ٢ متر ، ب حـ = ٢٫٥ متر

، من ∆ ء هـ ب القائم الزاوية فى هـ

يكون ب ء = ٢٫٥ متر (فيثاغورس)

∵ ∆ ء ب هـ هو مثلث القوى وبتطبيق قاعدة مثلث القوى

∴ $\frac{س_١}{ب هـ} = \frac{س_٢}{ء هـ} = \frac{٣٦}{ب ء}$

∴ $\frac{س_١}{١,٢٥} = \frac{س_٢}{٢} = \frac{٣٦}{٢,٥}$

∴ $س_١ = ١٥$ ثقل كجم ، $س_٢ = ٣٩$ ثقل كجم

١٣

∵ مجموعة القوى متزنة

∴ $\overrightarrow{ر}$ يمر بنقطة هـ

ب حـ = ١٠٠ سم (فيثاغورس)

$\frac{ب ء}{ب ا} = \frac{ب هـ}{ب حـ} = \frac{ء هـ}{ا حـ}$

∴ $\frac{٢}{٢} = \frac{ب هـ}{١٠٠} = \frac{ء هـ}{٨٠}$

∴ ب هـ = $\frac{٢٠٠}{٣}$ سم ، ء هـ = $\frac{١٦٠}{٣}$ سم

∴ هـ حـ = $\frac{١٠٠}{٣}$ سم

من ∆ ء ا هـ ا هـ = $\frac{٢٠\sqrt{٧٣}}{٣}$ سم (فيثاغورس)

∴ ∆ ا هـ حـ هو مثلث القوى

وبتطبيق قاعدة مثلث القوى

∴ $\frac{ر}{\frac{٢٠\sqrt{٧٣}}{٣}} = \frac{س}{\frac{١٠٠}{٣}} = \frac{٦٦}{٨٠}$

∴ ر = $\frac{١}{٤}\sqrt{٧٣}$ ثقل كجم

، س = $\frac{٥}{٤} = ٦\frac{٢}{٣}$ ثقل كجم

١٤

∵ القضيب متزن تحت تأثير ٣ قوى متلاقية في النقطة ن

وباستخدام قاعدة لامي ينتج أن :

$\frac{\text{٨}}{\text{جا } ٩٠°} = \frac{\text{ش}}{\text{جا } ١٥٠°} = \frac{\text{ر}}{\text{جا } ١٢٠°}$

∴ $\frac{\text{٨}}{\text{١}} = \frac{\text{ش}}{\frac{١}{٢}} = \frac{\text{ر}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}$

∴ ش = ٤ ثقل كجم ، ر = ٤ $\sqrt{٣}$ ثقل كجم

١٥

∵ مجموعة القوى متزنة

، الوزن ($\overrightarrow{\text{و}}$)

، الشد ($\overrightarrow{\text{ش}}$) تلاقيا في (ن)

∴ رد فعل المفصل لابد وأن يمر بالنقطة (ن)

، ∵ $\overline{\text{ء ن}}$ // $\overline{\text{أ حـ}}$ ، ء منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

∴ ن منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$

∴ Δ أ ن حـ هو مثلث القوى حيث

ن حـ = ٤٠ سم ، حـ أ = ١٠٠ سم

، ∵ (أ حـ)^{٢} = ١٠٠٠٠ ، (أ ب)^{٢} + (ب حـ)^{٢} = ١٠٠٠٠

∴ ق (∠ ب) = ٩٠° ∴ Δ ن ب أ قائم الزاوية

∴ أ ن = $\sqrt{(٤٠)^{٢} + (٦٠)^{٢}}$ = ٢٠ $\sqrt{١٣}$ سم

وبتطبيق قاعدة مثلث القوى :

∴ $\frac{\text{ر}}{٢٠\sqrt{١٣}} = \frac{\text{ش}}{٤٠} = \frac{\text{و}}{١٠٠}$

∴ ش = $\frac{٢}{٥}$ و ثقل كجم ، ر = $\frac{\sqrt{١٣}}{٥}$ و ثقل كجم

ونفرض أن ل هي زاوية ميل رد الفعل على القضيب

∴ في Δ ن ب أ القائم الزاوية في ب يكون

ظا ل = $\frac{٤٠}{٦٠} = \frac{٢}{٣}$ ∴ ق (∠ ل) ≃ ٣٣° ٤١َ

١٦

في Δ أ ء حـ

أ ء = $\sqrt{(٥٠)^{٢} - (٣٠)^{٢}}$

= ٤٠ سم

، ∵ مجموعة القوى متزنة

∴ $\overrightarrow{\text{ر}}$ يمر بنقطة ن

ΔΔ حـ أ ء ، حـ م ن متشابهان لتساوي قياسات زواياهما

∴ $\frac{\text{حـ أ}}{\text{حـ م}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{م ن}} = \frac{\text{ء حـ}}{\text{حـ ن}}$ ∴ $\frac{٣٠}{١٥} = \frac{٤٠}{\text{م ن}} = \frac{٥٠}{\text{حـ ن}}$

∴ م ن = ٢٠ سم ، حـ ن = ٢٥ سم

∴ ء ن = ٥٠ + ٢٥ = ٧٥ سم

من Δ أ م ن يكون أ ن = ٥ $\sqrt{٩٧}$ سم (فيثاغورس)

، ∵ Δ أ ن ء هو مثلث القوى

∴ $\frac{\text{ش}}{٧٥} = \frac{\text{ر}}{٥\sqrt{٩٧}} = \frac{\text{و}}{٤٠}$

∴ ش = $\frac{١٥}{٨}$ و ثقل كجم ، ر = $\frac{\sqrt{٩٧}}{٨}$ و ثقل كجم

١٧

∵ مجموعة القوى متزنة

∴ $\overrightarrow{\text{ر}}$ يمر بنقطة د

، بفرض أ حـ = ٢ ل

∴ ب حـ = ٢ ل

∴ د حـ = ل ، أ د = $\sqrt{٥}$ ل (فيثاغورس)

، ∵ Δ أ د حـ هو مثلث القوى

وبتطبيق قاعدة مثلث القوى

∴ $\frac{٤}{٢\text{ ل}} = \frac{\text{ر}}{\sqrt{٥}\text{ ل}} = \frac{\text{ق}}{\text{ل}}$

∴ ق = ٢ ث.كجم ، ر = ٢ $\sqrt{٥}$ ث.كجم

١٨

بفرض وزن الساق ٢ و

∵ مجموعة القوى متزنة

∴ $\overrightarrow{\text{ر}}$ يمر بنقطة ن

∴ Δ أ ن حـ هو مثلث القوى

وبتطبيق قاعدة مثلث القوى

∴ $\frac{\text{و}}{\text{ل}} = \frac{٢\text{ و}}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{ر}}{\text{أ ن}}$ ∴ أ حـ = ٢ ل

، ∵ د منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{د ن}}$ // $\overline{\text{أ حـ}}$

∴ ن منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ ∴ ب حـ = ٢ ل

∴ ق (∠ ب أ حـ) = ٤٥°

∴ الساق تميل على الرأسي بزاوية قياسها ٤٥°

، من Δ أ ن حـ أ ن = $\sqrt{٥}$ ل (فيثاغورس)

∴ $\frac{\text{و}}{\text{ل}} = \frac{\text{ر}}{\sqrt{٥}\text{ ل}}$ ∴ ر = $\sqrt{٥}$ و

∴ رد الفعل = $\frac{\sqrt{٥}}{٢}$ وزن الساق

١٩

∵ مجموعة القوى متزنة

∴ خط عمل الوزن يمر بنقطة تلاقي ردي الفعل حـ

، ∵ الزاوية بين المستويين قائمة

وكلاً من ردي الفعل عمودي على المستوى الخارج منه

∴ أ ء ب حـ مستطيل ∴ ق (∠ أ حـ ب) = ٩٠°

، بتطبيق قاعدة لامي :

∴ $\frac{٤}{\text{جا } ٩٠°} = \frac{\text{ر}_{١}}{\text{جا } ١٢٠°} = \frac{\text{ر}_{٢}}{\text{جا } ١٥٠°}$

∴ ر$_{١}$ = ٢ $\sqrt{٣}$ نيوتن ، ر$_{٢}$ = ٢ نيوتن

∴ ض$_{١}$ = ٢ $\sqrt{٣}$ نيوتن ، ض$_{٢}$ = ٢ نيوتن

، ∵ د أ = د ء (من خواص المستطيل)

، ق (∠ أ ء د) = ٦٠°

∴ Δ أ د ء متساوي الأضلاع

∴ ق (∠ د ء أ) = ٦٠°

∴ ق (∠ د أ ن) = ٣٠°

∴ القضيب يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠°

٢٠

$\overrightarrow{\text{ر}_{١}}$ عمودي على $\overline{\text{ب حـ}}$

، $\overrightarrow{\text{ر}_{٢}}$ عمودي على $\overline{\text{حـ أ}}$ وتلاقيا في م الذي يؤثر عنده وزن الكرة ($\overrightarrow{\text{و}}$)

وبتطبيق قاعدة لامي ينتج أن :

$\frac{\text{ر}_{١}}{\text{جا}(١٨٠° - \text{هـ})} = \frac{\text{ر}_{٢}}{\text{جا } ٩٠°} = \frac{\text{و}}{\text{جا}(٩٠° + \text{هـ})}$

∴ $\frac{\text{ر}_{١}}{\text{جا هـ}} = \text{ر}_{٢} = \frac{\text{و}}{\text{جتا هـ}}$ ∴ $\frac{\text{ر}_{١}}{\frac{٤}{٥}} = \text{ر}_{٢} = \frac{\text{و}}{\frac{٣}{٥}}$

∴ ر$_{١}$ = $\frac{٤}{٣}$ و ثقل كجم ، ر$_{٢}$ = $\frac{٥}{٣}$ و ثقل كجم

∴ الضغط على الحائط = $\frac{٤}{٣}$ و ثقل كجم

، الضغط على المستوى المائل = $\frac{٥}{٣}$ و ثقل كجم

٢١

∵ مجموعة القوى متزنة

، $\overrightarrow{\text{ر}_{١}}$ ، $\overrightarrow{\text{ر}_{٢}}$ يتلاقيان في نقطة (ن)

∴ وزن القضيب يمر بالنقطة (ن)

، ∵ $\overline{\text{ن م}}$ // $\overline{\text{أ حـ}}$

∴ ق (∠ ن م ب) = ق (∠ حـ) = ٦٠°

∴ في Δ ىم ب : ق(∠ ب) = ٩٠°

، ق(∠ م) = ٦٠°   ∴ ق(∠ م ى ب) = ٣٠°

وبتطبيق قاعدة لامي ينتج أن :

$$\frac{\text{ر}_1}{\text{جا } ١٥٠°} = \frac{\text{ر}_2}{\text{جا } ٩٠°} = \frac{٢٠}{\text{جا } ١٢٠°}$$

$$\therefore \frac{\text{ر}_1}{\frac{١}{٢}} = \frac{\text{ر}_2}{١} = \frac{٢٠}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}$$

∴ $\text{ر}_1 = \frac{٢٠\sqrt{٣}}{٣}$ ثقل كجم ، $\text{ر}_2 = \frac{٤٠\sqrt{٣}}{٣}$ ثقل كجم

وبرسم $\overline{\text{ب ك}} \perp \overline{\text{أ حـ}}$ ∴ $\overline{\text{ب ع}} \perp \overline{\text{ى م}}$

وبفرض أن ب ع = ل   ∴ ب ى = ٢ ل

، ى ع = $\sqrt{٣}$ ل   ∴ أ ك = $\sqrt{٣}$ ل

، ∴ ب ك = ٢ ل

∴ ظا(∠ ب أ ك) = ظا هـ = $\frac{\text{ب ك}}{\text{أ ك}} = \frac{٢ \text{ ل}}{\sqrt{٣} \text{ ل}} = \frac{٢}{\sqrt{٣}}$

∴ ق(∠ هـ) ≃ ٤٩ ٦°

٢٢

∵ ق(∠ أ حـ ب) = ق(∠ ى أ حـ)

= ق(∠ حـ ب ى) = ٩٠°

∴ الشكل أ حـ ب ى مستطيل

القضيب متزن تحت تأثير ثلاث قوى

، ى هي نقطة تلاقي القوى

، بفرض قياس زاوية ميل المستوى الذي يستند عليه الطرف أ على الأفقي هي هـ_1 ، الذي يستند عليه الطرف ب هي هـ_2

وباستخدام قاعدة لامي :

$$\therefore \frac{\text{ر}}{\text{جا}(٩٠° + \text{هـ}_1)} = \frac{٤}{\text{جا}(٩٠° + \text{هـ}_2)} = \frac{٨}{\text{جا } ٩٠°}$$

∴ $\frac{\text{ر}}{\text{جتا هـ}_1} = \frac{٤}{\text{جتا هـ}_2} = ٨$ ∴ جتا $\text{هـ}_2 = \frac{١}{٢}$

∴ ق(∠ هـ_2) = ٦٠°   ∴ ق(∠ هـ_1) = ٣٠°

∴ ر = ٨ جتا ٣٠° = ٤ $\sqrt{٣}$ نيوتن

∴ الضغط على المستوى عند أ = ٤ $\sqrt{٣}$ نيوتن

٢٣

∵ المستوى المائل أملس

∴ رد فعل المستوى عند أ

يكون عموديًا على المستوى

لذلك فهو يمر بمركز الكرة (م)

، ∵ مجموعة القوى متزنة

∴ الشد في الخيط يمر بالنقطة (م)

في Δ م أ ب : ∵ ق(∠ أ) = ٩٠° ، أ م = $\frac{١}{٢}$ ب م

∴ هـ = ٣٠°

∴ ق(∠ م ب أ) = قياس زاوية ميل المستوى على الأفقي

∴ الخيط $\overline{\text{م ب}}$ يكون أفقيًا وبتطبيق قاعدة لامي ينتج أن :

$$\frac{\text{ر}}{\text{جا } ٩٠°} = \frac{\text{ش}}{\text{جا } ١٥٠°} = \frac{١٢\sqrt{٣}}{\text{جا } ١٢٠°}$$

$$\therefore \frac{\text{ر}}{١} = \frac{\text{ش}}{\frac{١}{٢}} = \frac{١٢\sqrt{٣}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}$$

∴ ر = ٢ ش = ٢٤

∴ الشد في الخيط (ش) = ١٢ ثقل كجم.

، رد فعل المستوى (ر) = ٢٤ ثقل كجم.

٢٤

بفرض وزن القضيب (٢ و) ووزن الثقل (و)

∵ مجموعة القوى متزنة

∴ $\overrightarrow{\text{ر}}$ يمر بنقطة تلاقي وزن القضيب والشد في الخيط وهي ى

، ∵ ى منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ى ى}}$ // $\overline{\text{أ حـ}}$

∴ ى منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$

، ∵ أ ب = أ حـ   ∴ $\overline{\text{أ ى}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$

وبتطبيق قاعدة لامي :

$$\therefore \frac{\text{ر}}{\text{جا}(١٨٠° - \text{ى})} = \frac{٢ \text{ و}}{\text{جا } ٩٠°} = \frac{\text{و}}{\text{جا}(٩٠° + \text{ى})}$$

∴ ٢ و = $\frac{\text{و}}{\text{جتا ى}}$ ∴ جتا ى = $\frac{١}{٢}$ ∴ ى = ٦٠°

∴ ق(∠ ب حـ أ) = ٦٠° ، ∵ أ ب = أ حـ

∴ Δ أ ب حـ متساوي الأضلاع

∴ ق(∠ ب أ حـ) = ٦٠°   ∴ ق(∠ ب أ هـ) = ٣٠°

∴ زاوية ميل القضيب على الأفقي قياسها ٣٠°

٢٥

∵ الحائط أملس

∴ $\overrightarrow{\text{ر}}$ عمودي على الحائط

، ∵ مجموعة القوى متزنة

∴ خط عمل الشد يمر بنقطة تلاقي رد الفعل والوزن وهي (و)

من Δ أ و ى القائم الزاوية في و

و ى = $\frac{١}{٢}$ أ ى = ١٠ سم

∴ ∠ و ى أ خارجة عن المثلث المتساوي الساقين و ى حـ حيث و ى = ى حـ = ١٠ سم

∴ ق(∠ حـ و ى) = ٣٠°

وبتطبيق قاعدة لامي : ∴ $\frac{\text{ر}}{\text{جا } ١٥٠°} = \frac{\text{ش}}{\text{جا } ٩٠°} = \frac{١٢}{\text{جا } ١٢٠°}$

∴ ر = ٤ $\sqrt{٣}$ نيوتن ، ش = ٨ $\sqrt{٣}$ نيوتن

٢٦

∵ أ حـ = أ ى = ٤ متر

∴ ق(∠ أ حـ ى) = ٤٥°

∴ حـ ى = ٤ $\sqrt{٢}$ متر

من Δ م حـ ى : م ى = ١ متر ، ى حـ = $\sqrt{٢}$ متر

∴ ى ى = ٤ $\sqrt{٢}$ − $\sqrt{٢}$ = ٣ $\sqrt{٢}$ متر

، من Δ أ م ى : أ ى = $\sqrt{١٠}$ متر (فيثاغورس)

وحيث إن Δ أ ى ى هو مثلث القوى

$$\therefore \frac{\text{ر}}{\sqrt{١٠}} = \frac{\text{ش}}{٣\sqrt{٢}} = \frac{٨}{٤}$$

∴ ر = ٢ $\sqrt{١٠}$ ثقل كجم ، ش = ٦ $\sqrt{٢}$ ثقل كجم

٢٧

∵ الجسم متزن   ∴ س = ٠ ، ص = ٠

∴ ق جتا ى + ر جتا ٩٠° + ١٠٠ جتا (٢٧٠° − هـ) = ٠

∴ ق × $\frac{١٢}{١٣}$ + ر × ٠ + ١٠٠ × (− جا هـ) = ٠

∴ $\frac{١٢}{١٣}$ ق − ١٠٠ × $\frac{٣}{٥}$ = ٠

∴ ق = ٦٥ نيوتن

، ق جا ى + ر جا ٩٠° + ١٠٠ جا (٢٧٠° − هـ) = ٠

∴ ٦٥ × $\frac{٥}{١٣}$ + ر × ١ + ١٠٠ × (− جتا هـ) = ٠

∴ ٢٥ + ر − ١٠٠ × $\frac{٤}{٥}$ = ٠   ∴ ر = ٥٥ نيوتن

٢٨

∵ الجسم متزن ∴ س = ٠ ، ص = ٠

∴ ٥٠ حتا ٠° + ٢٠$\sqrt{٣}$ حتا ٣٠° + ر حتا ٩٠° + و حتا ٢٤٠° = ٠

∴ ٥٠ × ١ + ٢٠$\sqrt{٣}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ر × صفر − و × $\frac{١}{٢}$ = ٠

∴ ٥٠ + ٣٠ − $\frac{١}{٢}$و = ٠ ∴ و = ١٦٠ نيوتن

، ٥٠ حا ٠° + ٢٠$\sqrt{٣}$ حا ٣٠° + ر حا ٩٠° + و حا ٢٤٠° = ٠

∴ ٥٠ × صفر + ٢٠$\sqrt{٣}$ × $\frac{١}{٢}$ + ر × ١ − ١٦٠ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٠

∴ ١٠$\sqrt{٣}$ + ر − ٨٠$\sqrt{٣}$ = ٠ ∴ ر = ٧٠$\sqrt{٣}$ نيوتن

٢٩

Δ أ ب حـ فيه :

ق (∠ب) = ٩٠° ، أحـ + ب حـ = ٤٠

∴ أحـ = ٤٠ − ب حـ

، ∵ (أحـ)^{٢} = (أب)^{٢} + (ب حـ)^{٢}

∴ (٤٠ − ب حـ)^{٢} = (٢٠)^{٢} + (ب حـ)^{٢}

∴ ١٦٠٠ − ٨٠ ب حـ + (ب حـ)^{٢} = ٤٠٠ + (ب حـ)^{٢}

∴ ٨٠ ب حـ = ١٢٠٠

∴ ب حـ = ١٥ سم ، أحـ = ٢٥ سم

، ∵ الحلقة ملساء

∴ الشد في $\overline{حـ أ}$ = الشد في $\overline{حـ ب}$ = ش

، ∵ الحلقة متزنة ∴ س = ٠ ، ص = ٠

∴ ش حتا (٩٠° − هـ) + ش حتا ٩٠°

+ ق حتا ١٨٠° + ٤٠٠ حتا ٢٧٠° = ٠

∴ ش حا هـ + ش × ٠ + ق × (−١) + ٤٠٠ × ٠ = ٠

∴ ش × $\frac{٢٠}{٢٥}$ − ق = ٠

∴ ٤ ش − ٥ ق = ٠ (١)

، ش حا (٩٠° − هـ) + ش حا ٩٠°

+ ق حا ١٨٠° + ٤٠٠ حا ٢٧٠° = ٠

ش حتا هـ + ش × ١ + ق × ٠ + ٤٠٠ × (−١) = ٠

ش × $\frac{١٥}{٢٥}$ + ش − ٤٠٠ = ٠

$\frac{٨}{٥}$ش = ٤٠٠ ∴ ش = ٢٥٠ ث جم

بالتعويض في (١) : ∴ ١٠٠٠ − ٥ ق = ٠

∴ ق = ٢٠٠ ث جم

إجابات
تمارين

الهندسة والقياس



إجابات الوحدة الثانية

إجابات تمارين 6

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

① (د) ② (أ) ③ (د) ④ (أ) ⑤ (د)

⑥ (د) ⑦ (جـ) ⑧ (أ) ⑨ (د) ⑩ (د)

⑪ (أ) ⑫ (ب) ⑬ (أ) ⑭ (ب) ⑮ (ب)

⑯ (د) ⑰ (جـ) ⑱ (جـ) ⑲ (أ) ⑳ (جـ)

(٢١) (جـ) (٢٢) (ب) (٢٣) (جـ) (٢٤) (د) (٢٥) (د)

(٢٦) (د) (٢٧) (أ) (٢٨) (د) (٢٩) (د) (٣٠) (ب)

(٣١) (ب) (٣٢) (أ) (٣٣) (جـ)

(٣٤) أولًا : (جـ) ثانيًا : (أ)
ثالثًا : (ب) رابعًا : (د)

(٣٥) أولًا : (أ) ثانيًا : (ب)
ثالثًا : (جـ) رابعًا : (جـ)

(٣٦) أولًا : (ب) ثانيًا : (د)
ثالثًا : (جـ) رابعًا : (د)

(٣٧) أولًا : (أ) ثانيًا : (ب)
ثالثًا : (جـ) رابعًا : (أ)
خامسًا : (ب)

(٣٨) أولًا : (أ) ثانيًا : (د)
ثالثًا : (جـ)

(٣٩) أولًا : (ب) ثانيًا : (د)
ثالثًا : (د) رابعًا : (جـ)
خامسًا : (د)

(٤٠) أولًا : (أ) ثانيًا : (ب)
ثالثًا : (جـ) رابعًا : (جـ)

ثانيا الأسئلة المقالية

1

① ٨ مستقيمات تحمل أحرفه

② $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أء}$ ، $\overleftrightarrow{أم}$

③ ٥ مستويات تحمل أوجهه

④ المستويات : أ ب حـ ء ، أ ب م ، أ ء م

2

① $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أء}$ ، $\overleftrightarrow{أأَ}$ ② $\overleftrightarrow{أب}$

③ أ ب بَ أَ ، أ ب حـ ء ، أ ء ءَ أَ

④ أ ب بَ أَ ، أ ب حـ ء ، أ ب حـَ ءَ

3

① $\overleftrightarrow{أء}$ ، $\overleftrightarrow{أأَ}$ ، $\overleftrightarrow{ب حـ}$ ، $\overleftrightarrow{ب بَ}$

② $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{ءَ حـ}$ ، $\overleftrightarrow{ء حـ}$

③ $\overleftrightarrow{أءَ}$ ، $\overleftrightarrow{بَ حـ}$ ، $\overleftrightarrow{ءءَ}$ ، $\overleftrightarrow{حـ حـَ}$

4

① عدد لا نهائى ② عدد لا نهائى

③ عدد لا نهائى ④ مستوى واحد فقط

5

① (١) متخالفان (٢) متوازيان (٣) متخالفان
(٤) متوازيان (٥) متخالفان (٦) متقاطعان

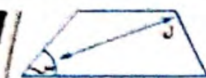
② (١) متوازيان (٢) متقاطعان (٣) متقاطعان

③ $\sqrt{(٦\sqrt{٢})^٢ + (٦)^٢} = ٦\sqrt{٣}$ سم

6

① أ ∈ ل

② ل ⊃ س



③ ل ∩ س = {أ}

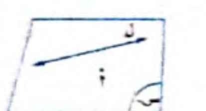


④ ل // س





⑤



إجابات تمارين 7

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

① (جـ) ② (ب) ③ (ب) ④ (ب) ⑤ (ب)

⑥ (د) ⑦ (ب) ⑧ (جـ) ⑨ (د) ⑩ (ب)

⑪ (جـ) ⑫ (ب) ⑬ (أ) ⑭ (ب) ⑮ (ب)

⑯ (ب) ⑰ (جـ) ⑱ (جـ) ⑲ (ب) ⑳ (ب)

(٢١) (جـ) (٢٢) (د) (٢٣) (أ) (٢٤) (جـ) (٢٥) (د)

(٢٦) (أ) (٢٧) (ب) (٢٨) (أ) (٢٩) (أ) (٣٠) (د)

(٣١) (ب) (٣٢) (جـ) (٣٣) (جـ) (٣٤) (د) (٣٥) (أ)

(٣٦) (ب) (٣٧) (د) (٣٨) (ب) (٣٩) (جـ) (٤٠) (أ)

(٤١) (أ) (٤٢) (جـ) (٤٣) (ب) (٤٤) (جـ) (٤٥) (أ)

(٤٦) (جـ) (٤٧) (جـ) (٤٨) (د) (٤٩) (جـ) (٥٠) (جـ)

(٥١) (د) (٥٢) (ب)

ثانيا الأسئلة المقالية

1

① الأوجه = ٥ ② ٦ ③ ٥

④ ١٠ ⑤ ٦

، ∵ عدد الأوجه + عدد الرؤوس = ٦ + ٦ = ١٢

، عدد الأحرف + ٢ = ١٠ + ٢ = ١٢

∴ تحقق علاقة أويلر.

2

∵ أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ١٠ سم

∴ ن هـ = ٥ سم

، ∵ الهرم منتظم

∴ $\overline{م ن} \perp \overline{ن هـ}$

∴ الارتفاع الجانبى (م هـ) = $\sqrt{٥^٢ + ١٢^٢} = ١٣$ سم

3

∵ الهرم منتظم

∴ $\overline{م ن} \perp \overline{ن هـ}$

∴ ن هـ = $\sqrt{٢٥^٢ - ٢٠^٢}$

= ١٥ سم

∴ ب حـ = ٣٠ سم ∴ طول قاعدة الهرم = ٣٠ سم

4

∵ الهرم منتظم ∴ $\overline{م ن} \perp \overline{أ ن}$

∴ أ ن = $\sqrt{(٤\sqrt{٥})^٢ - (٤\sqrt{٣})^٢}$

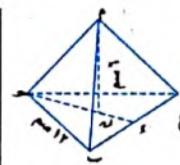
= ٤$\sqrt{٢}$ سم

∴ أ حـ = ٨$\sqrt{٢}$ سم

(قطر المربع)

∴ طول ضلع المربع = $\frac{٨\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$ = ٨ سم

٥



نفرض ء منتصف أب

، ∵ △ أ ب حـ متساوى الأضلاع

∴ حـ ء ⊥ أ ب

∴ حـ ء = $\sqrt{(١٢)^٢ - (٦)^٢}$ = ٦ $\sqrt{٣}$ سم

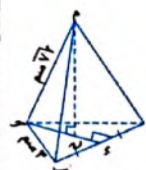
، ∵ ن نقطة تلاقى متوسطات المثلث أ ب حـ

∴ ن حـ = $\frac{٢}{٣}$ × ٦ $\sqrt{٣}$ = ٤ $\sqrt{٣}$

∴ △ م ن حـ قائم الزاوية فى ن

∴ م حـ = $\sqrt{٦^٢ + (٤\sqrt{٣})^٢}$ = ٢ $\sqrt{٢١}$ سم

٦



بفرض ء منتصف أب

، ∵ △ أ ب حـ متساوى الأضلاع

∴ حـ ء ⊥ أ ب

∴ حـ ء = $\sqrt{(٣)^٢ - (١,٥)^٢}$ = $\frac{٣}{٢}$ $\sqrt{٣}$ سم

، ∵ الهرم منتظم ∴ م ن ⊥ ن حـ

، ن نقطة تلاقى متوسطات △ أ ب حـ

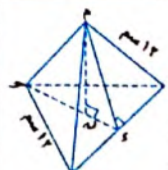
∴ حـ ن = $\sqrt{٣}$ سم

، ∵ △ م ن حـ قائم الزاوية فى ن

∴ م ن = $\sqrt{(\sqrt{٧})^٢ - (\sqrt{٣})^٢}$ = ٢ سم

∴ ارتفاع الهرم = ٢ سم

٧



∵ بفرض ء منتصف أب

، ∵ △ أ ب حـ متساوى الأضلاع

∴ حـ ء = ٦ $\sqrt{٣}$ سم

، ∵ الهرم منتظم الوجوه ∴ م ن ⊥ ن حـ

، ن نقطة تلاقى متوسطات △ أ ب حـ

∴ حـ ن = ٤ $\sqrt{٣}$ سم

∴ △ م ن حـ قائم الزاوية فى ن

∴ م ن = $\sqrt{١٢^٢ - (٤\sqrt{٣})^٢}$ = ٤ $\sqrt{٦}$ سم

∴ ارتفاع الهرم = ٤ $\sqrt{٦}$ سم

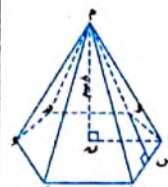
، ∵ ء منتصف أب فى △ أ ب م متساوى الأضلاع

∴ م ء ⊥ أ ء

∴ م ء = $\sqrt{(١٢)^٢ - ٦^٢}$ = ٦ $\sqrt{٣}$ سم

∴ الارتفاع الجانبى = ٦ $\sqrt{٣}$ سم

٨



طول ضلع القاعدة = ٢٤ $\sqrt{٣}$ ÷ ٦

= ٤ $\sqrt{٣}$ سم

، ∵ الهرم منتظم

∴ م ن ⊥ أ ن

، ن هى المركز الهندسى للقاعدة

∴ أ ن = طول ضلع القاعدة = ٤ $\sqrt{٣}$ سم

∴ م أ = $\sqrt{٨^٢ + (٤\sqrt{٣})^٢}$ = ٤ $\sqrt{٧}$ سم

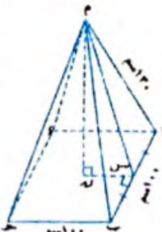
∴ طول حرف الهرم الجانبى = ٤ $\sqrt{٧}$ سم

وبفرض س منتصف أب

، ∵ م أ = م ب ∴ م س ⊥ أ ب

∴ م س = $\sqrt{(٤\sqrt{٧})^٢ - (٢\sqrt{٣})^٢}$ = ١٠ سم

٩



بفرض س منتصف أب

، ∵ م أ = م ب

∴ م س ⊥ أ ب

∴ م س = $\sqrt{(١٣٠)^٢ - (٥٠)^٢}$

= ١٢٠ سم

∴ الارتفاع الجانبى للهرم = ١٢٠ سم

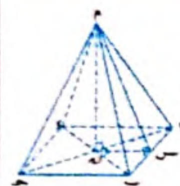
، ∵ الهرم منتظم ∴ م ن ⊥ ن س

، ∵ ن المركز الهندسى للقاعدة ∴ ن س = ٥٠ سم

∴ م ن = $\sqrt{(١٢٠)^٢ - (٥٠)^٢}$ = ١٠ $\sqrt{١١٩}$ سم

∴ ارتفاع الهرم = ١٠ $\sqrt{١١٩}$ سم

١٠



شكل (١) : (هرم رباعى منتظم)

∵ الهرم منتظم

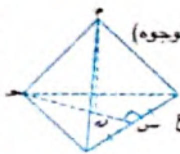
∴ م ن ⊥ س ن

، ن المركز الهندسى للقاعدة

∴ س ن = ٥ سم

∴ م ن = $\sqrt{(١٣)^٢ - (٥)^٢}$ = ١٢ سم

∴ ارتفاع الهرم = ١٢ سم



شكل (٢) : (هرم ثلاثى منتظم الوجوه)

بفرض س منتصف أب

، ∵ △ أ ب حـ متساوى الأضلاع

∴ حـ س ⊥ أ ب

∴ حـ س = $\sqrt{٦^٢ - ٣^٢}$ = ٣ $\sqrt{٣}$ سم

، ∵ الهرم منتظم الوجوه ∴ م ن ⊥ ن حـ

، ن هى نقطة تلاقى متوسطات المثلث أ ب حـ

∴ ن حـ = ٢ $\sqrt{٣}$ سم

، م ن = $\sqrt{٦^٢ - (٢\sqrt{٣})^٢}$ = ٢ $\sqrt{٦}$

∴ ارتفاع الهرم = ٢ $\sqrt{٦}$ سم

١١



∵ الهرم منتظم

∴ م ن ⊥ س ن

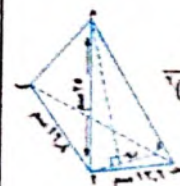
، ن هو المركز الهندسى للقاعدة

∴ س ن = ١١٦ متر

∴ م ن = $\sqrt{(١٨٦)^٢ - (١١٦)^٢}$ ≃ ١٤٥,٤ متر

∴ ارتفاع الهرم ≃ ١٤٥,٤ متر

١٢



∵ △ أ ب حـ قائم الزاوية فى أ

∴ ب حـ = $\sqrt{(١٢,٦)^٢ + (١٦,٨)^٢}$

= ٢١ سم

، ∵ أ ء متوسط مرسوم من أ

∴ أ ء = نصف طول الوتر = ١٠,٥ سم

، ∵ الهرم قائم ∴ م ن ⊥ ن أ

، ن نقطة تلاقى متوسطات المثلث

∴ أ ن = $\frac{٢}{٣}$ × ١٠,٥ = ٧ سم

، ∵ △ م ن أ قائم فى ن

∴ الارتفاع (م ن) = $\sqrt{(٢٥)^٢ - (٧)^٢}$ = ٢٤ سم

١٣



∵ الهرم قائم

∴ م أ ⊥ أ حـ ، م أ ⊥ ب ء

∴ م ب = م ء = $\sqrt{(١٠)^٢ + ٦^٢}$ = ٢ $\sqrt{٣٤}$ سم

، م أ = م حـ = $\sqrt{(١٠)^٢ + ٨^٢}$ = ٢ $\sqrt{٤١}$ سم

١٤

∵ مساحة قاعدة الهرم = $\frac{١}{٢}$ × ١٨ × ١٨ × جا ٦٠°

= ٨١ $\sqrt{٣}$ سم^٢

∴ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × ٨١ $\sqrt{٣}$ × ١٢ = ٣٢٤ $\sqrt{٣}$ سم^٣

١٥

① ∵ ارتفاع الهرم المنتظم هو م ن

∴ $\overline{\text{م ن}} \perp \overline{\text{ن هـ}}$

، ن هـ = $\frac{١}{٢}$ ب حـ = ٥ سم

∴ م هـ = $\sqrt{(١٢)^٢ + ٥^٢}$

= ١٣ سم

∴ الارتفاع الجانبى = ١٣ سم

② حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ × $(١٠)^٢$ × ١٢ = ٤٠٠ سم^٣

③ المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

= $\frac{١}{٢}$ × (٤ × ١٠) × ١٣ + (١٠ × ١٠)

= ٢٦٠ + ١٠٠ = ٣٦٠ سم^٢

١٦

الارتفاع الجانبى = $\sqrt{(١٠)^٢ + (١٠\sqrt{٣})^٢}$

= ٢٠ سم

① المساحة الجانبية

= $\frac{١}{٢}$ × (٤ × ٢٠) × ٢٠

= ٨٠٠ سم^٢

② حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ × $(٢٠)^٢$ × ١٠$\sqrt{٣}$

= $\frac{٤٠٠٠}{٣}\sqrt{٣}$ سم^٣

١٧

قاعدة الهرم المنتظم مربعة طول قطرها ٢٤$\sqrt{٢}$ سم

∴ طول ضلعها = ٢٤ سم

المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة

× الارتفاع الجانبى

= $\frac{١}{٢}$ × (٤ × ٢٤) × ٢٠

= ٩٦٠ سم^٢

∴ المساحة الكلية = المسافة الجانبية

+ مساحة القاعدة

= ٩٦٠ + (٢٤ × ٢٤) = ١٥٣٦ سم^٢

ارتفاع الهرم = $\sqrt{(٢٠)^٢ - (١٢)^٢}$ = ١٦ سم

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ × $(٢٤)^٢$ × ١٦ = ٣٠٧٢ سم^٣

١٨

① ∵ م أ ب حـ ء هرم قائم

قاعدته مربع

∴ الهرم منتظم

، ارتفاعه الجانبى

= $\sqrt{(٤\sqrt{٦})^٢ - (٤\sqrt{٢})^٢}$ = ٨ سم

∴ المساحة الجانبية

= $\frac{١}{٢}$ × محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

= $\frac{١}{٢}$ × (٤ × ٨$\sqrt{٢}$) × ٨ = ١٢٨$\sqrt{٢}$ سم^٢

② ∵ هـ ن = $\frac{١}{٢}$ ب حـ = ٤$\sqrt{٢}$

∴ فى △ م هـ ن :

ارتفاع الهرم م ن = $\sqrt{٨^٢ - (٤\sqrt{٢})^٢}$ = ٤$\sqrt{٢}$ سم

∴ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ × $(٨\sqrt{٢})^٢$ × ٤$\sqrt{٢}$

= $\frac{٥١٢}{٣}\sqrt{٢}$ سم^٣

١٩

① فى △ م أ هـ :

م هـ = $\sqrt{(٢٦)^٢ - (١٠)^٢}$

= ٢٤ سم

(الارتفاع الجانبى)

② فى △ م هـ ن :

م ن = $\sqrt{(٢٤)^٢ - (١٠)^٢}$

= ٢$\sqrt{١١٩}$ سم (ارتفاع الهرم)

③ المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

= $\frac{١}{٢}$ × (٤ × ٢٠) × ٢٤ = ٩٦٠ سم^٢

④ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ × $(٢٠)^٢$ × ٢$\sqrt{١١٩}$

= $\frac{٨٠٠}{٣}\sqrt{١١٩}$ سم^٣

٢٠

∵ الهرم ثلاثى منتظم الوجوه

∴ ٢ ل^٢ = ٣ ع^٢ ∴ ٢ × $(١٢)^٢$ = ٣ × ع^٢

∴ ع = ٤$\sqrt{٦}$ سم

، حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × ($\frac{١}{٢}$ ل^٢ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) × ع

= $\frac{١}{٣}$ × $\frac{١}{٢}$ × $(١٢)^٢$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × ٤$\sqrt{٦}$

= ١٤٤$\sqrt{٢}$ سم^٣

، مساحته الكلية = ل^٢$\sqrt{٣}$ = $(١٢)^٢$ × $\sqrt{٣}$ = ١٤٤$\sqrt{٣}$ سم^٢

٢١

① ∵ م أ ب حـ ء هرم قائم قاعدته مربعة

∴ الهرم منتظم

، ارتفاعه الجانبى

= $\sqrt{(١٥)^٢ - ٩^٢}$ = ١٢ سم

∴ مساحته الكلية = مساحته الجانبية + مساحة القاعدة

= $\frac{١}{٢}$ × (٤ × ١٨) × ١٢ + $(١٨)^٢$

= ٤٣٢ + ٣٢٤ = ٧٥٦ سم^٢

② ارتفاع الهرم = $\sqrt{(١٢)^٢ - ٩^٢}$ = ٣$\sqrt{٧}$ سم

∴ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × $(١٨)^٢$ × ٣$\sqrt{٧}$

= ٣٢٤$\sqrt{٧}$ سم^٣

٢٢

مساحة القاعدة = $\frac{ن}{٤}$ × س^٢ × ظتا $\frac{١٨٠^\circ}{ن}$

= $\frac{٥}{٤}$ × $(١٦)^٢$ × ظتا $\frac{١٨٠^\circ}{٥}$

= ٤٤٠,٤٤ سم^٢

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ × ٤٤٠,٤٤ × ١٢ = ١٧٦١,٨ سم^٣

٢٣

① المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

= $\frac{١}{٢}$ × (٦ × ١٢) × ١٠$\sqrt{٣}$

= ٣٦٠$\sqrt{٣}$ سم^٢

② مساحة القاعدة = $\frac{ن}{٤}$ س^٢ ظتا $\frac{١٨٠^\circ}{ن}$

= $\frac{٦}{٤}$ × $(١٢)^٢$ × ظتا $\frac{١٨٠^\circ}{٦}$

= ٢١٦$\sqrt{٣}$ سم^٢

∴ المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

= ٣٦٠$\sqrt{٣}$ + ٢١٦$\sqrt{٣}$

= ٥٧٦$\sqrt{٣}$ سم^٢

٢٤

① مساحة القاعدة = $\frac{١}{٢}$ × $(٦)^٢$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٩$\sqrt{٣}$ سم^٢

المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

= $\frac{١}{٢}$ × (٣ × ٦) × ١٠ = ٩٠ سم^٢

المساحة الكلية = (٩٠ + ٩$\sqrt{٣}$) ≃ ١٠٥,٦ سم^٢

② مساحة القاعدة = $(١٢)^٢$ = ١٤٤ سم^٢

المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ × (٤ × ١٢) × ١٥

= ٣٦٠ سم^٢

، المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

= ٣٦٠ + ١٤٤ = ٥٠٤ سم^٢

③ مساحة القاعدة = $(٢٠)^٢$ = ٤٠٠ سم^٢

الارتفاع الجانبى = $\sqrt{٢٤^٢ + ١٠^٢}$ = ٢٦ سم

المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ × (٢٠ × ٤) × ٢٦

= ١٠٤٠ سم^٢

، المساحة الكلية = ١٠٤٠ + ٤٠٠ = ١٤٤٠ سم^٢

④ مساحة القاعدة = $\frac{٦}{٤}$ × $(١٠)^٢$ × ظتا $\frac{\pi}{٦}$

= ١٥٠ $\sqrt{٣}$ ≃ ٢٥٩,٨ سم^٢

الارتفاع الجانبى = $\sqrt{(١٣)^٢ - ٥^٢}$

= ١٢ سم

المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ × (٦ × ١٠) × ١٢

= ٣٦٠ سم^٢

المساحة الكلية = ٣٦٠ + ٢٥٩,٨ = ٦١٩,٨ سم^٢

٢٥

① الحجم = $\frac{١}{٣}$ × $(١٠)^٢$ × ٢١ = ٧٠٠ سم^٣

② الحجم = $\frac{١}{٣}$ ($\frac{٦}{٤}$ × $٨^٢$ × ظتا $\frac{\pi}{٦}$) × ١٤

= ٤٤٨ $\sqrt{٣}$ سم^٣

③ مساحة القاعدة = $\frac{١}{٢}$ × $٦^٢$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

= ٩ $\sqrt{٣}$ سم^٢

الحجم = $\frac{١}{٣}$ × (٩ $\sqrt{٣}$) × ١٢ = ٣٦ $\sqrt{٣}$ سم^٣

④ أ هـ = $\sqrt{(١٧)^٢ - (١٥)^٢}$

= ٨ سم

∴ أ ب (طول الضلع) = ١٦ سم

، هـ ن = ٨ سم

، ارتفاع الهرم = $\sqrt{(١٥)^٢ - ٨^٢}$ = $\sqrt{١٦١}$ سم

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ × $(١٦)^٢$ × $\sqrt{١٦١}$

= $\frac{٢٥٦}{٣}$ $\sqrt{١٦١}$ سم^٣ ≃ ١٠٨٢,٨ سم^٣

٢٦

حجم الهرم الرباعى = $\frac{١}{٣}$ × ($\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٨) × ١٢

= ٦٤ سم^٣

حجم المكعب = $(٤)^٣$ = ٦٤ سم^٣

∴ الحجمين متساويان.

٢٧

محيط القاعدة = ٥ + ٦ + ٧ = ١٨

∴ نصف محيط القاعدة (ع) = ٩ سم

مساحة القاعدة = $\sqrt{ع (ع - أ ب) (ع - ب حـ) (ع - حـ أ)}$

= $\sqrt{٩ × (٩ - ٥) × (٩ - ٦) × (٩ - ٧)}$

= ٦ $\sqrt{٦}$

الحجم = $\frac{١}{٣}$ × ٦ $\sqrt{٦}$ × ١٥ = ٣٠ $\sqrt{٦}$ سم^٣

٢٨

قاعدة الهرم المنتظم مربعة مساحتها = ٧٠٠ سم^٢

∴ طول الضلع = ١٠ $\sqrt{٧}$ سم

الارتفاع = $\sqrt{(٢٠)^٢ - (٥ \sqrt{٧})^٢}$

= ١٥ سم

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × (٧٠٠) × ١٥

= ٣٥٠٠ سم^٣

٢٩

مساحة القاعدة = ٩ سم^٢

∴ طول ضلع القاعدة = ٣ سم

∴ أ حـ = ٣ $\sqrt{٢}$

∴ أ ن = ١,٥ $\sqrt{٢}$

∴ فى Δ م أ ن

∴ م ن (الارتفاع) = $\sqrt{٥^٢ - (١,٥ \sqrt{٢})^٢}$ = $\frac{١}{٢}$ $\sqrt{٨٢}$

∴ الحجم = $\frac{١}{٣}$ × ٩ × $\frac{١}{٢}$ $\sqrt{٨٢}$

= $\frac{٣}{٢}$ $\sqrt{٨٢}$ ≃ ١٣,٦ سم^٣

∵ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

∴ ٤٠٠ = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × ١٢

∴ مساحة القاعدة = ١٠٠

∴ طول ضلع القاعدة = ١٠ سم

، ارتفاعه الجانبى

= $\sqrt{٥^٢ + (١٢)^٢}$ = ١٣ سم

، ∵ مساحة الجانبية

= $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

= $\frac{١}{٢}$ × (٤ × ١٠) × ١٣ = ٣٦٠ سم^٢

٣٥

∵ الشكل السداسى منتظم

∴ $ن ب = ب حـ = ٤\sqrt{٣}$

∴ فى Δ م ن ب :

$م ب = \sqrt{٨^٢ + (٤\sqrt{٣})^٢}$

$= ٤\sqrt{٧}$

، فى Δ م ص ب :

$م ص = \sqrt{(٤\sqrt{٧})^٢ - (٢\sqrt{٣})^٢} = ١٠$ سم

∴ الارتفاع الجانبى = ١٠ سم

المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

$= \frac{١}{٢} \times ٢٤\sqrt{٣} \times ١٠$

$= ١٢٠\sqrt{٣}$ سم²

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

$= ١٢٠\sqrt{٣} + [\frac{٦}{٤} \times (٤\sqrt{٣})^٢$ ظتا $\frac{\pi}{٦}]$

$= ١٩٢\sqrt{٣}$ سم²

٣٦

∵ القاعدة مثلث متساوى الأضلاع تمر بروؤس دائرة طول نصف قطرها ١٢ سم

، ∵ $\frac{أ}{جا أ} = ٢$ نق (من قانون الجيب)

∴ $\frac{أ}{جا ٦٠} = ٢ \times ١٢$

∴ $أ = ١٢\sqrt{٣}$

∴ طول ضلع القاعدة $= ١٢\sqrt{٣}$

، من Δ أ ب ء :

∴ $أ ء = \sqrt{(١٢\sqrt{٣})^٢ - (٦\sqrt{٣})^٢} = ١٨$ سم

∴ $ن ء = \frac{١}{٣} أ ء = ٦$ سم

، من Δ م ن ء : ∴ $م ن = \sqrt{(١٠)^٢ - (٦)^٢} = ٨$ سم

، ∵ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

∴ حجم الهرم $= \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٢} (١٢\sqrt{٣})^٢$ جا ٦٠ × ٨

$= ٢٨٨\sqrt{٣}$ سم³

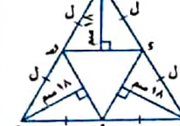
٣٧

بفرض أن ب و = ل

∴ ء هـ = $\frac{١}{٢}$ ب حـ = ل ، وبالمثل ء و = هـ و = ل

∴ Δ ء هـ و متساوى الأضلاع وطول ضلعه = ل

∴ الشبكة لمجسم هرم ثلاثى منتظم الوجوه



ويكون $\frac{١٨}{ل} =$ جا ٦٠°

∴ $ل = ١٢\sqrt{٣}$ سم

مساحته الكلية = ٤ × مساحة أى وجه فيها

$= ٤ \times \frac{١}{٢} \times (١٢\sqrt{٣})^٢$ جا ٦٠°

$= ٤٣٢\sqrt{٣}$ سم²

٣٨

الشكل بعد طيه يعطى هرم رباعى منتظم ارتفاعه الجانبى $= \sqrt{(١٣)^٢ - (٥)^٢} = ١٢$ سم

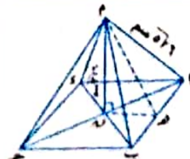
مساحة العبوة الواحدة

$= \frac{١}{٢} \times ٤ \times ١٠ \times ١٢ + (١٠)^٢ = ٢٤٠ + ١٠٠ = ٣٤٠$ سم²

(١) مساحة ١٠٠٠ عبوة = ٣٤٠٠٠٠ سم² = ٣٤ م²

(٢) التكلفة = ٣٤ × ١٥ = ٥١٠ جنيه

٣٩



Δ م ن أ قائم فى ن

∴ أ ن

$= \sqrt{(٦\sqrt{٥})^٢ - (٦\sqrt{٣})^٢}$

$= ٦\sqrt{٢}$ سم

∴ $أ حـ = ١٢\sqrt{٢}$ ∴ طول قطر المربع $= ١٢\sqrt{٢}$

∴ طول ضلع المربع = ١٢ سم

، ∵ هـ ن = $\frac{١}{٢}$ ب حـ = $\frac{١}{٢} \times ١٢ = ٦$ سم

∴ فى Δ م هـ ن

$م هـ = \sqrt{٦^٢ + (٦\sqrt{٣})^٢} = ١٢$ سم

∴ الارتفاع الجانبى = ١٢ سم

المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ × محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

$= \frac{١}{٢} \times (٤ \times ١٢) \times ١٢ = ٢٨٨$ سم²

المساحة الكلية $= ٢٨٨ + (١٢)^٢ = ٤٣٢$ سم²

الحجم $= \frac{١}{٣} \times (١٢)^٢ \times ٦\sqrt{٣} = ٢٨٨\sqrt{٣}$ سم³

٤٠

حجم النموذج = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

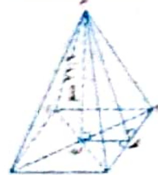
$= \frac{١}{٣} \times (١١.٥)^٢ \times ٧$

$= ٣٠٨.٥٨$ سم³

الكتلة = الكثافة × الحجم

$= ٣.٢ \times ٣٠٨.٥٨ \simeq ٩٨٧.٥$ جم

٤١



الارتفاع الجانبى

$م هـ = \sqrt{(٢١.٦)^٢ + (١٧.٥)^٢}$

$\simeq ٢٧.٨$ م

مساحة الزجاج = المساحة الجانبية للهرم

$= \frac{١}{٢} \times$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

$= \frac{١}{٢} \times (٤ \times ٣٥) \times ٢٧.٨$

$\simeq ١٩٤٦$ م²

ثالثًا مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

١



∵ ب ن = ب حـ = ٢ ل

∴ فى Δ م ب ن

$م ب = \sqrt{(ل\sqrt{٣})^٢ + (٢ ل)^٢}$

$= \sqrt{١٣}\ ل$

، فى Δ م ب ص

$م ص = \sqrt{(\sqrt{١٣}\ ل)^٢ - ل^٢} = ٢\sqrt{٣}\ ل$

∴ الارتفاع الجانبى $= ٢\sqrt{٣}\ ل$

المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

$= \frac{١}{٢} \times (٢ ل \times ٦) \times ٢\sqrt{٣}\ ل$

$= ١٢\sqrt{٣}\ ل^٢$ سم²

، مساحة القاعدة $= \frac{٦}{٤} \times (٢ ل)^٢ \times$ ظتا $\frac{\pi}{٦}$

$= ٦\sqrt{٣}\ ل^٢$ سم²

∴ المساحة الجانبية = ٢ مساحة القاعدة

٢



∵ طول قطر القاعدة = ل

∴ طول ضلع القاعدة $= \frac{ل\sqrt{٢}}{٢}$

∴ الارتفاع الجانبى

$= \sqrt{ل^٢ - (\frac{ل\sqrt{٢}}{٤})^٢} = \frac{\sqrt{١٤}}{٤}\ ل$

المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ × محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

$= \frac{١}{٢} \times \frac{ل\sqrt{٢}}{٢} \times ٤ \times \frac{\sqrt{١٤}}{٤}\ ل$

$= \frac{\sqrt{٧}}{٢}\ ل^٢$

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

$= \frac{\sqrt{٧}}{٢}\ ل^٢ + (\frac{ل}{٢}\sqrt{٢})^٢$

$= (\frac{\sqrt{٧}}{٢} + \frac{١}{٢})\ ل^٢ = \frac{ل^٢}{٢}(١ + \sqrt{٧})$

٣





∵ الهرم قائم

∴ ارتفاعه يلاقى القاعدة أ ب ح عند مركزها (م) وهى نقطة تلاقى المتوسطات.

وبفرض نصف قطر دائرة القاعدة = نق

وارتفاع الاسطوانة = ارتفاع الهرم = ع

مساحة قاعدة الاسطوانة = π نق^{٢}

، ∵ ظا ٦٠° = $\frac{١.٥ \text{ نق}}{ل}$

∴ ل (طول ضلع قاعدة الهرم) = نق $\sqrt{٣}$

∴ مساحة قاعدة الهرم = $\frac{١}{٢}$ (نق $\sqrt{٣}$)^{٢} جا ٦٠°

= $\frac{٣\sqrt{٣}}{٤}$ نق^{٢}

∴ $\frac{\text{حجم الهرم}}{\text{حجم الاسطوانة}} = \frac{\frac{١}{٣} \times \frac{٣\sqrt{٣}}{٤} \text{نق}^{٢} \times ع}{\pi \text{ نق}^{٢} ع} = \frac{\sqrt{٣}}{٤\pi}$

٤

نفرض أن طول ضلع قاعدته = طول حرفه الجانبى = ل

مساحة القاعدة = ل^{٢}

، ارتفاعه الجانبى

= $\frac{ل}{٢}\sqrt{٣}$

∴ مساحته الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

= $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ل × $\frac{ل}{٢}\sqrt{٣}$

= ل$^{٢}\sqrt{٣}$

المساحة الكلية = ل$^{٢}\sqrt{٣}$ + ل^{٢} = ل^{٢} ($\sqrt{٣}$ + ١)

∴ ل^{٢} ($\sqrt{٣}$ + ١) = ($\sqrt{٣}$ + ١) أ

∴ ل^{٢} = أ ∴ ل = $\sqrt{أ}$

∴ طول حرفه = $\sqrt{أ}$

إجابات تمارين 8

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

① (د) ② (ب) ③ (ب) ④ (ج) ⑤ (ج)
⑥ (د) ⑦ (أ) ⑧ (ب) ⑨ (أ) ⑩ (د)
⑪ (أ) ⑫ (د) ⑬ (أ) ⑭ (ب) ⑮ (ب)
⑯ (ج) ⑰ (ج) ⑱ (د) ⑲ (ج) ⑳ (ج)
(٢١) (ج) (٢٢) (د) (٢٣) (ب) (٢٤) (أ) (٢٥) (د)
(٢٦) (ب) (٢٧) (ج) (٢٨) (ب)
(٢٩) أولاً : (ب) ثانيًا : (ج) ثالثًا : (د)
رابعًا : (ب) خامسًا : (ب)
(٣٠) (د) (٣١) (د) (٣٢) (ب) (٣٣) (أ) (٣٤) (ج)
(٣٥) (ج) (٣٦) (د) (٣٧) (ج) (٣٨) (ج) (٣٩) (ب)
(٤٠) (أ) (٤١) (ج) (٤٢) (ج)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

① الحجم = $\frac{١}{٣} \times \pi$ (٩)^{٢} × ١٤

= ٣٧٨ π سم^{٣}

② نق = $\sqrt{(٢٦)^{٢} - (٢٤)^{٢}}$ = ١٠ سم

الحجم = $\frac{١}{٣} \times \pi$ (١٠)^{٢} × ٢٤

= ٨٠٠ π سم^{٣}

③ الارتفاع = $\sqrt{(١٣)^{٢} - ٥^{٢}}$ = ١٢ سم

الحجم = $\frac{١}{٣} \times \pi$ (٥)^{٢} × ١٢

= ١٠٠ π سم^{٣}

٢

① المساحة الجانبية = π (٦) × ١٢ = ٧٢ π سم^{٢}

، المساحة الكلية = π (٦) (٦ + ١٢)

= ١٠٨ π سم^{٢}

② طول الراسم (ل) = $\sqrt{(١٢)^{٢} + ٩^{٢}}$ = ١٥ سم

المساحة الجانبية = π (٩) × ١٥ = ١٣٥ π سم^{٢}

، المساحة الكلية = π (٩) (٩ + ١٥) = ٢١٦ π سم^{٢}

③ نق = $\sqrt{(١٥)^{٢} - (١٣)^{٢}}$ = ٢ $\sqrt{١٤}$ سم

المساحة الجانبية = π (٢ $\sqrt{١٤}$) × ١٥

= ٣٠ $\sqrt{١٤}$ π سم^{٢}

المساحة الكلية = π (٢ $\sqrt{١٤}$) (٢ $\sqrt{١٤}$ + ١٥)

= (٥٦ + ٣٠ $\sqrt{١٤}$) π سم^{٢}

٣

∴ نق = $\sqrt{ل^{٢} - ع^{٢}} = \sqrt{(١٧)^{٢} - (١٥)^{٢}}$ = ٨ سم

المساحة الجانبية = π نق ل = π (٨) × ١٧

= ١٣٦ π سم^{٢}

المساحة الكلية = π نق (نق + ل)

= π (٨) (٨ + ١٧) = ٢٠٠ π سم^{٢}

الحجم = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع

= $\frac{١}{٣} \times \pi \times ٨^{٢}$ × (١٥) = ٣٢٠ π سم^{٣}

٤

∵ المخروط قائم

∴ $\overline{م‍ه} \perp \overline{أه}$

∴ نق = $\sqrt{(٢٦)^{٢} - (٢٤)^{٢}}$ = ١٠ سم

∴ محيط القاعدة = ٢ π نق = ٢٠ π سم

، مساحة القاعدة = π نق^{٢} = ١٠٠ π سم^{٢}

٥

الشكل الموضح يصنع مخروط

محيط قاعدته = ٤٤ سم

∴ ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × نق = ٤٤

∴ نق = ٧ سم

، ∵ المخروط قائم ∴ $\overline{م‍ه} \perp \overline{أه}$

∴ ارتفاع المخروط = م‍ه = $\sqrt{(٢١)^{٢} - ٧^{٢}}$

= ١٤ $\sqrt{٢}$ سم

٦



∵ مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ نق ل

∴ ٢٠ π = $\frac{١}{٢}$ نق × ٨ π

∴ نق = ٥ سم وهو يمثل راسم المجسم

، ∵ طول قوس القطاع = محيط القاعدة

∴ ٨ π = ٢ π نق‵

∴ نق‵ = ٤ سم (وهو يمثل طول نصف قطر قاعدة المخروط)

، ∵ المخروط قائم ∴ $\overline{م‍ه} \perp \overline{أه}$

∴ ارتفاع المجسم = م‍ه = $\sqrt{(٥)^{٢} - (٤)^{٢}}$ = ٣ سم

٧

الشبكة تمثل مجسم لمخروط دائرى قائم

، ∵ مساحة الدائرة = ٤٩ π سم^{٢}

∴ π نق^{٢} = ٤٩ π

∴ طول نصف قطر القاعدة = ٧ سم

، ∵ المخروط قائم ∴ $\overline{م‍ه} \perp \overline{أه}$

∴ م‍ه = $\sqrt{(٢٥)^{٢} - (٧)^{٢}}$ = ٢٤ سم

∴ ارتفاع المخروط = ٢٤ سم

٨



طول نصف قطر دائرة القطاع نق = ١٢ سم يمثل راسم المخروط

، ∵ مساحة القطاع = ١٥٠ سم^{٢}

∴ $\frac{١}{٢}$ نق ل = ١٥٠

∴ $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ل = ١٥٠

∴ ل = ٢٥ سم وهو يمثل محيط قاعدة المخروط

∴ ٢٥ = ٢ π نق

∴ طول نصف قطر قاعدة المخروط = $\frac{٢٥}{٢\pi}$ سم

، ∵ المخروط قائم ∴ $\overline{أ م} \perp \overline{م ب}$

∴ ارتفاع المخروط = $\sqrt{(١٢)^{٢} - \left(\frac{٢٥}{٢\pi}\right)^{٢}}$ ≃ ١١,٣ سم

٩

∵ نق = ٥ سم

∴ طول راسمه (ل) = $\sqrt{٥^{٢} + (١٢)^{٢}}$ = ١٣ سم

المساحة الكلية = π (٥) (٥ + ١٣) = ٩٠ π

≃ ٢٨٢,٧ سم^{٢}

١٠

∵ محيط القاعدة = ٤٤ ∴ ٢ π نق = ٤٤

∴ نق = $\frac{٢٢}{\pi}$

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ × π $\left(\frac{٢٢}{\pi}\right)^{٢}$ × ٢٥

≃ ١٢٨٣,٨ سم^{٣}

١١

Δ أ ب م قائم الزاوية فى ب ، ق (∠ أ م ب) = ٣٠°

∴ أ م = ٢ × ٥ = ١٠ سم ∴ ل = ١٠ سم

المساحة الجانبية = π (٥) × ١٠ = ٥٠ π سم^{٢}

المساحة الكلية = π (٥) (٥ + ١٠) = ٧٥ π سم^{٢}

١٢

∵ المساحة الجانبية = π نق ل

∴ ٩٦ π = π (٨) ل ∴ ل = ١٢ سم

∴ ع = $\sqrt{(١٢)^{٢} - ٨^{٢}}$ = ٤ $\sqrt{٥}$ سم

الحجم = $\frac{١}{٣}$ × π نق^{٢} ع

= $\frac{١}{٣}$ × π (٨)^{٢} × ٤ $\sqrt{٥}$ ≃ ٥٩٩,٥ سم^{٣}

١٣

الأول (١) :

سعته = $\frac{١}{٣}$ π $\left(\frac{٥}{٢}\right)^{٢}$ × ١١ = $\frac{٢٧٥}{١٢}$ π سم^{٣}

الثانى (ب) :

سعته = $\frac{١}{٣}$ π $\left(\frac{١١}{٢}\right)^{٢}$ × ٥ = $\frac{٦٠٥}{١٢}$ π سم^{٣}

∴ الثانى (ب) أكبر من الأول (١) فى السعة

الفرق بين سعتيهما = $\frac{٦٠٥}{١٢}$ π − $\frac{٢٧٥}{١٢}$ π

= $\frac{٥٥}{٢}$ π سم^{٣}

١٤

ظا هـ = $\frac{أ ء}{أ ب}$ = $\frac{١٢}{ل}$ = $\frac{٤}{٥}$

∴ ل = ١٥ سم

نق = $\sqrt{(١٥)^{٢} - (١٢)^{٢}}$ = ٩ سم

المساحة الكلية = π نق (ل + نق)

= π (٩) (١٥ + ٩)

= ٢١٦ π سم^{٢}

١٥

∵ حجم الصهريج = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع

٣٢ π = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} × ٦

نق^{٢} = ١٦ ∴ نق = ٤ م

ل = $\sqrt{نق^{٢} + ع^{٢}}$ = $\sqrt{٤^{٢} + ٦^{٢}}$ = ٢ $\sqrt{١٣}$ م

مساحته الكلية = π نق (ل + نق)

= π × ٤ × $\left(٢\sqrt{١٣} + ٤\right)$

= $\left(١٦ + ٨\sqrt{١٣}\right)$ π ≃ ١٤٠,٩ م^{٢}

١٦

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع

= $\frac{١}{٣}$ π × (١٥)^{٢} × ٢٠

= ١٥٠٠ π سم^{٣} ≃ ٤٧١٢,٤ سم^{٣}

، ∵ طول ضلع القاعدة = ٤٨ ÷ ٤ = ١٢ سم

∴ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ × (١٢)^{٢} × ٤٠ = ١٩٢٠ سم^{٣}

∴ حجم المخروط > حجم الهرم.

١٧

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × ع

π ع^{٣} = $\frac{١}{٣}$ × π نق^{٢} ع ∴ نق^{٢} = ٣ ع^{٢}

المساحة الجانبية = π نق ل = π نق $\sqrt{نق^{٢} + ع^{٢}}$

= π نق $\sqrt{٣ ع^{٢} + ع^{٢}}$ = ٢ π نق ع

= محيط قاعدة الاسطوانة × الارتفاع

= المساحة الجانبية للاسطوانة.

١٨

∵ حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ × π (٢)^{٢} × ١٢ = ١٦ π سم^{٣}

∴ حجم الماء المزاح على شكل الاسطوانة = ١٦ π سم^{٣}

∴ ١٦ π = π نق^{٢} × ١ ∴ نق^{٢} = ١٦

∴ نق = ٤ سم

∴ طول قطر قاعدة الاناء = ٤ × ٢ = ٨ سم

١٩

حجم الشمع = حجم المكعب = (٢٠)^{٣} = ٨٠٠٠ سم^{٣}

، ∵ ١٢ ٪ من الشمع فقد أثناء عمليتى الصهر والتحويل

∴ حجم المخروط = ٨٨ ٪ × ٨٠٠٠

= $\frac{٨٨}{١٠٠}$ × ٨٠٠٠ = ٧٠٤٠ سم^{٣}

، ∵ حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع

∴ $\frac{١}{٣}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ × نق^{٢} × ٢١ = ٧٠٤٠

∴ نق^{٢} = ٣٢٠ ∴ نق = ٨ $\sqrt{٥}$ سم

٢٠

سعة المخروط = ٢,٢ لتر = ٢,٢ × ١٠٠٠ = ٢٢٠٠ سم^{٣}

الحجم = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع

$\frac{١}{٣}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ × نق^{٢} × ٢١ = ٢٢٠٠

نق^{٢} = ١٠٠ ∴ نق = ١٠ سم

٢١

طول راسم المخروط

= ١٨ سم

، ∵ محيط دائرة المخروط

= $\overset{\frown}{أ ب}$ = نق θ^{ر} = ١٨ × $\frac{٦٠° \times \pi}{١٨٠°}$

∴ ٢ π نق = ٦ π ∴ نق = ٣ سم

، ع = $\sqrt{ل^{٢} - نق^{٢}}$ = $\sqrt{(١٨)^{٢} - (٣)^{٢}}$ = ٣ $\sqrt{٣٥}$

∴ حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع

= $\frac{١}{٣}$ × π × (٣)^{٢} × ٣ $\sqrt{٣٥}$

= ١٦٧,٣ سم^{٣}

٢٢

طول راسم المخروط = ٢٠ سم

، محيط دائرة المخروط

= $\overset{\frown}{أ ب}$ = نق θ^{ر} = ٢٠ × $\frac{٩٠° \pi}{١٨٠°}$ = ١٠ π

∴ ٢ π نق = ١٠ π ∴ نق = ٥ سم

، ارتفاع المخروط ع = $\sqrt{(٢٠)^{٢} - ٥^{٢}}$ = ٥ $\sqrt{١٥}$

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع

= $\frac{١}{٣}$ × π × (٥)^{٢} × ٥ $\sqrt{١٥}$

= $\frac{١٢٥ \sqrt{١٥}}{٣}$ π سم^{٣}

٢٣

(١) الجسم الناشئ:

مخروط قائم طول نصف قطر

قاعدته = ٦ سم

وارتفاعه = ٨ سم

الحجم = $\frac{١}{٣}$ × π × ٦^{٢} × ٨ = ٩٦ π سم^{٣}

② الجسم الناشئ عبارة عن مخروطين قاعدتهما مشتركة طول نصف قطرها

$= \frac{٦ \times ٨}{١٠} = ٤,٨$ سم

∵ طول راسم الأول = ٨ سم

∴ $ع_١ = \sqrt{٨^٢ - (٤,٨)^٢} = ٦,٤$ سم

∵ طول راسم الثانى = ٦ سم

∴ $ع_٢ = \sqrt{٦^٢ - ٤,٨^٢} = ٣,٦$ سم

∴ حجم الجسم الناتج

$= \frac{١}{٣} \times \pi \times (٤,٨)^٢ \times ٦,٤ + \frac{١}{٣} \times \pi \times (٤,٨)^٢ \times ٣,٦$

$= ٧٦,٨ \pi$ سم^٣

٢٤

① حول محور السينات ينتج مخروط

$نق_١ = ٣$ وحدة طوليه ، $ع_١ = ٤$ وحدة طوليه

∴ الحجم $= \frac{١}{٣} \pi (٣)^٢ \times ٤$

$= ١٢ \pi$ وحدة مكعبة

② حول محور الصادات

$نق_٢ = ٤$ وحدة طوليه ، $ع_٢ = ٣$ وحدة طولية

الحجم $= \frac{١}{٣} \pi (٤)^٢ \times ٣$

$= ١٦ \pi$ وحدة مكعبة

٢٥

الجسم الناتج عبارة عن مخروطين لهما قاعدة مشتركة ومتطابقان

نصف قطرها $= \sqrt{١٠^٢ - ٦^٢}$

$= ٨$ سم

، ارتفاع كل منهما = ٦ سم

الحجم $= ٢ \times \frac{١}{٣} \pi (٨)^٢ \times ٦ = ٢٥٦ \pi$ سم^٣

٢٦

∵ $\overline{مهـ}$ متوسط خارج من رأس القائمة فى △ أمب

∴ أب (طول راسم المخروط) = ٢ × ٩ = ١٨ سم

المساحة الجانبية = π نق ل = π × ٦ × ١٨

$= ١٠٨ \pi$ سم^٢

، المساحة الكلية

= π نق (نق + ل)

= π × ٦ × (٦ + ١٨)

$= ١٤٤ \pi$ سم^٢

، الارتفاع $ع = \sqrt{(١٨)^٢ - ٦^٢} = ١٢\sqrt{٢}$ سم

الحجم $= \frac{١}{٣} \pi نق^٢ ع = \frac{١}{٣} \pi \times (٦)^٢ \times ١٢\sqrt{٢}$

$= ١٤٤\sqrt{٢} \pi$ سم^٣

٢٧

* المخروط الأول : $ل_١ = ٨٠$ سم ، $نق_١ = ٥٠$ سم

∴ المساحة الجانبية = π × ٥٠ × ٨٠ = ٤٠٠٠ π سم^٢

* المخروط الثانى : $ع_٢ = ١٢٠$ سم ، $نق_٢ = ٥٠$ سم

∴ $ل_٢ = \sqrt{(١٢٠)^٢ + (٥٠)^٢} = ١٣٠$ سم

∴ المساحة الجانبية = π × ٥٠ × ١٣٠

$= ٦٥٠٠ \pi$ سم^٢

المساحة المراد طلائها هى مجموع المساحتين الجانبيتين للمخروطين

$= ٤٠٠٠ \pi + ٦٥٠٠ \pi = ١٠٥٠٠ \pi$ سم^٢

$\simeq ٣٢٩٨٧$ سم^٢ $\simeq ٣,٣$ م^٢

∴ التكلفة = ٣,٣ × ٣٠٠ = ٩٩٠ جنيه

٢٨

حجم الهرم الخماسى $= \frac{١}{٣} \times$ مساحة القاعدة × الارتفاع

$= \frac{١}{٣} \left(\frac{٥}{٤} \times ١٠^٢ \times ظتا \frac{\pi}{٥}\right) \times ٤٢$

$= ٢٤٠٨,٦٧$ سم^٣

حجم المخروط = ٩٠ ٪ من حجم الهرم

$= \frac{٩٠}{١٠٠} \times ٢٤٠٨,٦٧ = ٢١٦٧,٨$ سم^٣

∴ $\frac{١}{٣} \pi نق^٢ ع = ٢١٦٧,٨$

$\frac{١}{٣} \times \pi \times (١٥)^٢ ع = ٢١٦٧,٨$

$ع = \frac{٢١٦٧,٨}{\frac{١}{٣} \times \pi \times ١٥^٢} \simeq ٩,٢$ سم

٢٩

حجم المخروط $= \frac{١}{٣} \pi نق^٢ ع = ١٠٠$ سم^٣

① بعد مضاعفة ارتفاعه

∴ حجم المخروط الناتج $= \frac{١}{٣} \pi نق^٢ (٢ ع)$

$= ٢ \left[\frac{١}{٣} \pi نق^٢ ع\right] = ٢ \times ١٠٠ = ٢٠٠$ سم^٣

② بعد مضاعفة طول نصف قطره

∴ حجم المخروط الناتج

$= \frac{١}{٣} \pi (٢ نق)^٢ (ع) = \frac{١}{٣} \pi \times ٤ نق^٢ ع$

$= ٤ \left[\frac{١}{٣} \pi نق^٢ ع\right] = ٤ \times ١٠٠ = ٤٠٠$ سم^٣

③ بعد مضاعفة ارتفاعه وطول نصف قطره

∴ حجم المخروط الناتج

$= \frac{١}{٣} \pi (٢ نق)^٢ (٢ ع) = \frac{١}{٣} \pi \times ٤ نق^٢ \times ٢ ع$

$= ٨ \left[\frac{١}{٣} \pi نق^٢ ع\right] = ٨ \times ١٠٠ = ٨٠٠$ سم^٣

ثالثًا مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

١

① (ب) ② (جـ) ③ (د)

④ أولًا : (جـ) ثانيًا : (ب)

⑤ (أ) ⑥ (د) ⑦ (جـ)

إرشادات لحل رقم **١**

① ∵ حجم نصف كرة = حجم المخروط

∴ $\frac{١}{٢} \left(\frac{٤}{٣} \pi نق^٣\right) = \frac{١}{٣} \pi نق^٢ ع$

∴ ع = ٢ نق

② ∵ $أم = \sqrt{(٥ك)^٢ - (٣ك)^٢} = ٤ك$

، ∵ حجم المخروط = ٩٦ π سم^٣

∴ $\frac{١}{٣} \pi \times (٣ك)^٢ \times ٤ك = ٩٦ \pi$

∴ $١٢ ك^٣ = ٩٦$

∴ $ك^٣ = ٨$

∴ ك = ٢

∴ نق = ٦ سم ، ع = ٨ سم ، ل = ١٠ سم

∴ المساحة الكلية = π نق (نق + ل)

$= \pi \times ٦ (٦ + ١٠) = ٩٦ \pi$ سم^٢

③ ∵ حجم المخروط = ٤٩ π

∴ $\frac{١}{٣} \pi نق^٢ ع = ٤٩ \pi$

∴ $\frac{١}{٣} \pi نق^٢ \times ٣ = ٤٩ \pi$

∴ $نق^٢ = ٤٩$ ∴ نق = ٧ سم

∴ طول قوس القطاع المطوى = ٢ π نق = ٢ π × ٧

$= ١٤ \pi$ سم

④ نفرض أن نصف قطر المخروط الأصغر $= نق_١$ وارتفاعه $= ع_١$ وراسمه $= ل_١$

ونصف قطر المخروط الأكبر $= نق_٢$ وارتفاعه $= ع_٢$ ، وراسمه $= ل_٢$

ومن هندسة الشكل نجد أن $\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{ل_١}{ل_٢} = \frac{نق_١}{نق_٢} = \frac{١}{٢}$

أولًا : $\frac{\text{حجم المخروط الأصغر}}{\text{حجم المخروط الأكبر}} = \frac{\frac{١}{٣} \pi نق_١^٢ ع_١}{\frac{١}{٣} \pi نق_٢^٢ ع_٢}$

$= \left(\frac{نق_١}{نق_٢}\right)^٢ \times \frac{ع_١}{ع_٢} = \left(\frac{١}{٢}\right)^٢ \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٨}$

ثانيًا : $\frac{\text{المساحة الجانبية للمخروط الأصغر}}{\text{المساحة الجانبية للمخروط الأكبر}}$

$= \frac{\pi نق_١ ل_١}{\pi نق_٢ ل_٢} = \frac{نق_١}{نق_٢} \times \frac{ل_١}{ل_٢} = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٤}$

⑤ من هندسة الشكل نجد أن :

مساحة قاعدة الهرم

$= \frac{١}{٢} \times \left(٢\sqrt{٣}\ \text{نق}\right)$

$\times ٣\ \text{نق} = ٣\sqrt{٣}\ \text{نق}^٢$

، مساحة قاعدة المخروط $= \pi\ \text{نق}^٢$

$\frac{\text{حجم الهرم الثلاثى المنتظم}}{\text{حجم أكبر مخروط يمكن وضعه بداخل الهرم}}$

$= \frac{\frac{١}{٣} \times ٣\sqrt{٣}\ \text{نق}^٢ \times ع}{\frac{١}{٣} \times \pi\ \text{نق}^٢ \times ع} = \frac{٣\sqrt{٣}}{\pi}$

⑥ من هندسة الشكل نجد أن :

مساحة قاعدة الهرم

$= ٣ \times \left(\frac{١}{٢}\ \text{نق}^٢\ \text{جا}\ ١٢٠^\circ\right)$

$= \frac{٣\sqrt{٣}}{٤}\ \text{نق}^٢$

، مساحة قاعدة المخروط $= \pi\ \text{نق}^٢$

$\therefore \frac{\text{حجم الهرم الثلاثى المنتظم}}{\text{حجم أصغر مخروط يحتويه}}$

$= \frac{\frac{١}{٣} \times \frac{٣\sqrt{٣}}{٤}\ \text{نق}^٢ \times ع}{\frac{١}{٣} \times \pi\ \text{نق}^٢ \times ع} = \frac{٣\sqrt{٣}}{٤\pi}$

⑦ بفرض أن نصف قطر قاعدة المخروط = نق

وارتفاعه = ع وحجمه ح

∴ بعد الزيادة يكون نصف قطر قاعدة المخروط

$= \frac{٣}{٢}$ نق ، الارتفاع $= \frac{٣}{٢}$ ع وحجمه حَ

$\therefore \frac{حَ}{ح} = \frac{\frac{١}{٣}\pi\left(\frac{٣}{٢}\ \text{نق}\right)^٢ \times \left(\frac{٣}{٢}\ ع\right)}{\frac{١}{٣}\pi \times \text{نق}^٢ \times ع}$

$= \frac{٩}{٤} \times \frac{٣}{٢} = \frac{٢٧}{٨}$

∴ حَ $= \frac{٢٧}{٨}$ ح ∴ حَ = ٣٣٧,٥٪ ح

2

ل١ : $٣ س - \sqrt{٣}\ ص = -٦$ بالقسمة على (-٦)

$\frac{س}{-٢} + \frac{ص}{٢\sqrt{٣}} = ١$

ل٢ : $\sqrt{٣}\ س + ص = ٢\sqrt{٣}$ بالقسمة على $(٢\sqrt{٣})$

$\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٢\sqrt{٣}} = ١$

∴ أ $(٠ ، ٢\sqrt{٣})$ ، ب(٢ ، ٠) ، حـ(-٢ ، ٠)

بالدوران حول محور السينات ينتج مخروطان لهما نفس القاعدة (نق = $٢\sqrt{٣}$ وحدة) ونفس الارتفاع (ع = ٢ وحدة)

∴ المخروطان متطابقان

∴ حجم الجسم الناشىء $= ٢ \times \frac{١}{٣} \times \pi \times \left(٢\sqrt{٣}\right)^٢ \times ٢$

$= ١٦\pi$ وحدة مكعبة.

3

① الجسم الناشىء من الدوران عبارة عن أسطوانة دائرية قائمة مضافًا إليها مخروط دائرى قائم ارتفاعه (٧ - ٤) = ٣ سم، ونصف قطر قاعدته = ٣,٥ سم

∴ الحجم $= \pi\ \text{نق}^٢\ ع_١ + \frac{١}{٣}\pi\ \text{نق}^٢\ ع_٢$

$= \pi \times (٣,٥)^٢ \times ٤ + \frac{١}{٣}\pi\ (٣,٥)^٢ \times ٣$

$= \frac{٢٤٥}{٤}\pi \simeq ١٩٢,٤$ سم^٣

② الجسم الناشىء عبارة عن مخروط دائرى قائم ناشىء من دوران Δ حـ أ ب ، نصف قطر قاعدته ٦ سم، وارتفاعه = ٨ سم مطروحًا منه مخروط دائرى قائم ناشىء عن دوران المثلث غير المظلل ، ونصف قطر دائرته = ٣ سم، وارتفاعه = ٨ سم

∴ الحجم $= \frac{١}{٣}\pi\ (٦)^٢ \times ٨ - \frac{١}{٣}\pi\ (٣)^٢ \times ٨$

$= ٧٢\pi \simeq ٢٢٦,٢$ سم^٣

③ الجسم الناشىء من الدوران حول $\overline{أب}$ عبارة عن أسطوانة دائرية قائمة نصف قطر قاعدتها = أهـ ، وارتفاعها = حـ ء مطروحًا منها مخروطين دائريين قائمين نصف قطر قاعدة كل منها = أهـ ، ارتفاعيهما حـ هـ ، هـ ء

ومن الشكل المقابل :

نلاحظ أن

حـ ء $= \sqrt{(١٥)^٢ + (٢٠)^٢} = ٢٥$ سم

، أهـ $= \frac{١٥ \times ٢٠}{٢٥} = ١٢$ سم

$= \pi\ (١٢)^٢ \times ٢٥ - \left(\frac{١}{٣}\pi\ (١٢)^٢ \times \text{حـ هـ}\right.$

$\left. + \frac{١}{٣}\pi\ (١٢)^٢ \times \text{هـ ء}\right)$

$= \pi \times (١٢)^٢ \times ٢٥ - \frac{١}{٣}\pi\ (١٢)^٢ \times (\text{حـ هـ} + \text{هـ ء})$

$= \pi \times (١٢)^٢ \times ٢٥ - \frac{١}{٣} \times \pi \times (١٢)^٢ \times ٢٥$

$= \pi \times (١٢)^٢ \times ٢٥ \times \frac{٢}{٣} = ٢٤٠٠\pi$

$\simeq ٧٥٣٩,٨$ سم^٣

إجابات تمارين 9

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (ب)	② (جـ)	③ (ب)	④ (ب)	⑤ (جـ)
⑥ (جـ)	⑦ (ب)	⑧ (ب)	⑨ (جـ)	⑩ (جـ)
⑪ (جـ)	⑫ (د)	⑬ (أ)	⑭ (د)	⑮ (د)
⑯ (جـ)	⑰ (جـ)	⑱ (جـ)	⑲ (ب)	⑳ (أ)
㉑ (أ)	㉒ (جـ)	㉓ (ب)	㉔ (د)	㉕ (أ)
㉖ (ب)	㉗ (ب)	㉘ (أ)	㉙ (د)	㉚ (د)
㉛ (د)	㉜ (ب)	㉝ (ب)	㉞ (أ)	㉟ (ب)
㊱ (د)	㊲ (د)	㊳ (أ)	㊴ (د)	㊵ (د)
㊶ (جـ)	㊷ (ب)	㊸ (أ)	㊹ (أ)	㊺ (ب)
㊻ (ب)	㊼ (د)	㊽ (ب)	㊾ (جـ)	㊿ (ب)
٥١ (د)	٥٢ (أ)	٥٣ (أ)	٥٤ (ب)	٥٥ (د)
٥٦ (د)	٥٧ (جـ)	٥٨ (أ)	٥٩ (د)	٦٠ (أ)
٦١ (د)	٦٢ (د)	٦٣ (جـ)	٦٤ (أ)	٦٥ (د)
٦٦ (أ)	٦٧ (د)	٦٨ (جـ)	٦٩ (ب)	٧٠ (د)
٧١ (جـ)	٧٢ (أ)	٧٣ (أ)	٧٤ (جـ)	٧٥ (ب)
٧٦ (جـ)	٧٧ (ب)	٧٨ (أ)	٧٩ (د)	٨٠ (ب)

ثانيا الأسئلة المقالية

1

① $(س - ٢)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ٢٥$

② $س^٢ + ص^٢ = ٩$

③ $(س - ٠)^٢ + (ص + ١)^٢ = ١٢$

④ $(س + ٤)^٢ + (ص + ٣)^٢ = \frac{٩}{٤}$

2

① $(س + ٢)^٢ + (ص - ٣)^٢ = (٤)^٢$

أى : $س^٢ + ص^٢ + ٤ س - ٦ ص - ٣ = ٠$

② نق $= \sqrt{(٥ - ٠)^٢ + (-١٢ - ٠)^٢} = ١٣$

∴ $(س - ٥)^٢ + (ص + ١٢)^٢ = (١٣)^٢$

أى : $س^٢ + ص^٢ - ١٠ س + ٢٤ ص = ٠$

③ نق $= \sqrt{(٧ - ٢)^٢ + (-٥ - ٢)^٢} = \sqrt{٦٥}$

∴ $(س - ٧)^٢ + (ص + ٥)^٢ = \left(\sqrt{٦٥}\right)^٢$

أى : $س^٢ + ص^٢ - ١٤ س + ١٠ ص + ٩ = ٠$

④ مركز الدائرة م $= \left(\frac{٦ + ٠}{٢} ، \frac{-٤ + ٢}{٢}\right)$

$= (٣ ، -١)$

، نق $= \sqrt{(٦ - ٣)^٢ + (-٤ + ١)^٢} = ٣\sqrt{٢}$

∴ $(س - ٣)^٢ + (ص + ١)^٢ = \left(٣\sqrt{٢}\right)^٢$

أى : $س^٢ + ص^٢ - ٦ س + ٢ ص - ٨ = ٠$

⑤ ل = ٣ ، ك = ٢

، ∵ الدائرة تمس محور السينات

∴ نق = |ك| = ٢ ، حـ = ل^٢ = ٩

∴ معادلة الدائرة هى :

$س^٢ + ص^٢ + ٦ س + ٤ ص + ٩ = ٠$

⑥ ل = -٣ ، ك = ٠

، ∵ الدائرة تمس محور الصادات

∴ نق = |ل| = ٣ ، حـ = ك^٢ = ٠

∴ معادلة الدائرة هى :

$س^٢ + ص^٢ - ٦ س = ٠$

⑦ $ل = -٥ ، ك = ٥$

، ∵ الدائرة تمس محورى الإحداثيات

∴ $نق = |ل| = |ك| = ٥ ، حـ = ٢٥$

∴ معادلة الدائرة هى :

$س^{٢} + ص^{٢} - ١٠ س + ١٠ ص + ٢٥ = ٠$

⑧ ∵ المماسان متوازيان عند أ ، ب

∴ $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة

∴ مركز الدائرة م $= \left(\frac{٦ + ٠}{٢} ، \frac{٢ - ١}{٢}\right)$

$= \left(٣ ، \frac{١}{٢}\right)$

∴ $نق = \sqrt{(٦ - ٣)^{٢} + \left(٢ - \frac{١}{٢}\right)^{٢}} = \frac{٣\sqrt{٥}}{٢}$

∴ معادلة الدائرة :

$(س - ٣)^{٢} + \left(ص - \frac{١}{٢}\right)^{٢} = \left(\frac{٣\sqrt{٥}}{٢}\right)^{٢}$

أى : $س^{٢} + ص^{٢} - ٦ س - ص - ٢ = ٠$

⑨ مركز الدائرة م $= (٥ ، ٠)$ ، $نق = ٣$

∴ معادلة الدائرة : $(س - ٥)^{٢} + (ص - ٠)^{٢} = (٣)^{٢}$

أى : $س^{٢} + ص^{٢} - ١٠ س + ١٦ = ٠$

⑩ ∵ الدائرة تمس المحورين ، تقع فى الربع الرابع

∴ $حـ = ل^{٢} = ك^{٢} = نق^{٢} = ٣٦$

، مركز الدائرة م $= (٦ ، -٦)$

∴ معادلة الدائرة هى :

$(س - ٦)^{٢} + (ص + ٦)^{٢} = (٦)^{٢}$

أى : $س^{٢} + ص^{٢} - ١٢ س + ١٢ ص + ٣٦ = ٠$

٣

① مركز الدائرة $= (٠ ، ٠)$

، $نق = \sqrt{٨} = ٢\sqrt{٢}$

② مركز الدائرة $= (-٣ ، ٥)$ ، $نق = ٧$

③ مركز الدائرة $= (-٤ ، ٠)$ ، $نق = ٣$

④ مركز الدائرة $= (٠ ، -٧)$ ، $نق = \sqrt{٢٤} = ٢\sqrt{٦}$

⑤ ∵ $ل = -٢ ، ك = ٣ ، حـ = -١٢$

∴ مركز الدائرة $= (٢ ، -٣)$

، $نق = \sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - حـ} = \sqrt{٤ + ٩ + ١٢} = ٥$

⑥ ∵ $ل = ٠ ، ك = ٢ ، حـ = -٨$

∴ مركز الدائرة $= (٠ ، -٢)$

، $نق = \sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - حـ} = \sqrt{٠ + ٤ + ٨} = ٢\sqrt{٣}$

⑦ ∵ $ل = -٢ ، ك = -١ ، حـ = ٠$

∴ مركز الدائرة $= (٢ ، ١)$

، $نق = \sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - حـ} = \sqrt{٤ + ١ - ٠} = \sqrt{٥}$

⑧ ∵ $ل = -٤ ، ك = ٠ ، حـ = -١٢$

∴ مركز الدائرة $= (٤ ، ٠)$

، $نق = \sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - حـ} = \sqrt{١٦ + ٠ + ١٢}$

$= ٢\sqrt{٧}$

٤

① ∵ $س^{٢} + ص^{٢} - ٤ س + ٨ ص = ٠$

∴ $ل = -٢ ، ك = ٤ ، حـ = ٠$

∴ $نق_{١} = \sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - حـ} = \sqrt{٤ + ١٦} = ٢\sqrt{٥}$

، ∵ $س^{٢} + ص^{٢} + ١٢ ص + ١٦ = ٠$

∴ $ل = ٠ ، ك = ٦ ، حـ = ١٦$

∴ $نق_{٢} = \sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - حـ} = \sqrt{٠ + ٣٦ - ١٦}$

$= ٢\sqrt{٥}$

∴ $نق_{١} = نق_{٢}$ ∴ الدائرتان متطابقتان

② ∵ $س^{٢} + ص^{٢} + ١٤ ص = ١$

∴ $ل = ٠ ، ك = ٧ ، حـ = -١$

∴ $نق_{١} = \sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - حـ} = \sqrt{٠ + ٤٩ + ١} = ٥\sqrt{٢}$

، ∵ $س^{٢} + ص^{٢} + ١٠ س - ٢٥ = ٠$

∴ $ل = ٥ ، ك = ٠ ، حـ = -٢٥$

∴ $نق_{٢} = \sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - حـ} = \sqrt{٢٥ + ٢٥} = ٥\sqrt{٢}$

∴ $نق_{١} = نق_{٢}$ ∴ الدائرتان متطابقتان

③ ∵ $س^{٢} + ص^{٢} - ٢ س + ٤ ص - ٣ = ٠$

∴ $ل = -١ ، ك = ٢ ، حـ = -٣$

∴ $نق_{١} = \sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - حـ} = \sqrt{١ + ٤ + ٣} = ٢\sqrt{٢}$

، ∵ $س^{٢} + ص^{٢} + ٦ س - ١١ = ٠$

∴ $ل = ٣ ، ك = ٠ ، حـ = -١١$

∴ $نق_{٢} = \sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - حـ} = \sqrt{٩ + ٠ + ١١} = ٢\sqrt{٥}$

∴ $نق_{١} \neq نق_{٢}$ ∴ الدائرتان غير متطابقتين

٥

① $د_{١}$: مركزها $(١٢ ، -١)$ ، $نق = ٢$

∴ معادلة الدائرة $د_{١}$ هى :

$(س - ١٢)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٤$

، $د_{٢}$: مركزها $(٦ ، ٢)$ ، $نق = ٢$

∴ معادلة الدائرة $د_{٢}$ هى :

$(س - ٦)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٤$

، $د_{٣}$: مركزها $(١ ، ٥)$ ، $نق = ١$

∴ معادلة الدائرة $د_{٣}$ هى :

$(س - ١)^{٢} + (ص - ٥)^{٢} = ١$

، $د_{٤}$: مركزها $(٠ ، ٠)$ ، $نق = ٣$

∴ معادلة الدائرة $د_{٤}$ هى : $س^{٢} + ص^{٢} = ٩$

، $د_{٥}$: مركزها $(-٩ ، ١)$ ، $نق = ٥$

∴ معادلة الدائرة $د_{٥}$ هى :

$(س + ٩)^{٢} + (ص - ١)^{٢} = ٢٥$

② ∵ $نق_{١} = نق_{٢} = ٢$ ∴ $د_{١}$ ، $د_{٢}$ متطابقتان.

٦

∵ $نق_{١} = نق_{٢} = ٢$ ∴ الدائرتان متطابقتان

، مركز الدائرة $د_{١} = (٠ ، ٠)$

، مركز الدائرة $د_{٢} = (٥ ، ٢)$

معادلة الدائرة $د_{١}$ هى : $س^{٢} + ص^{٢} = ٤$

، معادلة الدائرة $د_{٢}$ هى : $(س - ٥)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٤$

، معادلة الدائرة $د_{٣}$ هى : $(س + ٤)^{٢} + (ص - ٣)^{٢} = ٤$

٧

① ∵ المعادلة تشتمل على الحد س ص

∴ المعادلة لا تعبر عن دائرة.

② ∵ معامل $س^{٢}$ = معامل $ص^{٢} = ١$

، المعادلة خالية من س ص

، $ل^{٢} + ك^{٢} - حـ = (٤)^{٢} + (-٨)^{٢} + ١ = ٨١ > ٠$

∴ المعادلة تعبر عن دائرة.

③ ∵ معامل $س^{٢} \neq$ معامل $ص^{٢}$

∴ المعادلة لا تعبر عن دائرة.

④ $س^{٢} + ص^{٢} + \frac{٣}{٢} ص - ٤ = ٠$

∵ معامل $س^{٢}$ = معامل $ص^{٢} = ١$

، المعادلة خالية من س ص

، $ل^{٢} + ك^{٢} - حـ = (٠) + \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢} + ٤ = ٦\frac{١}{٤} > ٠$

∴ المعادلة تعبر عن دائرة.

⑤ $س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س ص - ٢ س + ٦ ص - ٤ = ٠$

∵ المعادلة تشتمل على الحد س ص

∴ المعادلة لا تعبر عن دائرة.

⑥ ∵ معامل $س^{٢}$ = معامل $ص^{٢} = ١$

، المعادلة خالية من س ص

، $ل^{٢} + ك^{٢} - حـ = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} + (١)^{٢} - ٧$

$= \frac{-٢٣}{٤} < ٠$

∴ المعادلة لا تعبر عن دائرة.

٧ ∵ معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = ١

، المعادلة خالية من س ص

، ل^{٢} + ك^{٢} − حـ = (١)^{٢} + (−٢)^{٢} − ٥ = ٠

∴ المعادلة لا تعبر عن دائرة.

٨ س^{٢} + ص^{٢} + ٤ س − ٣٢ = ٠

∵ معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = ١

، المعادلة خالية من س ص

، ل^{٢} + ك^{٢} − حـ = (٢)^{٢} + ٣٢ = ٣٦ > ٠

∴ المعادلة تعبر عن دائرة.

٩ س^{٢} − ص^{٢} + س − ص − ٧ = ٠

∵ معامل س^{٢} ≠ معامل ص^{٢}

∴ المعادلة لا تعبر عن دائرة.

٨

نق = $\sqrt{}$(٢ + ١)^{٢} + (−١ − ٣)^{٢} = ٥ وحدة طول.

∴ معادلة الدائرة الأولى د$_{١}$ هي :

(س − ٢)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٢٥

، معادلة الدائرة الثانية د$_{٢}$ هي :

(س + ١)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ٢٥

٩

∵ د$_{١}$ = س^{٢} + ص^{٢} − ٢ س + ٦ ص + ١ = ٠

∴ م$_{١}$ = (١ ، −٣)

، نق$_{١}$ = $\sqrt{}$(−١)^{٢} + (٣)^{٢} − ١ = ٣ وحدة طول.

، ∵ د$_{٢}$ = س^{٢} + ص^{٢} − ٢ س + ٦ ص + $\frac{١٥}{٤}$ = ٠

∴ م$_{٢}$ = (١ ، −٣)

، نق$_{٢}$ = $\sqrt{}$(−١)^{٢} + (٣)^{٢} − $\frac{١٥}{٤}$ = ٢,٥ وحدة طول.

١٠

(س − ٦)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٢٥

بالتعويض بالنقط أ ، ب ، حـ ، ء

• أ(٩ ، ٣)

∴ (٩ − ٦)^{٢} + (٣ + ١)^{٢} = ٢٥ = نق^{٢}

∴ النقطة أ تقع على الدائرة.

• ب(٧ ، ٥)

∴ (٧ − ٦)^{٢} + (٥ + ١)^{٢} = ٣٧ > نق^{٢}

∴ النقطة ب تقع خارج الدائرة.

• حـ(٣ ، ٣)

∴ (٣ − ٦)^{٢} + (٣ + ١)^{٢} = ٢٥ = نق^{٢}

∴ النقطة حـ تقع على الدائرة.

• ء(٢ ، −٣)

∴ (٢ − ٦)^{٢} + (−٣ + ١)^{٢} = ٢٠ < نق^{٢}

∴ النقطة ء تقع داخل الدائرة.

١١

نق = $\sqrt{}$(٢ + ١)^{٢} + (−١ − ٣)^{٢} = ٥

، معادلة الدائرة هي : (س − ٢)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٢٥

بالتعويض بالنقط ب ، حـ ، ء :

• ب(٢ ، ٤)

∴ (٢ − ٢)^{٢} + (٤ + ١)^{٢} = ٢٥ = نق^{٢}

∴ النقطة ب تقع على الدائرة.

• حـ(−٣ ، ١)

∴ (−٣ − ٢)^{٢} + (١ + ١)^{٢} = ٢٩ > نق^{٢}

∴ النقطة حـ تقع خارج الدائرة.

• ء(١ ، ٢)

∴ (١ − ٢)^{٢} + (٢ + ١)^{٢} = ١٠ < نق^{٢}

∴ النقطة ء تقع داخل الدائرة.

١٢

مركز الدائرة = (−٣ ، ٤) ، نق = ٢ وحدة طول.

١ طول العمود = [illegible] = ٤ > نق

∴ المستقيم ل خارج الدائرة.

٢ طول العمود = [illegible]

= ٢,٧ < نق

∴ المستقيم ل قاطع الدائرة.

٣ طول العمود = [illegible]

= ٣ = نق

∴ المستقيم ل مماس للدائرة.

١٣

مركز الدائرة م = [illegible]

[illegible]

∴ المستقيم قاطع للدائرة.

١٤

[illegible]

∴ الدائرتان متباعدتان.

١٥

[illegible]

، إذا كان الدائرتان متماستين من الداخل.

∴ |نق$_٢$ − نق$_١$| = م$_١$ م$_٢$ ∴ |٤ − $\sqrt{ك}$| = ١٢

∴ ٤ − $\sqrt{ك}$ = ١٢ (مرفوض) أ، ٤ − $\sqrt{ك}$ = −١٢

∴ $\sqrt{ك}$ = ٤ + ١٢ = ١٧ ∴ ك = ٢٨٩

١٨

نقطة التماس :

س^٢ + ص^٢ − ٦ س − ٤ ص + ١٢

= س^٢ + ص^٢ + ٢ س − ٤ ص − ٤

∴ − ٦ س − ٤ص + ١٢ = ٢ س − ٤ص − ٤

∴ − ٦ س − ٢ س = − ١٢ − ٤

∴ − ٨ س = −١٦ ∴ **س = ٢**

بالتعويض فى معادلة الدائرة الأولى عن س = ٢

∴ (٢)^٢ + ص^٢ − ٦ × ٢ − ٤ ص + ١٢ = ٠

ص^٢ − ٤ ص + ٤ = ٠ ∴ **ص = ٢**

الدائرتان متقاطعتان فى نقطة واحدة (٢ ، ٢)

∴ الدائرتان متماستان

معادلة الدائرة التى مركزها (٢ ، ٢) وتمر بمركز الدائرة الثانية (−١ ، ٢)

نق = $\sqrt{(٢ + ١)^٢ + (٠)^٢}$ = ٣

المعادلة (س − ٢)^٢ + (ص − ٢)^٢ = ٩

١٩

س^٢ + ص^٢ = ١

، ∵ (٢ أ جتا هـ ، ٢ أ جا هـ) ∈ للدائرة

∴ (٢ أ جتا هـ)^٢ + (٢ أ جا هـ)^٢ = ١

∴ ٤ أ^٢ (جتا^٢ هـ + جا^٢ هـ) = ١

∴ ٤ أ^٢ = ١ ∴ أ = ± $\frac{١}{٢}$

٢٠

① ∵ ل^٢ + ك^٢ − حـ > ٠

∴ (−١)^٢ + (−٢)^٢ + هـ − ٢ > ٠

∴ هـ > −٣ ∴ هـ ∈]−٣ ، ∞[

② ∵ ل^٢ + ك^٢ − حـ > ٠

∴ (٢)^٢ + (−٣)^٢ + هـ^٢ − ٤ > ٠

∴ هـ^٢ + ٩ > ٠ وهذا صحيح لجميع قيم هـ ∈ ح

∴ هـ ∈ ح

③ ∵ ل^٢ + ك^٢ − حـ > ٠

∴ (−٢ هـ)^٢ + (− هـ)^٢ − ١٠ (هـ − ١) > ٠

∴ ٤ هـ^٢ + هـ^٢ − ١٠ هـ + ١٠ > ٠

∴ هـ^٢ − ٢ هـ + ٢ > ٠

∴ (هـ − ١)^٢ + ١ > ٠ وذلك يتحقق لكل هـ ∈ ح

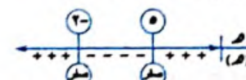
④ ∵ ل^٢ + ك^٢ − حـ > ٠

∴ (٣)^٢ + (٤)^٢ − هـ^٢ + ٣ هـ − ١٥ > ٠

∴ ٩ + ١٦ − هـ^٢ + ٣ هـ − ١٥ > ٠

∴ هـ^٢ − ٣ هـ − ١٠ < ٠

∴ (هـ + ٢) (هـ − ٥) < ٠



وذلك يتحقق لكل هـ ∈]−٢ ، ٥[

⑤ ∵ ل^٢ + ك^٢ − حـ > ٠

∴ هـ^٢ + (−٣ هـ)^٢ + ٢ هـ^٢ − ١٢ هـ + ٣ > ٠

∴ هـ^٢ + ٩ هـ^٢ + ٢ هـ^٢ − ١٢ هـ + ٣ > ٠

∴ ١٢ هـ^٢ − ١٢ هـ + ٣ > ٠

∴ ٤ هـ^٢ − ٤ هـ + ١ > ٠

∴ (٢ هـ − ١)^٢ > ٠ وذلك يتحقق لكل هـ ∈ ح

٢١

① ∵ ل^٢ + ك^٢ − حـ > ٠

∴ (−١)^٢ + (٢)^٢ − ٢ أ + ٣ > ٠

∴ −٢ أ > −٨ ∴ أ < ٤

∴ أ ∈]−∞ ، ٤[

② ∵ الدائرة تمر بنقطة الأصل

∴ حـ = ٠ ∴ ٢ أ − ٣ = ٠ ∴ أ = $\frac{٣}{٢}$

③ ∵ الدائرة تمس محور السينات

∴ حـ = ل^٢ ∴ ٢ أ − ٣ = (−١)^٢

∴ أ = ٢

④ ∵ الدائرة تمس محور الصادات

∴ حـ = ك^٢ ∴ ٢ أ − ٣ = (٢)^٢

∴ أ = $\frac{٧}{٢}$

⑤ م = (١ ، −٢)

∵ الدائرة تمس المستقيم :

٣ س + ٤ ص + ١٥ = ٠

∴ نق = $\frac{|٣ × ١ + ٤ × (−٢) + ١٥|}{\sqrt{(٣)^٢ + (٤)^٢}}$ = ٢

، ∵ $\sqrt{ل^٢ + ك^٢ − حـ}$ = نق

∴ $\sqrt{(−١)^٢ + (٢)^٢ − ٢ أ + ٣}$ = ٢ ، بالتربيع

∴ ١ + ٤ − ٢ أ + ٣ = ٤ ∴ أ = ٢

⑥ ∵ نق = ٧ وحدة طولية

∴ $\sqrt{(−١)^٢ + (٢)^٢ − ٢ أ + ٣}$ = ٧ ، بالتربيع

∴ ١ + ٤ − ٢ أ + ٣ = ٤٩ ∴ أ = − $\frac{٤١}{٢}$

٢٢

① ∵ الدائرة تمس المستقيم : س = ٢

∴ نق = ٣

∴ معادلة الدائرة هى :

(س − ٥)^٢ + (ص − ٤)^٢ = ٩

أى أن : س^٢ + ص^٢ − ١٠ س − ٨ ص + ٣٢ = ٠

② معادلة المستقيم هى : $\frac{ص − ٧}{س − ٣}$ = $\frac{٧ − ٣}{٣ + ١}$

أى أن : − س + ص − ٤ = ٠

∴ نق = $\frac{|−١ × ٥ + ١ × ٣ − ٤|}{\sqrt{(−١)^٢ + (١)^٢}}$ = ٣ $\sqrt{٢}$

∴ معادلة الدائرة هى :

(س − ٥)^٢ + (ص − ٣)^٢ = ١٨

أى أن : س^٢ + ص^٢ − ١٠ س − ٦ ص + ١٦ = ٠

③ نق = ٣ ، م = (٤ ، ٥)

∴ معادلة الدائرة هى :

(س − ٤)^٢ + (ص − ٥)^٢ = ٩

أى أن : س^٢ + ص^٢ − ٨ س − ١٠ ص + ٣٢ = ٠

④ ∵ الدائرة تمس محور السينات عند (٤ ، ٠) ، نق = ٥

∴ م = (٤ ، ٥) أ، (٤ ، −٥)

∴ معادلة الدائرة هى :

(س − ٤)^٢ + (ص − ٥)^٢ = ٢٥

أى أن : س^٢ + ص^٢ − ٨ س − ١٠ ص + ١٦ = ٠

أ، المعادلة هى : (س − ٤)^٢ + (ص + ٥)^٢ = ٢٥

أى أن : س^٢ + ص^٢ − ٨ س + ١٠ ص + ١٦ = ٠

⑤ ∵ الدائرة تمس محور الصادات

∴ م = ($\frac{١}{٢}$٣ ، −٤) أ، (−$\frac{١}{٢}$٣ ، −٤)

∴ معادلة الدائرة هى :

(س − $\frac{١}{٢}$٣)^٢ + (ص + ٤)^٢ = ١٢,٢٥

أى أن : س^٢ + ص^٢ − ٧ س + ٨ ص + ١٦ = ٠

أ، المعادلة هى :

(س + $\frac{١}{٢}$٣)^٢ + (ص + ٤)^٢ = ١٢,٢٥

أى أن : س^٢ + ص^٢ + ٧ س + ٨ ص + ١٦ = ٠

⑥ ∵ الدائرة تمس المحورين
، ∵ النقطة (−٢ ، −٤) فى الربع الثالث
∴ المركز م = (− نق ، − نق)
∴ معادلة الدائرة هى :
(س + نق)^2 + (ص + نق)^2 = نق^2
، ∵ (−٢ ، −٤) ∈ الدائرة
∴ (−٢ + نق)^2 + (−٤ + نق)^2 = نق^2
∴ ٤ + نق^2 − ٤ نق + ١٦ + نق^2 − ٨ نق = نق^2
∴ نق^2 − ١٢ نق + ٢٠ = ٠
∴ (نق − ٢) (نق − ١٠) = ٠
∴ نق = ٢ ومنها م = (−٢ ، −٢) أ، نق = ١٠
ومنها م = (−١٠ ، −١٠)
∴ توجد معادلتان هما :
(س + ٢)^2 + (ص + ٢)^2 = ٤
أى أن : س^2 + ص^2 + ٤ س + ٤ ص + ٤ = ٠
أ، (س + ١٠)^2 + (ص + ١٠)^2 = ١٠٠
أى أن : س^2 + ص^2 + ٢٠ س + ٢٠ ص + ١٠٠ = ٠

⑦ ∵ الدائرة تمس محور السينات عند (−٣ ، ٠)
، وتمس محور الصادات.
∴ نق = ٣
، توجد دائرتان مركزاهما (−٣ ، ٣) ، (−٣ ، −٣)
، معادلة الدائرة الأولى هى :
(س + ٣)^2 + (ص − ٣)^2 = ٩
أى أن : س^2 + ص^2 + ٦ س − ٦ ص + ٩ = ٠
، معادلة الدائرة الثانية هى :
(س + ٣)^2 + (ص + ٣)^2 = ٩
أى أن : س^2 + ص^2 + ٦ س + ٦ ص + ٩ = ٠

⑧ نق = $\sqrt{(٢)^2 + (٢\sqrt{٣})^2}$
∴ نق = ٤
∴ مركز الدائرة م
= (−٢ ، ٤)
∴ حـ = ٤ + ١٦ − ١٦ = ٤
∴ معادلة الدائرة هى :
س^2 + ص^2 + ٤ س − ٨ ص + ٤ = ٠

⑨ نق = $\sqrt{(١)^2 + (٢\sqrt{٦})^2}$ = ٥
∴ مركز الدائرة م
= (−٥ ، −١)
∴ حـ = ك^2 = ١
∴ معادلة الدائرة هى :
س^2 + ص^2 + ١٠ س + ٢ ص + ١ = ٠

⑩ ∵ الدائرة تمس محور السينات
∴ نق = |ك| ، حـ = ل^2
∴ معادلة الدائرة هى :
س^2 + ص^2 + ٢ ل س + ٢ ك ص + ل^2 = ٠
، ∵ (٢ ، ١) تحقق المعادلة
∴ ٤ + ١ + ٤ ل + ٢ ك + ل^2 = ٠
∴ ٤ ل + ٢ ك + ل^2 = −٥ (١)
، ∵ (−٥ ، ٢) تحقق المعادلة :
∴ ٢٥ + ٤ − ١٠ ل + ٤ ك + ل^2 = ٠
∴ −١٠ ل + ٤ ك + ل^2 = −٢٩ (٢)
من (١) ، (٢) بالطرح : ∴ ١٤ ل − ٢ ك = ٢٤
∴ ك = ٧ ل − ١٢ وبالتعويض فى (١)
∴ ٤ ل + ٢ (٧ ل − ١٢) + ل^2 = −٥
∴ ل^2 + ١٨ ل − ١٩ = ٠
∴ (ل + ١٩) (ل − ١) = ٠

∴ ل = −١٩ أ، ل = ١
ومنها ك = −١٤٥ أ، ك = −٥
∴ توجد دائرتان
∴ المعادلة الأولى هى :
س^2 + ص^2 − ٣٨ س − ٢٩٠ ص + ٣٦١ = ٠
والأخرى : س^2 + ص^2 + ٢ س − ١٠ ص + ١ = ٠

⑪ ∵ الدائرة تمس محور الصادات
∴ نق = |ل| ، حـ = ك^2
∴ معادلة الدائرة هى :
س^2 + ص^2 + ٢ ل س + ٢ ك ص + ك^2 = ٠
، ∵ (−٤ ، ٢) تحقق المعادلة
∴ ١٦ + ٤ − ٨ ل + ٤ ك + ك^2 = ٠
أى أن : −٨ ل + ٤ ك + ك^2 = −٢٠ (١)
، ∵ (−١ ، ٢) تحقق المعادلة :
∴ ١ + ٤ − ٢ ل + ٤ ك + ك^2 = ٠
أى أن : −٢ ل + ٤ ك + ك^2 = −٥ (٢)
بطرح (١) من (٢) :
∴ ٦ ل = ١٥ ∴ ل = $\frac{٥}{٢}$ ومن المعادلة (٢)
∴ −٥ + ٤ ك + ك^2 = −٥
∴ ك^2 + ٤ ك = ٠ ∴ ك (ك + ٤) = ٠
∴ ك = ٠ أ، ك = −٤ ∴ توجد دائرتان.
معادلة الأولى هى : س^2 + ص^2 + ٥ س = ٠
، معادلة الأخرى هى :
س^2 + ص^2 + ٥ س − ٨ ص + ١٦ = ٠

⑫ ∵ الدائرة يقع مركزها على محور السينات
∴ معادلة الدائرة هى :
س^2 + ص^2 + ٢ ل س + حـ = ٠
، ∵ (١ ، ٣) تحقق المعادلة
∴ ١ + ٩ + ٢ ل + حـ = ٠
ومنها ٢ ل + حـ = −١٠ (١)
، ∵ (٢ ، −٤) تحقق المعادلة :
∴ ٤ + ١٦ + ٤ ل + حـ = ٠
ومنها ٤ ل + حـ = −٢٠ (٢)
من (١) ، (٢) ∴ ل = −٥ ، حـ = صفر
∴ معادلة الدائرة هى س^2 + ص^2 − ١٠ س = ٠

⑬ م = (٦ ، ٨)
٢ نق = $\sqrt{(١٢)^2 + (١٦)^2}$
= ٢٠
∴ نق = ١٠
∴ معادلة الدائرة هى
(س − ٦)^2 + (ص − ٨)^2 = ١٠٠
أى أن : س^2 + ص^2 − ١٢ س − ١٦ ص = ٠

⑭ ∵ مركز الدائرة يقع على المستقيم ص − س = ١
∴ المركز (− ل ، − ك) يحقق المعادلة
أى أن : − ك + ل = ١ (١)
∴ معادلة الدائرة هى
س^2 + ص^2 + ٢ ل س + ٢ ك ص + حـ = ٠
∵ (−٢ ، ٤) تحقق معادلة الدائرة
∴ ٤ + ١٦ − ٤ ل + ٨ ك + حـ = ٠
ومنها −٤ ل + ٨ ك + حـ = −٢٠ (٢)
، ∵ (٦ ، ٨) تحقق معادلة الدائرة
∴ ٣٦ + ٦٤ + ١٢ ل + ١٦ ك + حـ = ٠
ومنها ١٢ ل + ١٦ ك + حـ = −١٠٠ (٣)
بطرح (٢) من (٣)
∴ ١٦ ل + ٨ ك = −٨٠
∴ ٢ ل + ك = −١٠ (٤)

ويجمع (٤) ، (١) : ∴ ٢ ل = −٩ ∴ ل = −٣

، من (١) : ∴ ك = −٤ ، من (٢) ∴ حـ = ٠

∴ معادلة الدائرة هى :

س^{٢} + ص^{٢} − ٦ س − ٨ ص = ٠

(١٥) ∵ نق^{٢} = ل^{٢} + ك^{٢} − حـ

∴ ٨٥ = ل^{٢} + ك^{٢} − حـ (١)

، معادلة الدائرة هى :

س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + حـ = ٠

، ∵ (−١ ، ٢) تحقق معادلة الدائرة

∴ ١ + ٤ − ٢ ل + ٤ ك + حـ = ٠

أى أن : −٢ ل + ٤ ك + حـ = −٥ (٢)

، ∵ (٣ ، ٤) تحقق معادلة الدائرة

∴ ٩ + ١٦ + ٦ ل + ٨ ك + حـ = ٠

أى أن : ٦ ل + ٨ ك + حـ = −٢٥ (٣)

من (٢) ، (٣) بالطرح : ٨ ل + ٤ ك = −٢٠

∴ ك = −٥ − ٢ ل (٤)

وبالتعويض فى (٢) :

∴ −٢ ل + ٤ (−٥ − ٢ ل) + حـ = −٥

∴ حـ = ١٥ + ١٠ ل (٥)

بالتعويض من (٤) ، (٥) فى معادلة (١)

∴ ٨٥ = ل^{٢} + (−٥ − ٢ ل)^{٢} − ١٥ − ١٠ ل

∴ ل^{٢} + ٢٥ + ٢٠ ل + ٤ ل^{٢} − ١٥ − ١٠ ل − ٨٥ = ٠

∴ ٥ ل^{٢} + ١٠ ل − ٧٥ = ٠

∴ ل^{٢} + ٢ ل − ١٥ = ٠

∴ (ل − ٣) (ل + ٥) = ٠ ، ومنها ل = ٣ أ، ل = −٥

∴ ك = −١١ أ، ك = ٥

، حـ = ٤٥ أ، حـ = −٣٥

∴ توجد معادلتان هما :

س^{٢} + ص^{٢} + ٦ س − ٢٢ ص + ٤٥ = ٠

أ، س^{٢} + ص^{٢} − ١٠ س + ١٠ ص − ٣٥ = ٠

(١٦) لإيجاد نقط تقاطع الدائرة مع محور السينات

نضع ص = ٠ فى معادلة الدائرة

∴ س^{٢} + ٢ س = ٠

س (س + ٢) = ٠

∴ س = ٠ أو س = −٢

∴ نقط التقاطع أ = (٠ ، ٠) ، ب = (−٢ ، ٠)

م = مركز الدائرة المطلوبة منتصف $\overline{\text{أب}}$

= $\left(\frac{٠ - ٢}{٢} ، \frac{٠}{٢}\right)$

م = (−١ ، ٠)

ونصف قطرها نق = م أ = $\sqrt{(-١)^{٢} + (٠)^{٢}}$ = ١

∴ معادلة الدائرة (س + ١)^{٢} + ص^{٢} = ١

٢٣

∵ ل = $\frac{١}{٢}$ ، ك = −٢ ، حـ = −٢

∴ نق^{٢} = $\frac{١}{٤}$ + ٤ + ٢ = ٦$\frac{١}{٤}$

∴ مساحة المثلث = $\frac{ن}{٢}$ نق^{٢} جا $\left(\frac{٣٦٠^{\circ}}{ن}\right)$

= $\frac{٣}{٢}$ × ٦$\frac{١}{٤}$ × جا ١٢٠° = $\frac{٧٥\sqrt{٣}}{١٦}$ وحدة مربعة.

٢٤

∵ ل = ٣ ، ك = −٦ ، حـ = ٥

∴ نق^{٢} = ٩ + ٣٦ − ٥ = ٤٠

∴ مساحة الشكل الخماسى المنتظم

= $\frac{ن}{٢}$ نق^{٢} جا $\left(\frac{٣٦٠^{\circ}}{ن}\right)$ = $\frac{٥}{٢}$ × ٤٠ × جا ٧٢°

≃ ٩٥٫١٠٥٦٥ وحده مربعة.

، ∵ الوحدة المربعة تمثل مساحة قدرها (٥)^{٢} = ٢٥ سم^{٢}

∴ مساحة الشكل الخماسى المنتظم

= ٩٥٫١٠٥٦٥ × ٢٥ ≃ ٢٣٧٨ سم^{٢}

٢٥

ل = −٥ ، ك = ٣ ، حـ = ٢٥

∴ نق^{٢} = ٢٥ + ٩ − ٢٥ = ٩

∴ مساحة الشكل السداسى المنتظم

= $\frac{ن}{٢}$ نق^{٢} جا $\left(\frac{٣٦٠^{\circ}}{ن}\right)$ = $\frac{٦}{٢}$ × ٩ × جا ٦٠°

= $\frac{٢٧\sqrt{٣}}{٢}$ وحدة مربعة.

٢٦

نق^{٢} = ١٦

∴ مساحة المضلع = $\frac{ن}{٢}$ نق^{٢} جا $\left(\frac{٣٦٠^{\circ}}{ن}\right)$

= $\frac{١٢}{٢}$ × ١٦ × جا ٣٠°

= ٤٨ وحدة مربعة.

٢٧

مركز الدائرة هو نقطة تقاطع القطرين

٣ س + ص = −٢ (١)

٤ س − ص = ١٦ (٢)

من (١) ، (٢) : س = ٢ ، ص = −٨

∴ مركز الدائرة م = (٢ ، −٨)

∴ معادلة الدائرة هى : (س − ٢)^{٢} + (ص + ٨)^{٢} = ٢٥

أى أن : س^{٢} + ص^{٢} − ٤ س + ١٦ ص + ٤٣ = ٠

، بالتعويض عن : س = ٥ ، ص = −٤

∴ الطرف الأيمن

= (٥)^{٢} + (−٤)^{٢} − ٤ (٥) + ١٦ (−٤) + ٤٣

= ٠ = الطرف الأيسر

∴ (٥ ، −٤) ∈ الدائرة.

٢٨

∵ $\vec{ر}$ = (١ ، ٥) + ك (١ ، ٢)

أى أن : $\frac{ص - ٥}{س - ١}$ = ٢

∴ ٢ س − ٢ = ص − ٥

∴ ٢ س − ص = −٣ (١)

، س + ص = ٠ (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ نقطة تقاطع القطرين هى : (−١ ، ١)

∴ مركز الدائرة م = (−١ ، ١)

∵ س^{٢} + ص^{٢} − ٢ س جتا هـ − ٢ ص جا هـ − ٨ = ٠

∴ ل = − جتا هـ ، ك = − جا هـ ، حـ = −٨

∴ نق = $\sqrt{\text{جتا}^{٢} \text{هـ} + \text{جا}^{٢} \text{هـ} + ٨}$

∴ نق = $\sqrt{١ + ٨}$ = ٣

∴ معادلة الدائرة المطلوبة هى :

(س + ١)^{٢} + (ص − ١)^{٢} = ٩

٢٩

نقط تقاطع الدائرتين :

س^{٢} + ص^{٢} − ١٠ س = س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س − ١٢

− ١٠ س − ٢ س = −١٢

− ١٢ س = −١٢

∴ س = ١ بالتعويض فى معادلة الدائرة الأولى.

∴ (١)^{٢} + ص^{٢} − ١٠ (١) = ٠

ص^{٢} = ٩ ∴ ص = ± ٣

∴ نقط التقاطع (١ ، ٣) ، (١ ، −٣)

(١) مركز الدائرة نقطة الأصل (٠ ، ٠)

بعد النقطة الأولى عن المركز

= $\sqrt{(١ - ٠)^{٢} + (٣ - ٠)^{٢}}$ = $\sqrt{١٠}$

، بعد النقطة الثانية عن المركز

= $\sqrt{(١ - ٠)^{٢} + (-٣ - ٠)^{٢}}$ = $\sqrt{١٠}$

∴ النقطتان تقعان على دائرة مركزها (٠ ، ٠)

وطول نصف قطرها $\sqrt{١٠}$ وحدة طول.

∴ معادلة الدائرة هى س^{٢} + ص^{٢} = ١٠

② مركز الدائرة النقطة (٢ ، ٠) :

بعد النقطة الأولى عن المركز

$= \sqrt{(١ - ٢)^{٢} + (٣ - ٠)^{٢}} = \sqrt{١٠}$

، بعد النقطة الثانية عن المركز

$= \sqrt{(١ - ٢)^{٢} + (-٣ - ٠)^{٢}} = \sqrt{١٠}$

∴ النقطتان تقعان على دائرة مركزها (٢ ، ٠)

وطول نصف قطرها $\sqrt{١٠}$ وحدة طول.

∴ معادلة الدائرة هى : $(س - ٢)^{٢} + ص^{٢} = ١٠$

٣٠

∵ $م١ = \sqrt{(-٥)^{٢} + (-٤)^{٢}} = \sqrt{٤١}$

، $م ب = \sqrt{(-٤)^{٢} + (-٥)^{٢}} = \sqrt{٤١}$

، $م حـ = \sqrt{(-٤)^{٢} + (٥)^{٢}} = \sqrt{٤١}$

∴ م ١ = م ب = م حـ

∴ ١ ، ب ، حـ تقع على دائرة واحدة

، معادلة الدائرة هى :

$(س + ٥)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = ٤١$

٣١

معادلة الدائرة هى :

$س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + حـ = ٠$

، ∵ النقط ١ ، ب ، حـ تقع على الدائرة

∴ ٩ + ٤ + ٦ ل − ٤ ك + حـ = ٠ (١)

، ٩ + ٦٤ + ٦ ل + ١٦ ك + حـ = ٠ (٢)

، ١ − ٢ ل + حـ = ٠ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) :

∴ ل = −٣ ، ك = −٣ ، حـ = −٧

∴ مركز الدائرة م = (٣ ، ٣)

∴ معادلة الدائرة هى :

$س^{٢} + ص^{٢} - ٦ س - ٦ ص - ٧ = ٠$

، ∵ منتصف $\overline{١ب} = \left(\frac{٣ + ٣}{٢} ، \frac{-٢ + ٨}{٢}\right)$

= (٣ ، ٣) = م

∴ $\overline{١ب}$ قطر فى الدائرة

٣٢

$١ب = \sqrt{(٨ - ٠)^{٢} + (٠ - ٦)^{٢}} = ١٠$

$ب حـ = \sqrt{٠ + (٦ - ٠)^{٢}} = ٦$

$١ حـ = \sqrt{(٨ - ٠)^{٢} + ٠} = ٨$

∵ $(١ب)^{٢} = (ب حـ)^{٢} + (١ حـ)^{٢}$

∴ Δ ١ب حـ قائم الزاوية فى حـ

∴ $\overline{١ب}$ قطر فى الدائرة المارة برؤوسه

مركز الدائرة م = $\left(\frac{٨ + ٠}{٢} ، \frac{٠ + ٦}{٢}\right)$

= (٤ ، ٣) ، نق = ٥

المعادلة $(س - ٤)^{٢} + (ص - ٣)^{٢} = ٢٥$

٣٣

$١ب = \sqrt{(٦)^{٢} + (٠)^{٢}} = ٦$

، $ب حـ = \sqrt{(٣)^{٢} + (-٣\sqrt{٣})^{٢}} = ٦$

، $حـ ١ = \sqrt{(-٣)^{٢} + (-٣\sqrt{٣})^{٢}} = ٦$

∴ Δ ١ب حـ متساوى الأضلاع

∴ مركز الدائرة = $\left(\frac{-٢ + ٤ + ١}{٣} ، \frac{٠ + ٠ + ٣\sqrt{٣}}{٣}\right)$

= $(١ ، \sqrt{٣})$

∴ نق = م ١ = $\sqrt{(-٣)^{٢} + (-\sqrt{٣})^{٢}} = ٢\sqrt{٣}$

∴ معادلة الدائرة هى :

$(س - ١)^{٢} + (ص - \sqrt{٣})^{٢} = ١٢$

٣٤

$س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + حـ = ٠$

، ∵ (٢ ، −١) ، (−٢ ، ٠) ، (٠ ، −٩) تحقق معادلة الدائرة.

∴ ٤ + ١ + ٤ ل − ٢ ك + حـ = ٠

أى أن : ٤ ل − ٢ ك + حـ = −٥ (١)

، ٤ − ٤ ل + حـ = ٠ (٢)

، ٨١ − ١٨ ك + حـ = ٠ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) : ∴ ل = ١ ، حـ = ٠

ك = $\frac{٩}{٢}$

∴ المعادلة هى : $س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س + ٩ ص = ٠$

، مركز الدائرة م = (−١ ، −٤٫٥)

، نق = $\sqrt{١ + (٤٫٥)^{٢}} = \frac{\sqrt{٨٥}}{٢}$ وحدة طول

٣٥

بفرض أن الدائرة التى تمر بـ ١ ، ب ، حـ هى :

$س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + حـ = ٠$

∴ النقط ١ ، ب ، حـ تحقق معادلة الدائرة

∴ ٩ + ٦ ل + حـ = ٠ (١)

، ٨١ + ١٨ ك + حـ = ٠ (٢)

، ١ + ٢ ك + حـ = ٠ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) :

∴ ل = −٣ ، ك = −٥ ، حـ = ٩

∴ معادلة الدائرة هى :

$س^{٢} + ص^{٢} - ٦ س - ١٠ ص + ٩ = ٠$

وبالتعويض بالنقطة ء = (−١ ، ٢)

∴ الطرف الأيمن

$= (-١)^{٢} + (٢)^{٢} - ٦ (-١) - ١٠ (٢) + ٩ = ٠$

= الطرف الأيسر

∴ النقطة ء ∈ الدائرة.

أى أن الشكل ١ب حـ ء رباعى دائرى.

٣٦

① $س^{٢} + ص^{٢} - ٨ س + ٦ ص = ٠$

② $س^{٢} + ص^{٢} - ٤ س + ٤ ص + ٤ = ٠$

③ $س^{٢} + ص^{٢} - ١٢ ص + ٢٠ = ٠$

④ $س^{٢} + ص^{٢} - ١٢ س - ٤ ص + ٣٦ = ٠$

⑤ $س^{٢} + ص^{٢} - ١٢ س - ١٤ ص + ٣٦ = ٠$

⑥ $س^{٢} + ص^{٢} - ٤ س - ٢ ص - ١١ = ٠$

⑦ $س^{٢} + ص^{٢} - ٢٤ س - ٨\sqrt{٣} ص + ١٤٤ = ٠$

⑧ $س^{٢} + ص^{٢} - ٨ س - ٤ ص + ١٦ = ٠$

⑨ $س^{٢} + ص^{٢} - ٢ س - ٨ ص + ١٦ = ٠$

٣٧

∵ معادلة المستقيم هى :

$\frac{س}{٣} + \frac{ص}{٤} = ١$

∴ ء و = ٣ ، هـ و = ٤ ، هـ ء = ٥

ويفرض ١ء = ل ، ءب = ك

∴ ء١ = ٣ − ل

∴ ب هـ = ٤ − ك

ومن هندسة الشكل نجد أن ل = ك

، ١ء = ء حـ ، ب هـ = هـ حـ

∴ ء حـ = ٣ − ل ، هـ حـ = ٤ − ك = ٤ − ل

، ∵ ء حـ + هـ حـ = ٥ وحدة

∴ ٣ − ل + ٤ − ل = ٥

∴ ل = ١ ومنها ك = ١ ∴ نق = ١

∴ مركز الدائرة (١ ، ١)

∴ معادلة الدائرة هى $(س - ١)^{٢} + (ص - ١)^{٢} = ١$

أى أن : $س^{٢} + ص^{٢} - ٢ س - ٢ ص + ١ = ٠$

٣٨

بفرض أن مركز الدائرة = (س ، ٠)

، ∵ ميل $\overline{م١}$ × ميل $\overline{١ب}$ = −١

∴ $\frac{٣}{س - ٣} \times \frac{٣}{٤} = -١$

∴ س − ٢ = $\frac{٩}{٤}$ ∴ س = ٤ $\frac{١}{٤}$

∴ مركز الدائرة م = (٤ $\frac{١}{٤}$ ، ٠)

، ∵ نق = م أ = $\sqrt{(٤\frac{١}{٤} - ٢)^{٢} + (٠ - ٣)^{٢}}$ = ٣ $\frac{٣}{٤}$

معادلة الدائرة هى :

(س − ٤ $\frac{١}{٤}$)^{٢} + ص^{٢} = (٣ $\frac{٣}{٤}$)^{٢}

أى أن : س^{٢} + ص^{٢} − $\frac{١٧}{٢}$ س + ٤ = ٠

أى أن : ٢ س^{٢} + ٢ ص^{٢} − ١٧ س + ٨ = ٠

٢٩

من هندسة الشكل :

(٤)^{٢} = ٨ × ب ء

∴ ب ء = ٢

∴ النقطة ب (١٠ ، ٠)

، ∵ Δ أ ب حـ قائم فى أ

∴ ب و هو قطر فى الدائرة التى تمر بالنقط أ ، ب ، و

∴ مركز الدائرة هى : (٥ ، ٠) ، نق = ٥ وحدة

∴ معادلة الدائرة هى : (س − ٥)^{٢} + ص^{٢} = ٢٥

أى أن : س^{٢} + ص^{٢} − ١٠ س = ٠

ثالثا مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

١

① (د) ② (جـ) ③ (ب) ④ (د)

⑤ (ب) ⑥ (جـ) ⑦ (ب) ⑧ (ب)

إرشادات لحل رقم ١

① بوضع ك − ٢ = ٢ − ك

∴ ٢ ك = ٤ ∴ ك = ٢

عندئذ المعادلة تصبح −٢ س + ٦ ص − ٢٥ = ٠

«معادلة خط مستقيم»

، عند ك ≠ ٢ فإن معامل س^{٢} ≠ معامل ص^{٢}

∴ المعادلة لا تمثل دائرة مهما كانت قيمة ك

② ∵ قاعدة المخروط معادلتها س^{٢} + ص^{٢} = ٦٤

∴ طول نصف قطر قاعدة المخروط = ٨ وحدة طولية.

∴ حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع

= $\frac{١}{٣}$ × π × ٦٤ × ٦ = ١٢٨ π وحدة مكعبة.

③ ∵ مركز الدائرة = (٧ ، ٥) ، نق = ٤ وحدة طولية.

∴ البعد بين المركز ومحور الصادات

= ٧ وحدات طولية.

∴ أقل بُعد بين محور الصادات وأى نقطة على الدائرة = ٧ − ٤ = ٣ وحدات طولية.

④ ∵ مركز الدائرة التى تمس محورى الإحداثيات لابد وأن يقع على المستقيم ص = س

أ، ص = − س



، ∵ الدائرة س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥ تقطع المستقيمان ص = س ، ص = − س

فى أربع نقاط كما بالشكل المقابل.

∴ عدد الدوائر يساوى ٤

⑤ من هندسة الشكل



∵ Δ أ و حـ قائم فى و

، و ب ⊥ أ حـ

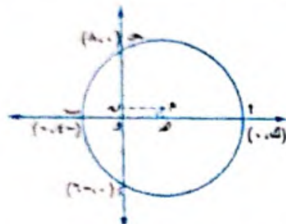
∴ (و ب)^{٢} = ٨ × ٢ = ١٦

∴ و ب = ٤ وحدة طولية.

، ∵ مركز الدائرة = (٠ ، ٠)

∴ معادلة الدائرة هى س^{٢} + ص^{٢} = ١٦

⑥



∵ و ب × و أ = و حـ × و ء

∴ ٤ × و أ = ٨ × ٦

∴ و أ = ١٢

∴ أ = (١٢ ، ٠)

، برسم م هـ ⊥ أ ب ، م ن ⊥ ء حـ

∴ هـ منتصف أ ب ∴ هـ = (٤ ، ٠)

، ن منتصف ء حـ ∴ ن = (٠ ، ١)

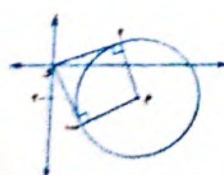
∴ م = (٤ ، ١)

∴ نق = م أ = $\sqrt{(١٢ - ٤)^{٢} + (٠ - ١)^{٢}}$ = $\sqrt{٦٥}$

∴ معادلة الدائرة هى

(س − ٤)^{٢} + (ص − ١)^{٢} = ٦٥

⑦



∵ مركز الدائرة المعلومة (م) = (٥ ، −٢)

، ∵ م أ ⊥ أ و ، م ب ⊥ و ب

∴ الشكل أ م ب و تمر برؤوسه دائرة طول قطرها و م ومركزها هو منتصف م و

∴ المركز ($\frac{٥ + ٠}{٢}$ ، $\frac{٠ - ٢}{٢}$) = ($\frac{٥}{٢}$ ، −١)

وهى نفس الدائرة التى تمر برؤوس Δ أ و ب

⑧ بالنسبة للدائرة الأولى

م$_{١}$ = (٥ ، ٥)

، نق$_{١}$ = ٥ $\sqrt{٢}$

، بالنسبة للدائرة الثانية

م$_{٢}$ = (−٣ ، −١) ، نق$_{٢}$ = ٥ $\sqrt{٢}$

، ∵ طول م$_{١}$ م$_{٢}$ = $\sqrt{(٥ + ٣)^{٢} + (٥ + ١)^{٢}}$

= ١٠ وحدة طولية

، ∵ (م$_{١}$ م$_{٢}$)^{٢} = (أ م$_{١}$)^{٢} + (أ م$_{٢}$)^{٢}

∴ الشكل أ م$_{١}$ ب م$_{٢}$ مربع

∴ أ ب = ١٠ وحدات طولية

٢

∵ الدائرة ن تمس محورى الإحداثيات فى الربع الثالث

∴ ن هى (− ل ، − ل) ، تحقق معادلة المستقيم

ص = ٢ س + ١

∴ − ل = −٢ ل + ١ ∴ ل = ١

∴ مركز الدائرة ن هو (−١ ، −١)

∴ معادلة الدائرة ن هى

(س + ١)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ١

ومنها س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س + ٢ ص + ١ = ٠

، ∵ الدائرة م تمس محورى الإحداثيات فى الربع الثانى

∴ م هى (− ك ، ك) ، تحقق معادلة المستقيم

ص = ٢ س + ١

∴ ك = −٢ ك + ١ ∴ ك = $\frac{١}{٣}$

∴ مركز الدائرة م هى (−$\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$)

∴ معادلة الدائرة م هى

(س + $\frac{١}{٣}$)^{٢} + (ص − $\frac{١}{٣}$)^{٢} = ($\frac{١}{٣}$)^{٢}

أى أن س^{٢} + ص^{٢} + $\frac{٢}{٣}$ س − $\frac{٢}{٣}$ ص + $\frac{١}{٩}$ = ٠

٣

∵ المثلث متساوى الأضلاع وطول ضلعه ٦ وحدة طول

∴ حـ ص = ٣ وحدة طول

، ا ص = ٣ $\sqrt{٣}$ وحدة طول

، ∵ م نقطة تلاقى متوسطات المثلث

∴ م ص = $\frac{٣\sqrt{٣}}{٣}$ = $\sqrt{٣}$ وحدة طول.

∴ مركز الدائرة هو (٣ ، $\sqrt{٣}$) ، نق = $\sqrt{٣}$

∴ معادلة الدائرة هى :

(س − ٣)^{٢} + (ص − $\sqrt{٣}$)^{٢} = ٣

٤

نرسم : م ى ⊥ و ص

ويفرض أن طول نصف قطر الدائرة م هو نق

فى △ م ى هـ :

(٨ + نق)^{٢} = (٨)^{٢} + (٨ − نق)^{٢}

∴ ٦٤ + نق^{٢} + ١٦ نق = ٦٤ + ٦٤ + نق^{٢} − ١٦ نق

∴ ٣٢ نق = ٦٤ ∴ نق = ٢

∴ مركز الدائرة م هو : (٨ ، ٢)

∴ معادلة الدائرة م هى :

(س − ٨)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ٤

اى أن : س^{٢} + ص^{٢} − ١٦ س − ٤ ص + ٦٤ = ٠

تطبيقات حياتية

١

نق = $\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - حـ}$ = $\sqrt{(٣)^{٢} + (-٤)^{٢} - ١١}$

= $\sqrt{١٤}$ وحدة طول.

∴ مساحة الدائرة = π نق^{٢} = ١٤ π

، ∵ الوحدة المربعة فى المستوى تمثل (٥)^{٢} = ٢٥ م^{٢}

∴ مساحة الميدان = ١٤ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٢٥ = ١١٠٠ م^{٢}

٢

معادلة الدائرة هى : (س − ٧)^{٢} + (ص + ٩)^{٢} = (٣٠)^{٢}

، ب ا = $\sqrt{(٢٥ - ٧)^{٢} + (-٣٠ + ٩)^{٢}}$ ≃ ٢٧,٦٦

، ∵ ب ا < نق

∴ يمكن للرادار رصد السفينة الواقعة عند «ب»

٣

∵ ل = −٢ ، ك = ٦ ، حـ = −٦٠

∴ نق^{٢} = ٤ + ٣٦ + ٦٠ = ١٠٠

∴ مساحة الشكل الثمانى المنتظم

= $\frac{ن}{٢}$ نق^{٢} حا ($\frac{٣٦٠°}{ن}$) = $\frac{٨}{٢}$ × ١٠٠ × حا ٤٥°

= ٢٠٠ $\sqrt{٢}$ وحدة مربعة.

٤

① ∵ البكرة ا تمس محورى الإحداثيات ، وطول نصف قطرها يساوى ٥ وحدات.

∴ مركز دائرتها النقطة م (٥ ، ٥)

∴ معادلتها هى : (س − ٥)^{٢} + (ص − ٥)^{٢} = ٢٥

أى أن :

س^{٢} + ص^{٢} − ١٠ س − ١٠ ص + ٢٥ = ٠

② ∵ معادلة دائرة البكرة (ب) :

س^{٢} + ص^{٢} + ١٤ س + ٤٥ = ٠

∴ ل = ٧ ، ك = ٠ ، حـ = ٤٥

، نق = $\sqrt{٤٩ - ٤٥}$ = ٢

وبكون مركزها النقطة ن (−٧ ، ٠) وطول نصف قطرها يساوى ٢ وحدة.

∴ البعد بين مركزى البكرتين = م ن

= $\sqrt{(٥ + ٧)^{٢} + (٥)^{٢}}$ = ١٣ وحدة

∵ كل وحدة فى المستوى الاحداثى تمثل ٦ سم

∴ البعد بين البكرتين = ١٣ × ٦ = ٧٨ سم

٥

∵ أقصى ارتفاع بين الحافتين = ١٠ وحدات

∴ ٢ نق$_{١}$ + ٢ نق$_{٢}$ = ١٠ ∴ نق$_{١}$ + نق$_{٢}$ = ٥

، مركز الترس الأكبر هو (٥ ، ٤)

∴ مركز الترس الأصغر هو (٥ ، ٩)

نق$_{١}^{٢}$ = ٢٥ + ١٦ − ٣٢ = ٩

∴ نق$_{١}$ = ٣ وحدة ∴ نق$_{٢}$ = ٢ وحدة

∴ معادلة الترس الأصغر هى

(س − ٥)^{٢} + (ص − ٩)^{٢} = ٤

أى أن : س^{٢} + ص^{٢} − ١٠ س − ١٨ ص + ١٠٢ = ٠

النمــوذج الأول

امتحان الكترونى ١

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ مخروط قائم طول راسمه يساوى طول قطر قاعدته فإن مساحته الكلية ....

(أ) ٤ π نق^٢ (ب) ٣ π نق^٢ (جـ) ٣ π نق^٣ (د) ٤ π نق^٣

---

٢ إذا كانت أ ، ب ، حـ ثلاث نقط تعين مستوى فإن ....

(أ) أب = ب حـ = حـ أ (ب) أب + ب حـ = أ حـ

(جـ) أب + ب حـ < أ حـ (د) أب + ب حـ > أ حـ

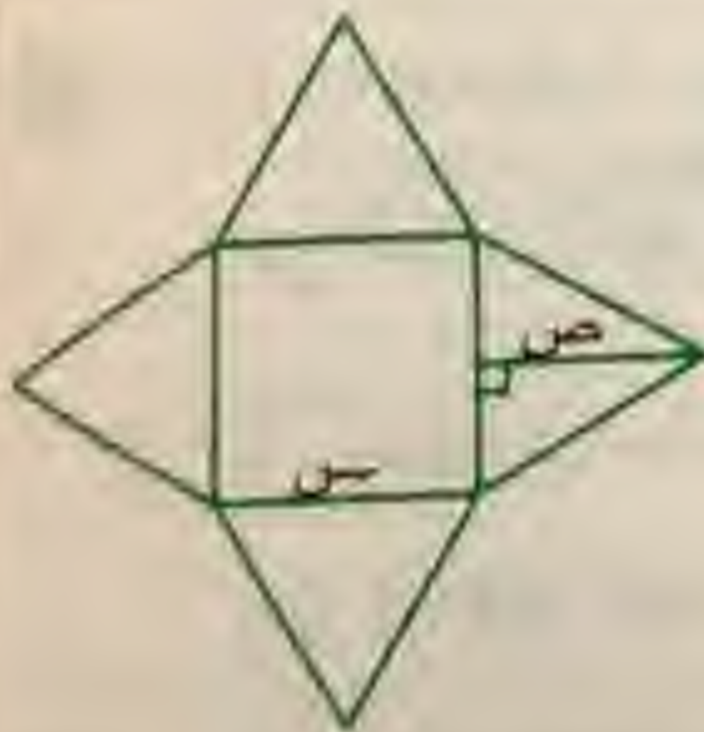
---

٣ قوتان متساويتان فى المقدار محصلتهما ٣ نيوتن وقياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{٣}$ فإن مقدار كل منهما يساوى .... نيوتن.

(أ) $\sqrt{٣}$ (ب) ٣ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) ٣ $\sqrt{٣}$

---

٤ الشكل المقابل يمثل شبكة هرم رباعى منتظم ارتفاعه (ع) فإن العلاقة بين س ، ص ، ع هى ....



(أ) س^٢ + ص^٢ = ع^٢

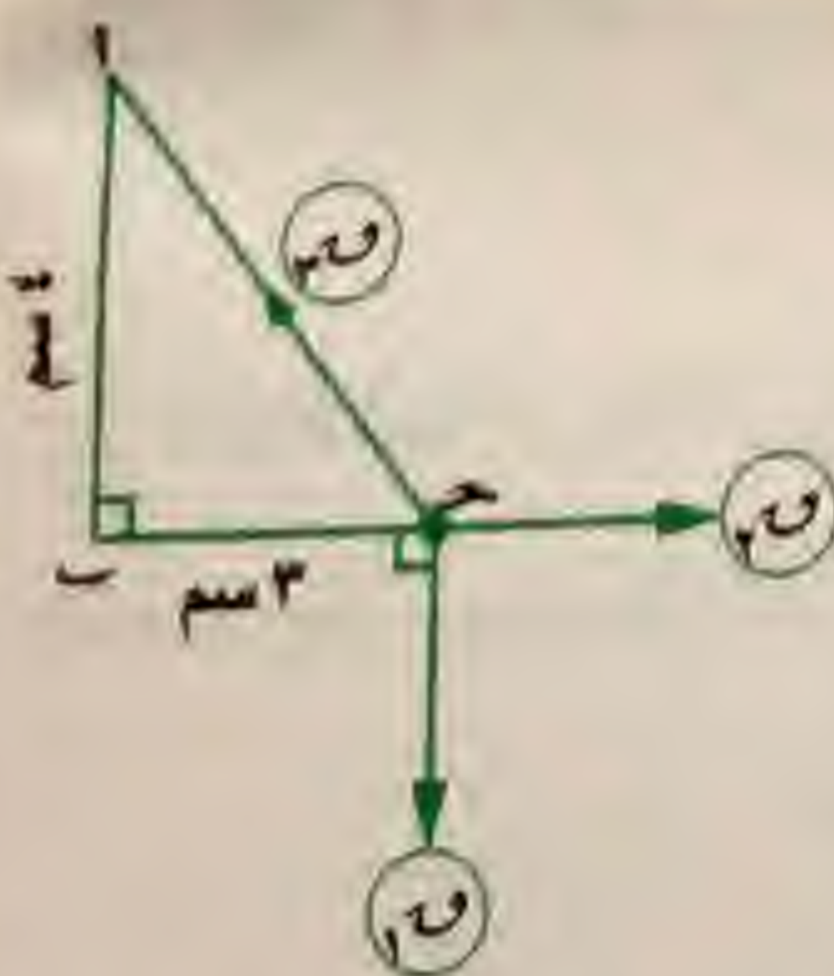
(ب) س^٢ + ع^٢ = ص^٢

(جـ) $\left(\frac{س}{٢}\right)^٢$ + ع^٢ = ص^٢

(د) $\left(\frac{س}{٢}\right)^٢$ + ص^٢ = ع^٢

---

٥ إذا كان الشكل المقابل يوضح اتزان جسم تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية فى نقطة مقاديرها $ق_١$ ، $ق_٢$ ، $ق_٣$ نيوتن وأضلاع المثلث القائم توازى خطوط عمل هذه القوى وفى ترتيب دورى واحد فإن : $ق_١ : ق_٢ : ق_٣$ = ...



(أ) ٣ : ٤ : ٥ (ب) ٣ : ٥ : ٤

(جـ) ٤ : ٥ : ٣ (د) ٤ : ٣ : ٥

٦ أ ب حـ ء هـ و شكل سداسي منتظم ، أثرت القوى ٢ ، ٤ $\sqrt{٣}$ ، ٨ ، ٢ $\sqrt{٣}$ ، ٤ ث.كجم في الاتجاهات $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{أحـ}$ ، $\overrightarrow{أء}$ ، $\overrightarrow{أهـ}$ ، $\overrightarrow{أو}$ على الترتيب.

أوجد المحصلة مقدارًا واتجاهًا.

---

٧ هرم رباعي منتظم حجمه ٤٠٠ سم^٣ وارتفاعه ١٢ سم

فإن مساحته الجانبية = ... سم^٢

(أ) ٢٤٠ (ب) ٢٦٠ (جـ) ٣٠٠ (د) ٣٦٠

---

٨ مخروط دائري قائم مساحة قاعدته ٣٦ π سم^٢ ، وطول راسمه ١٠ سم.

أوجد :

(١) مساحته الجانبية. (٢) مساحته الكلية. (٣) حجمه.

---

٩ في الشكل المقابل :



إذا كانت : حـ (٨ ، ٠) ، ء (٢ ، ٠)

فإن معادلة الدائرة هي ....

(أ) (س − ٥)^٢ + (ص − ٤)^٢ = ٢٥

(ب) (س + ٥)^٢ + (ص − ٤)^٢ = ٣٦

(جـ) (س − ٥)^٢ + (ص − ٤)^٢ = ٣٦

(د) (س + ٥)^٢ + (ص − ٤)^٢ = ٢٥

---

١٠ قوتان مقداراهما ٦ ، ق ث.كجم تؤثران في نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٣٥°

إذا كان خط عمل المحصلة يميل بزاوية قياسها ٤٥° على خط عمل القوة التي مقدارها ق

فإن مقدار المحصلة = ... ث.كجم

(أ) ٦ (ب) ٦ $\sqrt{٢}$ (جـ) ٦ $\sqrt{٣}$ (د) ١٠

---

١١ وضع جسم وزنه (و) نيوتن على مستوى يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠°

وحفظ الجسم في حالة توازن بتأثير قوة مقدارها ٣٦ نيوتن تعمل في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى فإن مقدار وزن الجسم = ... نيوتن

(أ) ٣٦ (ب) ٧٢ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٧٢ (د) ٣٦ $\sqrt{٣}$

١٢ إذا كانت : $\overline{ح}$ هى محصلة القوتين $\overline{ق_١}$ ، $\overline{ق_٢}$ وكانت $\overline{ح}$ هى محصلة القوتين $\overline{ق_١}$ ، ...

فإن : ....

(أ) $\overline{ح} + \overline{ح} = ٢ \overline{ق_١}$

(ب) $\overline{ح} = \overline{ح} + ٢ \overline{ق_٢}$

(جـ) $ح^٢ + ح^٢ = ٢ (ق_١^٢ + ق_٢^٢)$

(د) كل ما سبق.

١٣ معادلة الدائرة التى هى صورة الدائرة : $س^٢ + ص^٢ - ١٢ س + ٦ ص + ٢٠ =$ صفر

بالانتقال (٢ ، - ٢)

(أ) $س^٢ + ص^٢ - ١٠ س + ٤ ص + ٢٠ = ٠$

(ب) $س^٢ - ١٦ س + ١٠ ص + ٢٠ = ٠$

(جـ) $(س - ٦)^٢ + (ص + ٣)^٢ = ٢٠$

(د) $(س - ٨)^٢ + (ص + ٥)^٢ = ٢٥$

١٤ قوة مقدارها $٥ \sqrt{٣}$ نيوتن تؤثر فى اتجاه ٣٠° شرق الشمال حُللت إلى مركبتين متعامدتين

فإن مقدار المركبة فى اتجاه الشرق = ... نيوتن.

(أ) ٥ (ب) $٧ \frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٥ \sqrt{٣}}{٢}$ (د) ١٥

١٥ $\overline{أ ب}$ قضيب منتظم وزنه ٢٠ ث.كجم متصل طرفه أ بمفصل مثبت فى حائط رأسى أثرت عليه قوة أفقية ق عند ب فاتزن القضيب وهو يميل على الرأسى بزاوية قياسها ٣٠°

أوجد مقدار كل من القوة ورد الفعل.

١٦ إذا كانت محصلة القوى الموضحة بالشكل المقابل

بوحدة النيوتن تؤثر فى محور ص

فإن : ق = ... نيوتن.



(أ) ٨

(ب) ٦

(جـ) ١٤

(د) ٢

١٧ مكعب من الشمع طول حرفه ٢٠ سم صُهر وحُوِّل إلى مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٢١ سم فإن طول نصف قطر قاعدة المخروط علمًا بأن ١٢ ٪ من الشمع فقد أثناء عمليتى الصهر والتحويل = ... سم ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

(أ) $\frac{٢٠\sqrt{١١٠}}{١١}$ (ب) $١٠\sqrt{٢}$ (جـ) ١٦٠ (د) $٨\sqrt{٥}$

---

١٨ الشكل المقابل يمثل شبكة مخروط حيث إن

قياس الزاوية المركزية للقطاع الدائرى = θ

حيث $١٨٠° < \theta < ٣٦٠°$

فإن : ....



(أ) ل > ٢ نق (ب) ل = نق

(جـ) ل = ٢ نق (د) ل < ٢ نق

---

١٩ أى مجموعات القوى الآتية لا يمكن أن تكون متزنة ؟

(أ) ١٠ نيوتن ، ١٠ نيوتن ، ٥ نيوتن. (ب) ٤ نيوتن ، ٦ نيوتن ، ٨ نيوتن.

(جـ) ١١ نيوتن ، ٧ نيوتن ، ٨ نيوتن. (د) ٨ نيوتن ، ٤ نيوتن ، ١٤ نيوتن.

---

٢٠ إذا كانت المعادلة $\begin{pmatrix} س & ص & ٢٥ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \\ -٤ \end{pmatrix} = \square$ تمثل معادلة دائرة

فإن طول قطرها = ... وحدة طولية.

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ١٠٠ (د) ٢٠٠

---

٢١ قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ٥ ق ، ٣ ق فإن مقدار محصلتهما لا يمكن أن يساوى ....

(أ) ٢ ق (ب) $٣\sqrt{٢}$ ق (جـ) ٨ ق (د) $٥\sqrt{٣}$ ق

٢٢ في الشكل المقابل :
جسم وزنه ١٥٠ ث.جم متزن بربطه بخيطين متعامدين طولاهما ٦٠ سم ، ٤٥ سم وطرفا الخيطين حـ ، ب على خط أفقى واحد
فإن : $\text{ش}_1 - \text{ش}_2$ = ... ث.جم

(أ) ١٢٠ (ب) ٩٠ (جـ) ٦٠ (د) ٣٠

٢٣ يكون المستقيمان متخالفين إذا كانا ....

(أ) غير متوازيين. (ب) غير متقاطعين.
(جـ) غير منطبقين. (د) لا يجمعهما مستوى.

٢٤ النقطة التى تقع على الدائرة $(\text{س} - ٢)^2 + \text{ص}^2 = ١٣$ هى ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٣ ، -٢) (جـ) (٢ ، ٠) (د) (٤ ، ٣)

النموذج الثانى

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ أى ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تعين ....

(أ) مستوى واحداً. (ب) مستويين. (جـ) ٣ مستويات. (د) ٤ مستويات.

٢ إذا كانت القوتان ٦ ، ٨ نيوتن متعامدتين فإن جيب زاوية ميل المحصلة على القوة ال... يساوى ....

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

٣ مركز الدائرة : $\text{س}^2 + \text{ص}^2 - ٦\text{س} + ٨\text{ص} = ٠$ هو النقطة ....

(أ) (٣ ، -٤) (ب) (-٤ ، ٣) (جـ) (-٣ ، ٤) (د) (-٣ ، -٤)

٤ ثلاث قوى متساوية فى المقدار ومتلاقية فى نقطة ومتزنة فإن قياس الزاوية بين أى قوتين هو ....

(أ) ٦٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٥٠°

٥ حجم مخروط قائم محيط قاعدته ٤٤ سم وارتفاعه ١٥ سم = ... سم^3 (π = ...)

(أ) ٧٧ (ب) ١٠٥ (جـ) ١١٠ (د) ٧٧٠

٦ قوتان متساويتان في المقدار ومتلاقيتان في نقطة ومقدار محصلتهما يساوي ١٢ ث.كجم
وإذا عكس اتجاه إحداهما فإن مقدار المحصلة يساوي ٦ ث.كجم
أوجد مقدار كل من القوتين.

---

٧ قوى مستوية مقاديرها ٢ ق ، ٣ ق ، ٤ ق ث.جم تؤثر في نقطة ، في اتجاهات موازية لأضلاع مثلث متساوي الأضلاع في ترتيب دوري واحد.
فإن مقدار محصلة هذه القوى = ... ث.جم

(أ) ٥ ق (ب) ٢ $\sqrt{٣}$ ق (جـ) $\sqrt{٣}$ ق (د) ق

---

٨ أ ب جـ د هـ و شكل سداسي منتظم ، أثرت قوة مقدارها ٢٠ نيوتن في اتجاه $\overleftarrow{\text{أ د}}$
حللت هذه القوة إلى مركبتين في الاتجاهين $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ و}}$ فإن مركبة هذه القوة في اتجاه $\overleftarrow{\text{أ و}}$ تساوي .... نيوتن.

(أ) ١٠ (ب) ١٠ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٢٠ (د) ١٠ $\sqrt{٢}$

---

٩ معادلة الدائرة التي مركزها (٢ ، −٣) وتمس المستقيم الذي معادلته :
٣ س − ٤ ص + ٢ = ٠ هي ....

(أ) (س − ٢)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ٢ (ب) (س + ٢)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ٤

(جـ) س^{٢} + ص^{٢} − ٤ س + ٦ ص = ١٢ (د) (س − ٢)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ١٦

---

١٠ إذا تضاعف طول ضلع قاعدة هرم رباعي منتظم فإن حجمه ....

(أ) يتضاعف. (ب) يتضاعف ثلاث مرات.

(ب) يتضاعف أربع مرات. (د) لا يتغير.

---

١١ في الشكل المقابل :



أ ب جـ د هـ و شكل سداسي منتظم
فإن محصلة القوى تكون في اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{\text{أ د}}$ (ب) $\overleftarrow{\text{د أ}}$

(جـ) $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ (د) $\overleftarrow{\text{هـ أ}}$

١٢ هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ٤٠ سم وارتفاعه الجانبي ٢٥ سم.

أوجد : (١) ارتفاع الهرم. (٢) المساحة الجانبية.

(٣) المساحة الكلية. (٤) حجم الهرم.

---

١٣ إذا كانت : $\overrightarrow{ق_1}$ = ٥ $\overrightarrow{س}$ − ٣ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ = −٧ $\overrightarrow{س}$ + ٢ $\overrightarrow{ص}$

، $\overrightarrow{ق_3}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ + $\overrightarrow{ص}$ فإن : $\overrightarrow{ح}$ = ...

(أ) ٧ $\overrightarrow{س}$ − ٢ $\overrightarrow{ص}$ (ب) ٤ $\overrightarrow{س}$ − ٤ $\overrightarrow{ص}$

(جـ) −١٤ $\overrightarrow{س}$ + ٤ $\overrightarrow{ص}$ (د) $\overrightarrow{صفر}$

---

١٤ أزيحت كرة بندول وزنها ٦٠٠ داين حتى صار الخيط يصنع زاوية قياسها ٣٠° مع الرأسي تحت تأثير قوة على الكرة في اتجاه عمودي على الخيط.

فإن مقدار القوة = ... داين.

(أ) ٣٠٠ $\sqrt{٣}$ (ب) ١٢٠٠ (جـ) ٣٠٠ (د) ٣٠٠ $\sqrt{٢}$

---

١٥ قوتان ق ، ق تؤثران في نقطة مادية ومحصلتهما ق

فإن قياس الزاوية بين القوتين = ...

(أ) ٦٠° (ب) ٤٥° (جـ) ١٢٠° (د) ١٣٥°

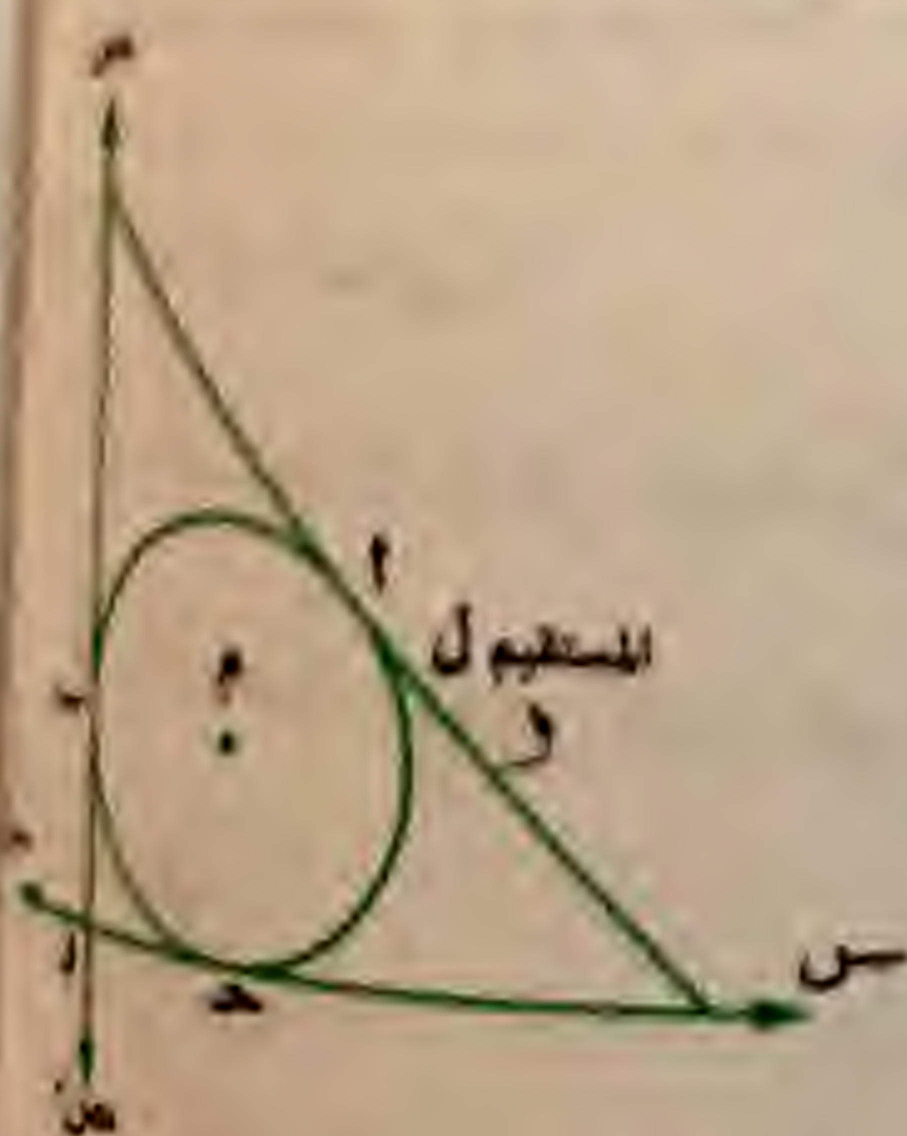
---

١٦ طويت قطعة من الورق المقوى على شكل قطاع دائري طول نصف قطر دائرته ٣٦ سم وقياس زاويته ٢١٠° لتصنع مخروطًا دائريًا قائمًا.

أوجد ارتفاع المخروط.

---

١٧ في الشكل المقابل :



إذا كانت معادلة المستقيم ل هي $\frac{س}{٨} + \frac{ص}{٦} = ١$

فإن معادلة الدائرة هي ....

(أ) $(س - ٢)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ٤$

(ب) $(س - ٢)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ١٦$

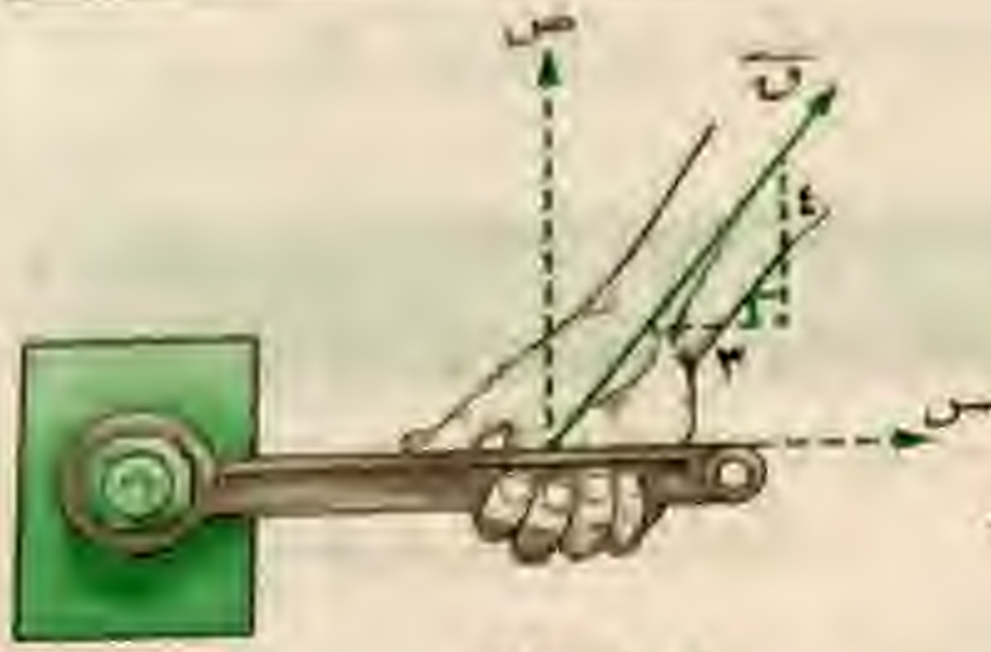
(جـ) $(س + ٢)^٢ + (ص + ٢)^٢ = ٤$

(د) $(س + ٢)^٢ + (ص + ٢)^٢ = ١٦$

١٨ النسبة بين حجم هرم ثلاثى منتظم وحجم أكبر مخروط يمكن وضعه بداخل الهرم تساوى ....

(أ) $\frac{٣\sqrt{٣}}{\pi}$　(ب) $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢\pi}$　(جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{\pi}$　(د) $\frac{٣\sqrt{٣}}{٤\pi}$

١٩ فى الشكل المقابل :



إذا كانت المركبة الصادية للقوة ($\overleftarrow{ق}$) لشخص يستخدم مفتاحًا للربط هى ٦٠ نيوتن فإن المركبة السينية للقوة $\overleftarrow{ق}$ تساوى .... نيوتن.

(أ) ٣٠　(ب) ٤٥　(جـ) ٦٠　(د) ٧٥

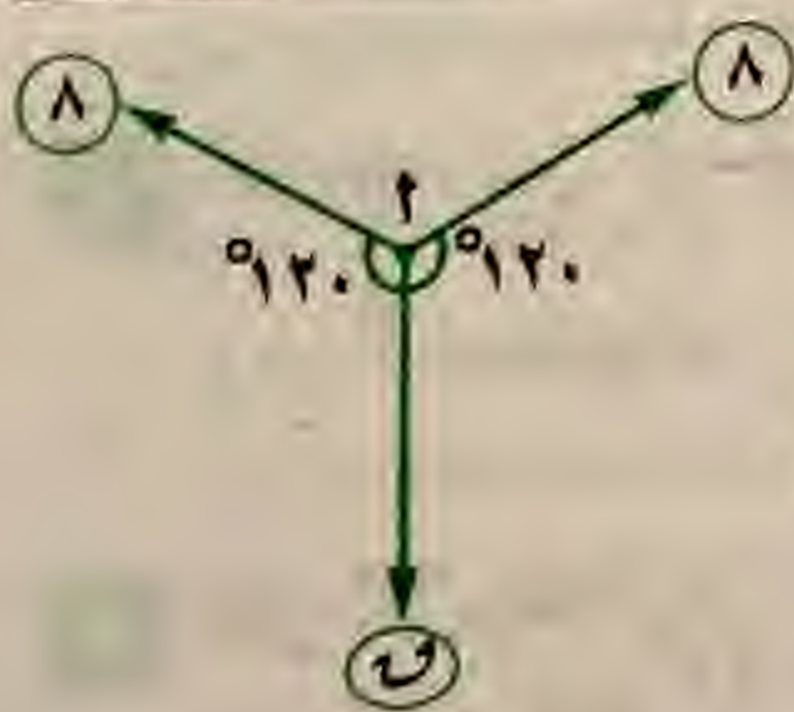
٢٠ قوتان مقداراهما ٤ ، ٦ نيوتن ومقدار محصلتهما ١٠ نيوتن فإن قياس الزاوية بين القوتين يساوى ....

(أ) صفر°　(ب) ٩٠°　(جـ) ١٨٠°　(د) ٤٥°

٢١ المساحة الجانبية للمخروط القائم الذى طول نصف قطر قاعدته نق وطول راسمه ل تساوى ....

(أ) ٢ π ل نق　(ب) ٢ π ل نق^٢　(جـ) π ل نق　(د) π ل نق^٢

٢٢ فى الشكل المقابل :



أ نقطة مادية متزنة تحت تأثير القوى الثلاثة الموضحة بالشكل حيث $\overleftarrow{ق}$ تتزن مع قوتين مقدار كل منهما ٨ نيوتن وتصنع مع كل منهما زاوية قياسها ١٢٠° فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) صفر　(ب) ٨　(جـ) ١٦　(د) ٨ جا ١٢٠°

٢٣ مركز الدائرة : س^٢ + ص^٢ − ٦ س + ٨ ص = ٠ هو النقطة ....

(أ) (٣ ، −٤)　(ب) (٤ ، −٣)　(جـ) (−٣ ، ٤)　(د) (−٤ ، ٣)

٢٠ أى الجمل الآتية غير صحيحة ؟

(أ) أى نقطتين فى الفراغ يمر بهما مستوى واحد فقط.

(ب) أى ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة فى الفراغ تعين مستوى.

(جـ) رؤوس المثلث تعين مستوى.

(د) كل مستقيمين متقاطعين يحتويهما مستوى واحد فقط.



النموذج الثالث

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ٥ ، ٣ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٦٠° فإن مقدار محصلتهما ح يساوى .... نيوتن.

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٨

٢ مخروط دائرى قائم ارتفاعه ١٢ سم وطول راسمه ١٥ سم يكون حجمه ....

(أ) ٣٢٤ π (ب) ٧١٥ π (جـ) ٣٢ π (د) ١٨٠ π

٣ القيمة الصغرى لمحصلة قوتين مقداراهما ٥ ، ٩ نيوتن ومتلاقيتان فى نقطة تساوى .... نيوتن.

(أ) صفر (ب) ٩ (جـ) ٤ (د) ٥

٤ أقل عدد من المستويات التى تحدد مجسمًا هو ....

(أ) ٣ مستويات. (ب) ٤ مستويات. (جـ) مستويان. (د) ٥ مستويات.

٥ علق ثقل مقداره ٢٠٠ ث.جم بخيطين طولاهما ٦٠ سم ، ٨٠ سم من نقطتين على خط أفقى واحد البعد بينهما ١٠٠ سم. أوجد مقدار الشد فى كل من الخيطين.

٦ هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٨ سم وارتفاعه الجانبى ١٥ سم فإن حجمه = ... سم^3

(أ) ١١٥٦ (ب) ١٢٥٤ (جـ) ١٣٠٨ (د) ١٢٩٦

٧ فى الشكل المقابل :



حُللت القوة الرأسية ٧٥ نيوتن

إلى مركبتين إحداهما أفقية $ق_١$ والأخرى $ق_٢$

فإن : $ق_٢$ = ... نيوتن

(أ) ٧٥ (ب) ٧٥ $\sqrt{٣}$ (جـ) ١٥٠ (د) ١٥٠ $\sqrt{٣}$

---

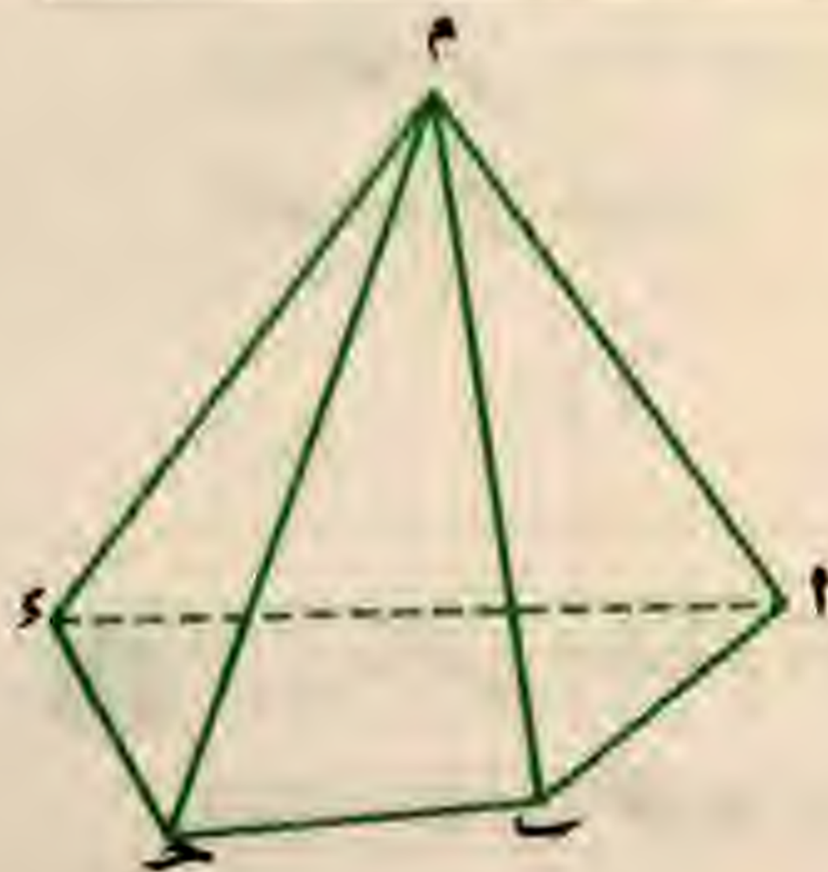
٨ قوتان مقدارهما ٦ ، ١٢ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٢٠°

فإن قياس الزاوية التى تصنعها المحصلة مع القوة الأولى = ...

(أ) ١٢٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ٣٠°

---

٩ فى الشكل المقابل :



المستوى أ ب ء ∩ المستوى م جـ ء = ...

(أ) $\overleftrightarrow{أم}$ (ب) $\overleftrightarrow{جـ ء}$

(جـ) {ء} (د) $\overleftrightarrow{م جـ}$

---

١٠ أثرت القوى ٨ ، ٤ $\sqrt{٣}$ ، ٦ $\sqrt{٣}$ ، ١٤ نيوتن فى نقطة مادية وكان قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية ٣٠° وبين الثانية والثالثة ١٢٠° وبين الثالثة والرابعة ٩٠° مرتبة فى اتجاه دورى واحد. أوجد محصلة هذه القوى مقدارًا واتجاهًا.

---

١١ شكل سداسى منتظم مركزه الهندسى نقطة الأصل ومساحته ٣ $\sqrt{٣}$ سم^٢

فإن معادلة الدائرة التى تمر برؤوسه هى ....

(أ) $س^٢ + ص^٢ = ٢$ (ب) $س^٢ + ص^٢ = ٤$

(جـ) $س^٢ + ص^٢ = ٦$ (د) $س^٢ + ص^٢ = ٨$

١٢ في الشكل المقابل :



مخروط دائرى قائم فيه : ق (∠ أ م ب) = ٣٠°

، طول نصف قطر القاعدة = ٥ سم

فإن مساحته الكلية = ... سم^{٢}

(أ) ٥٠ π (ب) ٧٥ π

(جـ) ١٠٠ π (د) ١٢٥ π

---

١٣ قوتان ٦ ، ٢,٥ نيوتن ومحصلتهما تساوى ٦,٥ نيوتن فإن الزاوية بين القوتين تكون ....

(أ) حادة. (ب) منفرجة. (جـ) قائمة. (د) مستقيمة.

---

١٤ وضع جسم وزنه ١٠٠ نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها وحفظ فى حالة توازن بواسطة قوة أفقية مقدارها ق نيوتن وكان رد فعل المستوى على الجسم ر نيوتن فإن : ق + ر = ... نيوتن.

(أ) $١٠٠\sqrt{٣}$ (ب) $\frac{١٠٠\sqrt{٣}}{٣}$ (جـ) $٢٠٠\sqrt{٣}$ (د) $\frac{٢٠٠\sqrt{٣}}{٣}$

---

١٥ هرم ثلاثى منتظم الوجوه إذا كان مجموع أطوال أحرفه = ٣٦ سم فإن ارتفاع الهرم = ... سم

(أ) $\sqrt{٦}$ (ب) $٢\sqrt{٦}$ (جـ) ٦ (د) ٤

---

١٦ أثبت أن الدائرتين : س^{٢} + ص^{٢} − ٢ س + ٦ ص + ١ = ٠

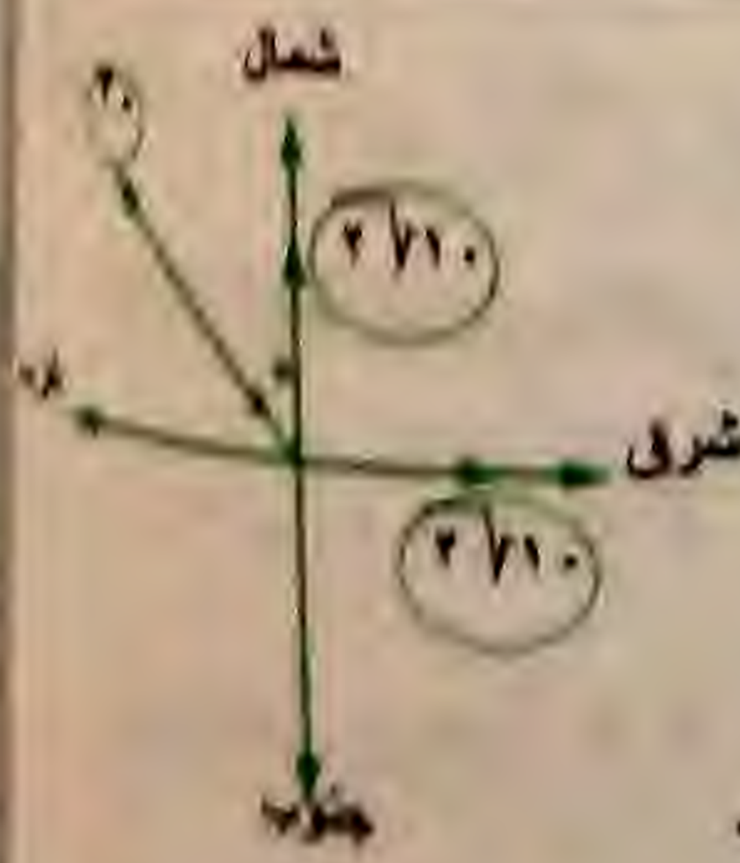
، ٤ س^{٢} + ٤ ص^{٢} − ٨ س + ٢٤ ص + ١٥ = ٠ متحدتا المركز

، أوجد طول نصف قطر كل منهما.

---

١٧ فى الشكل المقابل :

محصلة القوى $١٠\sqrt{٢}$ ، $١٠\sqrt{٢}$ ، ٢٠ نيوتن تؤثر فى اتجاه ....



(أ) شمال الشرق. (ب) الشمال.

(جـ) غرب الشمال. (د) غرب الجنوب.





١٨ إذا كان حجم نصف كرة طول نصف قطرها نق يساوى حجم مخروط طول نصف قطر قاعدته (نق) وارتفاعه (ع) فإن : ....

(أ) ع = $\frac{٢}{٣}$ نق (ب) ع = ٢ نق (جـ) ع = ٢ نق^{٢} (د) ع = ٤ نق

١٩ شرط اتزان مجموعة القوى المقابلة هو ....



(أ) ق = ١٠ نيوتن.

(ب) ق = ١٠ $\sqrt{٢}$ نيوتن.

(جـ) ق = ٥ $\sqrt{٢}$ نيوتن.

(د) المجموعة لا يمكن أن تتزن.

٢٠ محيط الدائرة التى معادلتها : س^{٢} + ص^{٢} = ٨ هو ....

(أ) ٨ π (ب) ٦٤ π (جـ) ٢ $\sqrt{٢}$ π (د) ٤ $\sqrt{٢}$ π

٢١ ينطبق المستويان إذا اشتركا فى ....

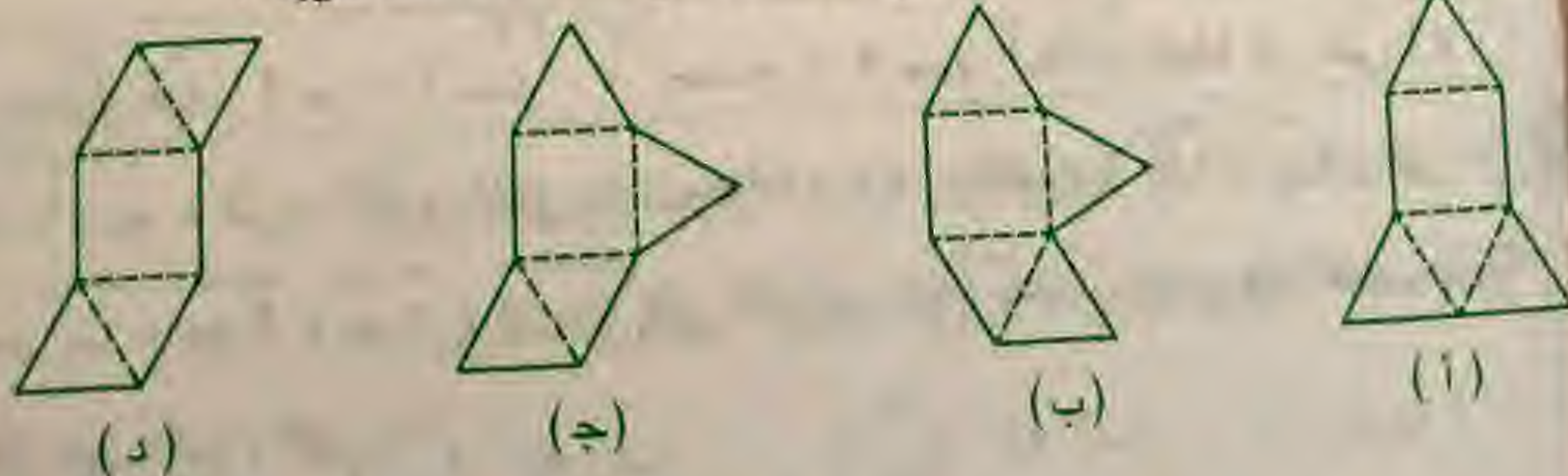
(أ) نقطة واحدة. (ب) نقطتين.

(جـ) ٣ نقاط على استقامة واحدة. (د) ٣ نقاط ليست على استقامة واحدة.

٢٢ قوة مقدارها ٤ $\sqrt{٢}$ نيوتن تعمل فى اتجاه الشرق تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مركبتها فى اتجاه الشمال الشرقى تساوى .... نيوتن.

(أ) صفر (ب) ٤ $\sqrt{٢}$ (جـ) ٤ (د) ٦

٢٣ أى الشبكات التالية لا تصنع هرمًا رباعيًا منتظمًا عند طيها ؟





٢٤ إذا اتزن جسم تحت تأثير قوتين $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ فإن : ....

(أ) $\overrightarrow{ق_1} = \overrightarrow{ق_2}$ (ب) $ق_1 = ق_2$

(جـ) $\overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2} \neq \overrightarrow{0}$ (د) $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ ليسا على استقامة واحدة





النمـــوذج الرابــع

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ فى الشكل المقابل :

حللت القوة التى مقدارها ١٢ نيوتن إلى مركبتين $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ تصنعان معها زاويتين قياساهما ٣٠° ، ٩٠°



فإن : $ق_2$ = ... نيوتن.

(أ) ١٠ (ب) ١٠ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٦ $\sqrt{٣}$ (د) ٤ $\sqrt{٣}$

---

٢ هرم رباعى منتظم ارتفاعه ٩ سم ، حجمه ٣٠٠ سم^٣ يكون طول ضلع قاعدته يساوى .... سم.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ١٥ (د) ٢٠

---

٣ قوتان متعامدتان مقداراهما ١٢ نيوتن ، ٥ نيوتن تؤثران فى نقطة فإن مقدار محصلتهما .... نيوتن.

(أ) ٥ (ب) ١٢ (جـ) ١٣ (د) ١٧

---

٤ أ ب جـ ء مستطيل فيه : أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم. أخذت نقطة هـ على أ ء بحيث أ هـ = ٦ سم ، أثرت القوى التى مقاديرها ق ، ٥ ، ك ، ٦ ، ٦ $\sqrt{١٠}$ نيوتن فى الاتجاهات $\overleftarrow{جـ ب}$ ، $\overleftarrow{جـ أ}$ ، $\overleftarrow{جـ ء}$ ، $\overleftarrow{هـ جـ}$ على الترتيب فإذا كانت مجموعة القوى متزنة أوجد قيمة كل من : ق ، ك

٥ جميع الحالات الآتية تعين مستوى ما عدا ....

(أ) مستقيمًا ونقطة لا تنتمي إليه. (ب) مستقيمين متوازيين مختلفين.

(جـ) مستقيمين متقاطعين. (د) مستقيمين متخالفين.

---

٦ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب فيه : أ ب = ٣ سم ، ب جـ = ٤ سم

فإن حجم الجسم الناشئ من دوران المثلث أ ب جـ دورة كاملة حول $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$

هو .... سم^3

(أ) ١٦ π (ب) ١٨ π (جـ) ١٥ π (د) ١٢ π

---

٧ مخروط دائري قائم قاعدته أفقية تستند على مستوى الإحداثيات ومعادلتها

$\text{س}^2 + \text{ص}^2 = ٣٦$ فإذا كان ارتفاع المخروط ٨ وحدات طول.

أوجد : (١) حجم المخروط. (٢) مساحته الكلية.

---

٨ المعادلة $\begin{pmatrix} \text{س} & \text{ص} & ٨ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ -٢ \end{pmatrix} = \boxed{}$ تمثل دائرة طول قطرها = ... وحدة طولية.

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

---

٩ قوتان مقداراهما ٤ ، ق نيوتن تؤثران في نقطة مادية قياس الزاوية بينهما ١٢٠°

فإذا كانت المحصلة عمودية على القوة الأولى فإن مقدار المحصلة = ... نيوتن.

(أ) ٤$\sqrt{٢}$ (ب) ٤$\sqrt{٣}$ (جـ) ٤ (د) ٤$\sqrt{٥}$

---

١٠ علق جسم وزنه (و) نيوتن بواسطة خيطين خفيفين يميلان على الرأسي بزاويتين قياساهما هـ° ، ٣٠° فاتزن الجسم عندما كان مقدار الشد في الخيط الأول ١٢ نيوتن والخيط الثاني ١٢$\sqrt{٣}$ نيوتن فإن وزن الجسم (و) = ... نيوتن.

(أ) ٦٠ (ب) ٢٥ (جـ) ٣٦ (د) ٢٤

---

١١ إذا كان $\overrightarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_2}$ قوتين فإن قياس الزاوية بين القوة $\overrightarrow{\text{ق}_1}$

ومحصلة القوتين $(\overrightarrow{\text{ق}_1} + \overrightarrow{\text{ق}_2})$ ، $(\overrightarrow{\text{ق}_1} - \overrightarrow{\text{ق}_2})$ يساوي ....

(أ) صفر (ب) ظا$^{-1}\left(\frac{\text{ق}_1}{\text{ق}_2}\right)$ (جـ) ظا$^{-1}\left(\frac{\text{ق}_2}{\text{ق}_1}\right)$ (د) ظا$^{-1}\left(\frac{\text{ق}_1 - \text{ق}_2}{\text{ق}_1 + \text{ق}_2}\right)$

١٢ في الشكل المقابل :



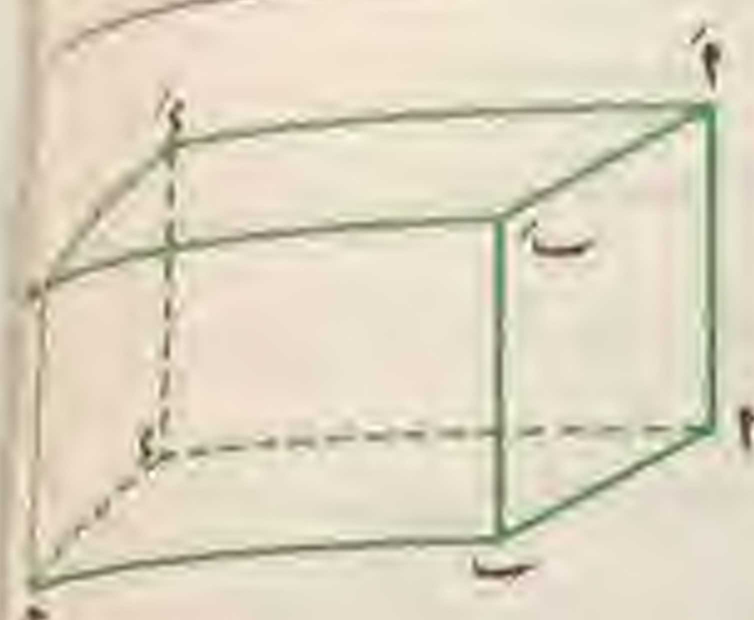
حجم الهرم الرباعي المنتظم الذي طول ضلع قاعدته ١٨ سم ، وارتفاعه الجانبي ١٥ سم هو .... سم^{٣}

(أ) ١٢٩٦ (ب) ١٦٢٠

(جـ) ٥٤٠ (د) ١٩٤٤

١٣ أوجد معادلة الدائرة المارة بالنقطتين (١ ، ٣) ، (٢ ، -٤) ويقع مركزها على محور السينات

١٤ في الشكل المقابل :

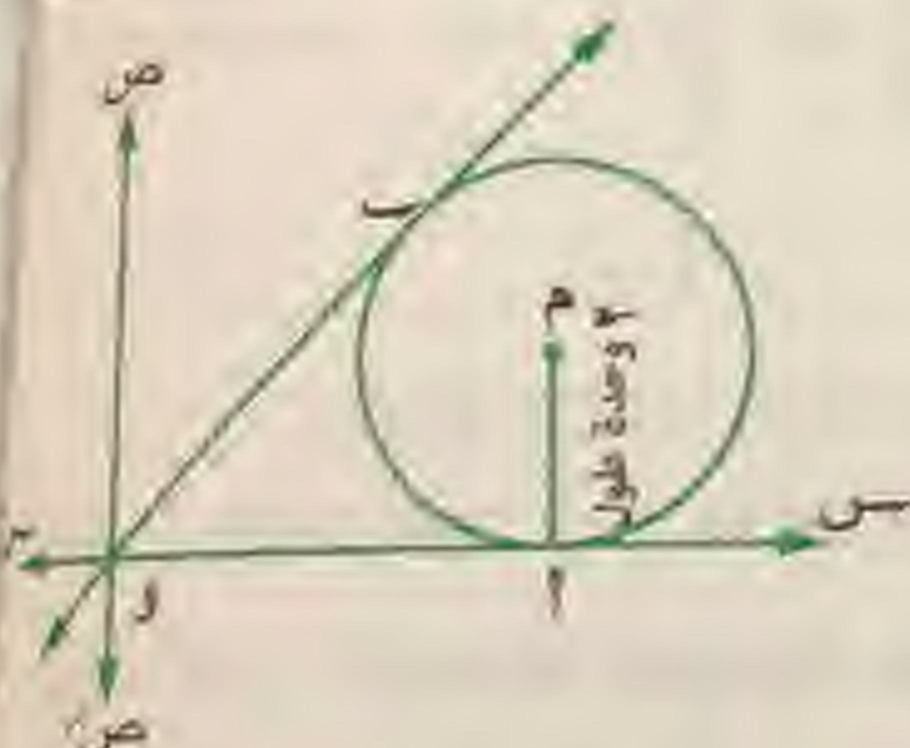


المستوى أ أَ بَ ∩ المستوى أَ جـ جـَ = ...

(أ) $\overleftrightarrow{أأَ}$ (ب) $\overleftrightarrow{ب بَ}$

(جـ) $\overleftrightarrow{جـ جـَ}$ (د) $\overleftrightarrow{أَ جـ}$

١٥ في الشكل المقابل :



إذا كان : و ب = ٥ وحدة طول

فإن معادلة الدائرة م هي ....

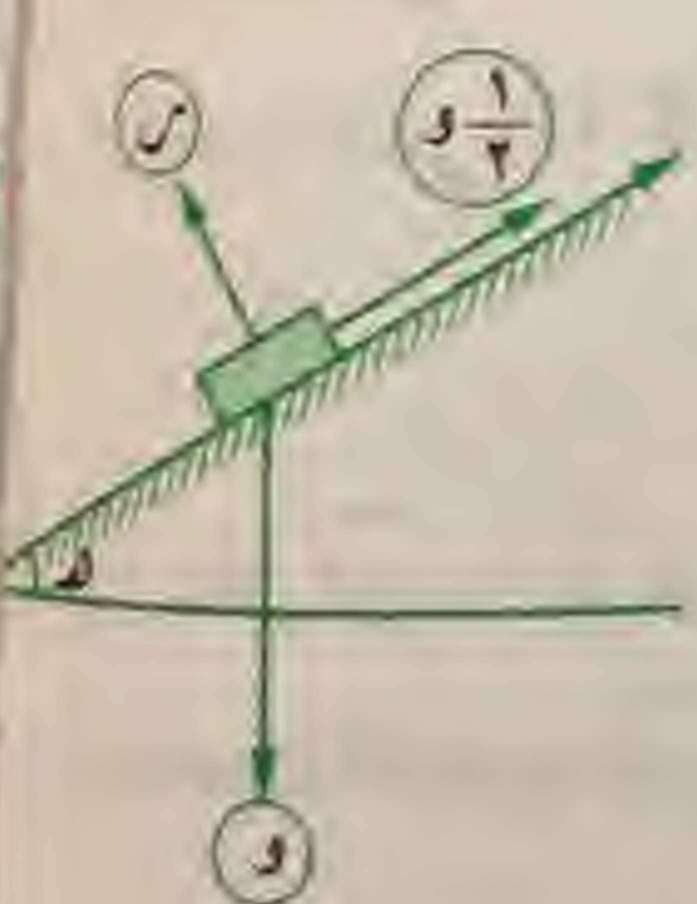
(أ) $(س - ٢)^{٢} + (ص - ٥)^{٢} = ٢٥$

(ب) $(س - ٢)^{٢} + (ص - ٥)^{٢} = ٤$

(جـ) $(س - ٥)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٢٥$

(د) $(س - ٥)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٤$

١٦ في الشكل المقابل :



إذا كان الجسم متزنًا تحت تأثير القوى المبينة بالشكل

فإن : ق (∠ هـ) = ...

(أ) °٣٠ (ب) °٦٠

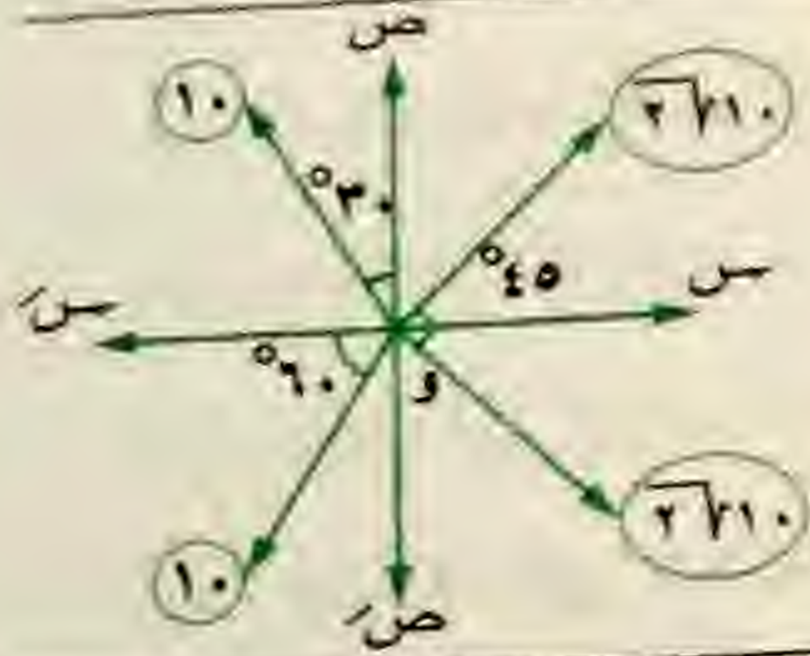
(جـ) °٤٥ (د) °١٥

١٧ مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ٥ سم ومساحته الكلية ٩٠ π سم^2

فإن حجمه = ... سم^3

(أ) ١٠٥ π (ب) ٩٥ π (جـ) ١٠٠ π (د) ١٢٠ π

١٨ فى الشكل المقابل :



محصلة القوى ح = ... نيوتن.

(أ) ٢٠ (ب) ١٠$\sqrt{2}$ (جـ) ١٠ (د) صفر

١٩ المعادلة $\begin{vmatrix} س & -ص \\ ص & س \end{vmatrix}$ = ٣٦ تمثل معادلة دائرة طول نصف قطرها يساوى .... وحدة طولية.

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ١٨

٢٠ ثلاث قوى متساوية فى المقدار ومتلاقية فى نقطة ومتزنة فإن قياس الزاوية بين أى قوتين = ...

(أ) ٦٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

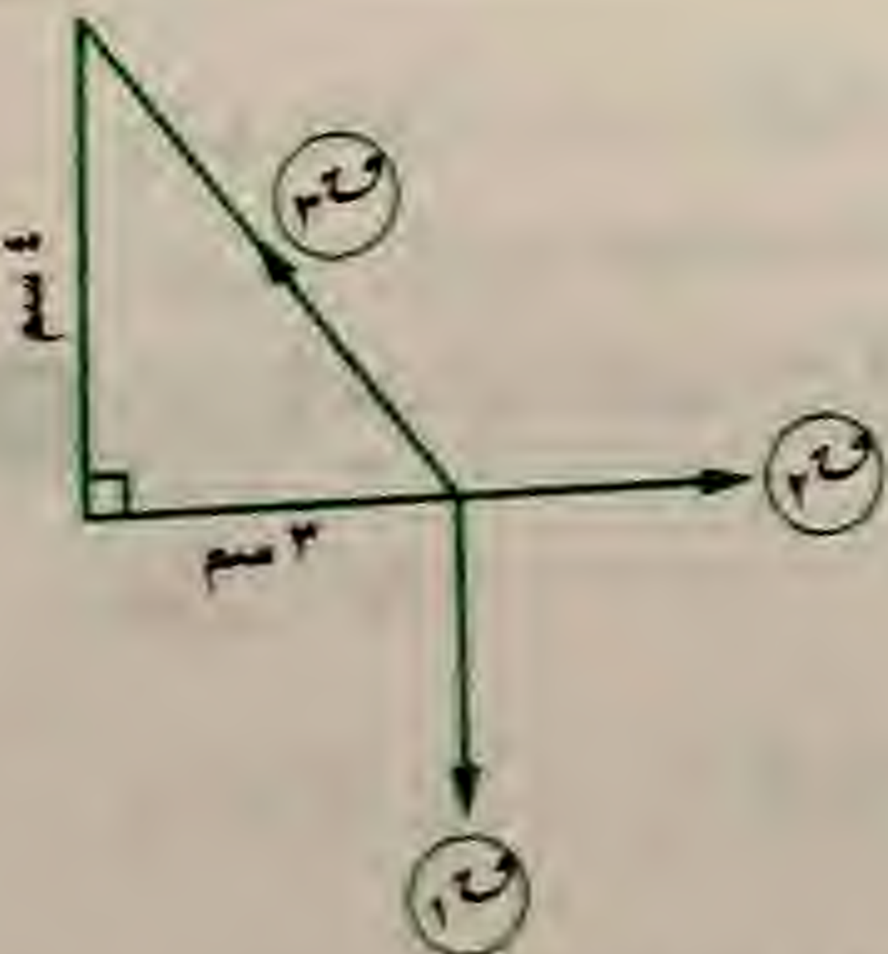
٢١ النسبة بين طول حرف الهرم الثلاثى المنتظم الوجوه وارتفاعه = ...

(أ) $\sqrt{2}$: $\sqrt{3}$ (ب) $\sqrt{3}$: ٢ (جـ) $\sqrt{6}$: ٢ (د) $\sqrt{3}$: ٣

٢٢ قوتان مقداراهما ٨ ، ق ث.جم وقياس الزاوية بينهما ∈]٠ ، π[، محصلتهما تنصف الزاوية بينهما فإن : ق = ... ث.جم

(أ) ٢$\sqrt{2}$ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٦

٢٣ إذا كان الشكل المقابل يوضح اتزان جسم تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية فى نقطة مقاديرها ق$_1$ ، ق$_2$ ، ق$_3$ نيوتن وأضلاع المثلث القائم توازى خطوط عمل هذه القوى وفى ترتيب دورى واحد فإن : ق$_1$: ق$_2$: ق$_3$ = ...



(أ) ٣ : ٤ : ٥ (ب) ٣ : ٥ : ٤ (جـ) ٤ : ٥ : ٣ (د) ٤ : ٣ : ٥

٢٤ فى الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ قضيب منتظم وزنه و يتصل بطرفه أ فى مفصل مثبت فى حائط رأسى أملس ، $\overline{بحـ}$ خيط خفيف مثبت أحد طرفيه فى ب والطرف الآخر فى نقطة حـ على الحائط الرأسى أعلى أ

فإن رد فعل المفصل ....

(أ) يكون فى اتجاه $\overleftarrow{أب}$ (ب) عموديًا على $\overline{بحـ}$

(جـ) عموديًا على الحائط. (د) ينصف $\overline{بحـ}$

النمـوذج الخـامس



امتحان الكترونى ٥

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ يكون المستقيمان متخالفين إذا كانا ....

(أ) غير متوازيين. (ب) غير متقاطعين.

(جـ) غير منطبقين. (د) لا يجمعهما مستوى واحد.

٢ المساحة الجانبية لمخروط قائم طول نصف قطر قاعدته ٦ سم ، ارتفاعه ٨ سم تساوى .... سم^{٢}

(أ) ٦٠ π (ب) ٢٨ π (جـ) ١٠ π (د) ٤٨ π

٣ قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ٥ ق ، ٢ ق ومقدار محصلتهما ٧ ق فيكون قياس الزاوية بينهما ....

(أ) ١٨٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٣٠° (د) صفر°

٤ إذا كانت $\vec{ق}$ تتزن مع قوتين متعامدتين مقداراهما ٨ نيوتن ، ١٥ نيوتن فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٧ (ب) ١٧ (جـ) ٢٣ (د) ٧ $\sqrt{٢}$



٥ إذا كان: $\overline{ق_1}$ = ٥ $\overline{س}$ + ٢ $\overline{ص}$ ، $\overline{ق_2}$ = أ $\overline{س}$ + ٦ $\overline{ص}$

، $\overline{ق_3}$ = −١٤ $\overline{س}$ + ب $\overline{ص}$ ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة

وكانت المحصلة $\overline{ح}$ = (١٠ $\sqrt{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$ π) فإن : أ + ب = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) صفر (د) ١٤

---

٦ مخروط دائرى قائم مساحته الكلية ٩٦ π سم^2 وطول راسمه ١٠ سم

أوجد طول نصف قطر قاعدته ثم أوجد حجمه.

---

٧ كرة منتظمة ملساء طول نصف قطرها ١٠ سم ووزنها ٣٠ ث.جم علقت من نقطة على سطحها بأحد طرفى خيط خفيف طوله ١٠ سم مثبت طرفه الآخر على حائط رأسى أملس.

أوجد فى وضع التوازن الشد فى الخيط ورد فعل الحائط.

---

٨ المساحة الكلية للهرم الثلاثى المنتظم الوجوه الذى طول حرفه ل سم

تساوى .... سم^2

(أ) ٢ $\sqrt{٣}$ ل^2 (ب) $\sqrt{٣}$ ل^2 (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ل^2 (د) ٣ $\sqrt{٢}$ ل^2

---

٩ هرم رباعى منتظم مساحة أى وجه من أوجهه الجانبية تساوى مساحة قاعدته

فإذا كان طول ضلع قاعدة الهرم = ٦ سم فإن حجم الهرم = ... سم^3

(أ) ٣٦ (ب) ٦ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٣٦ $\sqrt{١٥}$ (د) ٢١٦ $\sqrt{١٥}$

---

١٠ أ ب حـ ء مربع طول ضلعه = ١٠ سم ، هـ منتصف $\overline{أ ب}$ ، أثرت القوى ٢ ، ٧ $\sqrt{٥}$ ، ٤ $\sqrt{٢}$ ، ٤ نيوتن فى الاتجاهات $\overleftarrow{حـ ب}$ ، $\overleftarrow{حـ هـ}$ ، $\overleftarrow{حـ أ}$ ، $\overleftarrow{حـ ء}$ على الترتيب.

أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

---

١١ قوتان مقداراهما ق ، ق $\sqrt{٣}$ نيوتن متلاقيان فى نقطة وكانت محصلتهما = $ح_1$ عندما كانت قياس الزاوية بينهما ٩٠° ثم أصبحت محصلتهما = $ح_2$ عندما كانت قياس الزاوية بينهما ١٥٠° فإن : ....

(أ) $ح_1$ = $ح_2$ (ب) $ح_1$ = ٢ $ح_2$ (جـ) $ح_1$ = $\frac{٣}{٥}$ $ح_2$ (د) $ح_1$ = $\frac{١}{٢}$ $ح_2$

١٢ الصورة العامة لمعادلة دائرة قطرها $\overline{أب}$ حيث : أ (٣ ، ٢) ، ب(-١ ، ١٠)

هي ....

(أ) $س^{٢} + ص^{٢} - ٤ س - ٦ ص + ١٨ = ٠$

(ب) $(س + ٤)^{٢} + (ص - ٩)^{٢} = ٧٢$

(جـ) $س^{٢} + ص^{٢} - ٢ س + ١٢ ص + ١٩ = ٠$

(د) $س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س - ١٢ ص + ١٩ = ٠$

---

١٣ قوتان القيمة العظمى لمحصلتهما ٢٥ نيوتن والقيمة الصغرى لمحصلتهما ١٣ نيوتن

فإن مقداراهما .... نيوتن.

(أ) ٢٥ ، ١٣ (ب) ١٩ ، ٦ (جـ) ١٣ ، ١٢ (د) ٧ ، ٢٠

---

١٤ في الشكل المقابل :



النسبة بين المساحة الجانبية للمخروط م أ ب

إلى المساحة الجانبية للمخروط م أَ بَ

تساوي ....

(أ) ١ : ٢ (ب) ١ : ٤

(جـ) ١ : ٦ (د) ١ : ٨

---

١٥ في الشكل المقابل :



م ، ن دائرتان متماستان من الخارج

معادلتاهما $(س - ٢)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٤$

، $(س - أ)^{٢} + (ص - ب)^{٢} = ٦٤$

فإن : أ + ب = ...

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١٨ (د) ٢٨



١٦ الشبكة التي أمامك تصف مجسمًا

∴ حجمه = ... سم^3

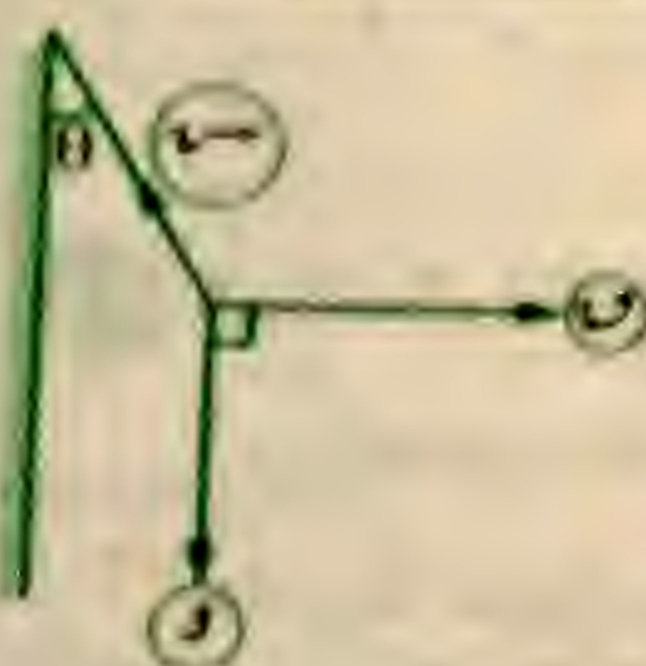
(أ) ٢٥ π (ب) ٥٠ π

(جـ) ٧٥ π (د) ١٠٠ π

---

١٧ قوة مقدارها ٤٠ نيوتن تؤثر رأسيًا لأعلى تم تحليلها إلى مركبتين إحداهما أفقية ومقدارها ٣٠ نيوتن فإن مقدار المركبة الثانية = ...

(أ) ٢٠ (ب) ٢٠ $\sqrt{2}$ (جـ) ١٠ (د) ٢٠ $\sqrt{5}$



١٨ في الشكل المقابل :

علق ثقل مقداره (و) نيوتن في طرف خيط مثبت طرفه الآخر في حائط رأسي وشُد الثقل بقوة أفقية مقدارها ق نيوتن حتى أصبح الخيط مائلًا على الحائط بزاوية قياسها θ

أي الجمل الآتية غير صحيح في وضع الاتزان ؟

(أ) ق = و طا θ (ب) $\overline{و} + \overline{ق} + \overline{ش}$ = صفر

(جـ) ش^2 = ق^2 + و^2 (د) ش = ق + و

---

١٩ حللت القوة $\overline{ح}$ إلى قوتين $\overline{ق_1}$ ، $\overline{ق_2}$ وتصنعان مع $\overline{ح}$ زاويتان قياسيهما هـ$_1$ ، هـ$_2$ من جهتيها على الترتيب فإن مقدار $\overline{ق_1}$ هو ....

(أ) $\frac{ح\ جا\ هـ_2}{جا\ (هـ_1 + هـ_2)}$ (ب) $\frac{ح\ جا\ هـ_1}{جا\ (هـ_1 - هـ_2)}$

(جـ) $\frac{ح\ جا\ هـ_1}{جا\ (هـ_1 + هـ_2)}$ (د) $\frac{ح\ جا\ (هـ_1 + هـ_2)}{جا\ هـ_2}$

---

٢٠ ثلاث قوى مستوية ومتلاقية في نقطة متزنة فإذا كان ٧ ، ٣ نيوتن مقداري قوتين منهم فإن مقدار القوة الثالثة يمكن أن يساوي .... نيوتن.

(أ) ١١ (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) ٣

٢١ إذا قطعنا هرم رباعى منتظم بمستوى يوازى قاعدته فإن المقطع الحادث يكون ....

(أ) مثلث. (ب) مربع. (جـ) مستطيل. (د) دائرة.

٢٢ النقطة التى تقع على الدائرة : $س^{2} + (ص - ٣)^{2} = ١٦$ هى ....

(أ) (صفر ، ٣) (ب) (٣ ، -٢) (جـ) (٢ ، صفر) (د) (٤ ، ٣)

٢٣ إذا كانت محصلة القوى (بالنيوتن) الموضحة بالشكل المقابل

تؤثر فى محور الصادات

فإن : ق = ... نيوتن



(أ) ٢ (ب) ٦

(جـ) ٨ (د) ١٤

٢٤ فى الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ قضيب منتظم متصل بمفصل أ على حائط رأسى حفظ أفقيًا

بواسطة خيط مربوط من نقطة ب والطرف الآخر للخيط

مربوط فى نقطة حـ على الحائط الرأسى أعلى أ

أى مما يأتى هو مثلث القوى ؟



(أ) Δ ءبهـ (ب) Δ ءهـأ

(جـ) Δ أءهـ (د) Δ أحـء

النمـــوذج السادس



امتحان إلكترونى ٦

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ المساحة الجانبية للمخروط القائم الذى طول نصف قطر قاعدته نق وطول راسمه ل تساوى ....

(أ) ٢ π ل نق (ب) ٢ π ل $نق^{2}$ (جـ) π ل نق (د) π ل $نق^{2}$

٢ أى قوتين مما يأتى لا يمكن أن يكون مقدار محصلتهما ٤ نيوتن ؟

(أ) ٢ نيوتن ، ٤ نيوتن. (ب) ٣ نيوتن ، ٣ نيوتن.

(جـ) ٢ نيوتن ، ٦ نيوتن. (د) ٣ نيوتن ، ٨ نيوتن.

---

٣ النقطة التى تقع على الدائرة $(س - ٢)^٢ + ص^٢ = ١٣$ هى ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٣ ، -٢) (جـ) (٢ ، ٥) (د) (٤ ، ٣)

---

٤ عدد المستويات التى تحمل أوجه الهرم الخماسى هو ....

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ١٠ (د) عدد لا نهائى.

---

٥ فى الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٢٠ سم ووزنه ٣٠ نيوتن متصل بمفصل مثبت فى حائط رأسى عند أ والطرف ب مربوط بخيط خفيف طوله ٢٠ $\sqrt{٢}$ سم مثبت طرفه الآخر عند حـ على الحائط أعلى أ فإذا اتزن القضيب أفقيًا فإن رد فعل المفصل على القضيب ....

(أ) فى اتجاه $\overleftarrow{أب}$ (ب) خط عمله يبعد عن الحائط مسافة ١٠ سم

(جـ) ينصف $\overline{بحـ}$ (د) مقداره ١٥ نيوتن.

---

٦ علق ثقل مقداره ٣٤٠ نيوتن بواسطة خيطين طولاهما ١٦ سم ، ٣٠ سم من نقطتين فى خط أفقى واحد البعد بينهما ٣٤ سم. فإن الشد فى الخيطين على الترتيب يساوى .... نيوتن.

(أ) ١٠٠ $\sqrt{٣}$ ، ٦٠ $\sqrt{٣}$ (ب) ١٥٠ $\sqrt{٢}$ ، ٨٠ $\sqrt{٢}$

(جـ) ٣٠٠ ، ١٦٠ (د) ٣٠٠ ، ١٠٠

---

٧ الصورة العامة لمعادلة الدائرة التى مركزها (٥ ، -٤) وتمس محور السينات هى ....

(أ) $س^٢ + ص^٢ - ١٠ س + ٨ ص + ٢٥ = ٠$

(ب) $س^٢ + ص^٢ - ٥ س + ٤ ص = ٠$

(جـ) $س^٢ + ص^٢ - ١٠ س + ٨ ص = ٢٥$

(د) $س^٢ + ص^٢ + ١٠ س - ٨ ص + ٢٥ = ٠$

٨ قضيب منتظم طوله ١٠٠ سم ووزنه ١٥٠ ث جم عُلق من طرفيه تعليقًا حرًا بواسطة خيطين ، ثُبت طرفاهما فى نقطة واحدة ، فإذا كان طولا الخيطين ٨٠ سم ، ٦٠ سم فأوجد مقدار الشد فى كل منهما.

---

٩ إذا كانت $\overrightarrow{ح}$ محصلة القوتين $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ وكانت $\overrightarrow{ح} \perp \overrightarrow{ق_١}$ وكانت $ح = \frac{١}{٢} ق_٢$

فإن قياس الزاوية بين القوتين $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ هو ....

(أ) ٩٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ١٣٥° (د) ١٥٠°

---

١٠ هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٨ سم فإذا كان حجمه ١٢٩٦ سم^٣

أوجد ارتفاعه الجانبى ومساحته الجانبية.

---

١١ ثلاث قوى مقاديرها ٦٠ ، ق ، ك نيوتن متزنة وملاقية فى نقطة ، فإذا كان قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية ١٢٠° وبين الثانية والثالثة ٩٠°

فإن : مقدار ك = ... نيوتن.

(أ) $٣٠\sqrt{٣}$ (ب) $٣٠\sqrt{٢}$ (جـ) ٣٠ (د) ٦٠

---

١٢ مخروط قائم حجمه ٢٧ π سم^٣ ومحيط قاعدته ٦ π سم.

فإن ارتفاعه = ... سم

(أ) ٢٧ (ب) ٣ (جـ) $٣\sqrt{٣}$ (د) ٩

---

١٣ النسبة بين المساحة الجانبية للهرم الثلاثى المنتظم الوجوه إلى مساحته الكلية = ...

(أ) ١ : ٣ (ب) ١ : ٤ (جـ) ٣ : ٤ (د) ١ : ٢

---

١٤ أ ب جـ د هـ و شكل سداسى منتظم. تؤثر القوى التى مقاديرها ٢ ، $٤\sqrt{٣}$ ، $٤\sqrt{٣}$ ، ٢ ث.كجم فى نقطة أ فى الاتجاهات $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أجـ}$ ، $\overleftarrow{أهـ}$ ، $\overleftarrow{أو}$ على الترتيب.

فإن محصلة هذه القوى تعمل فى اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{أجـ}$ (ب) $\overleftarrow{أهـ}$ (جـ) $\overleftarrow{أد}$ (د) $\overleftarrow{أو}$

---

١٥ طول القطعة المماسة المرسومة للدائرة $س^٢ + ص^٢ = نق^٢$ من النقطة (٠ ، ٢ نق) هو .... وحدة طول.

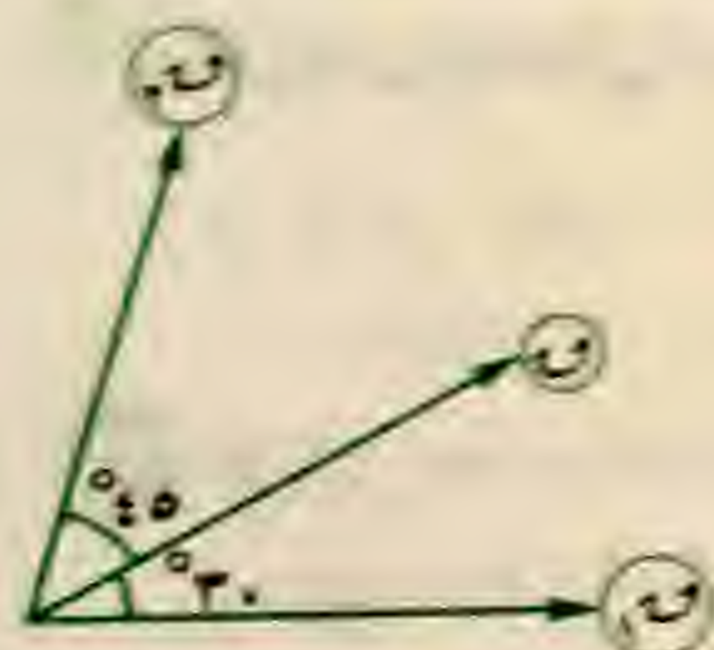
(أ) نق (ب) ٢ نق (جـ) $\sqrt{٣}$ نق (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ نق

١٦ أ ب حـ مثلث متساوى الساقين فيه : أ ب = أ حـ = ١٠ سم ، ب حـ = ١٢ سم دار دورة كاملة حول قاعدته $\overline{ب حـ}$ احسب حجم الجسم الناشئ من الدوران.

١٧ أ ب حـ ء أَ بَ حَ ءَ مكعب طول حرفه ٢٠ سم وضع بداخله مخروط دائرى قائم بحيث رأس المخروط هو مركز القاعدة أَ بَ حَ ءَ وقاعدة المخروط تمس أضلاع القاعدة أ ب حـ ء فإن النسبة بين حجم المخروط والمكعب = ...

(أ) $\frac{\pi}{١٢}$ (ب) $\frac{\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{١٢}{\pi}$

١٨ فى الشكل المقابل :



القوة $\overrightarrow{ق}$ هى محصلة القوتين $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$

فإن : $\frac{ق_١ + ق_٢}{ق}$ = ...

(أ) جا ٣٠° + جا ٤٥° (ب) $\frac{جا ٧٥° + جا ٣٠°}{جا ٧٥°}$

(جـ) $\frac{جا ٤٥° + جا ٣٠°}{جا ٧٥°}$ (د) $\frac{جا ٧٥°}{جا ٣٠°} + \frac{جا ٧٥°}{جا ٤٥°}$

١٩ قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما $ق_١$ ، $ق_٢$ حيث $٠ \leq ق_١ \leq ١٢$ ، $٨ \leq ق_٢ \leq ١٧$ وقياس الزاوية بينهما ١٨٠° ومقدار محصلتهما ح فإن : ....

(أ) $٣ \leq ح \leq ٤$ (ب) $٠ \leq ح \leq ٤$ (جـ) $٠ \leq ح \leq ١٧$ (د) $٥ \leq ح \leq ١٧$

٢٠ الشكل المقابل يمثل ثلاث قوى



$\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ ، $\overrightarrow{ق_٣}$ مقاديرها ٤ ، ٣ ، ٢ نيوتن على الترتيب فإذا كانت : جا θ = $\frac{٣}{٥}$

فإن مقدار محصلة هذه القوى يساوى .... نيوتن.

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٥

٢١ المستقيمات الرأسية المختلفة فى الفراغ تكون ....

(أ) متوازية. (ب) متخالفة.

(جـ) يجمعهما مستوى واحد. (د) متقاطعة.

٢٢ إذا كانت $\vec{ق}$ تتزن مع قوتين متعامدتين مقداراهما ٨ نيوتن ، ١٥ نيوتن فإن ق = ... نيوتن.

(أ) ٧ (ب) ١٧ (جـ) ٢٣ (د) ٧ $\sqrt{٢}$

٢٣ أي المجسمات يعبر عن الشبكة المقابلة :



(أ) هرم رباعي.

(ب) هرم رباعي منتظم.

(جـ) هرم ثلاثي منتظم الوجوه.

(د) غير ذلك.

٢٤ قوتان مقداراهما ٣ ، ٥ نيوتن ومحصلتهما ٢ نيوتن فإن قياس الزاوية بين المحصلة والقوة الثانية = ...

(أ) ١٨٠° (ب) ٩٠° (جـ) صفر° (د) ٣٠°





النموذج السابع

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ إذا بلغت محصلة قوتين تؤثران في نقطة قيمتها العظمى فإن قياس الزاوية بين خطي عملهما يساوي ....

(أ) ١٨٠° (ب) ١٢٠° (جـ) صفر° (د) ٦٠°

٢ هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ١٠ سم وارتفاعه الجانبي ١٣ سم تكون مساحته الجانبية .... سم^{٢}.

(أ) ٢٦٠ (ب) ٣٦٠ (جـ) ١٣٠ (د) ٥٢٠

٣ مركز الدائرة : س^{٢} + ص^{٢} − ٦ س + ٨ ص = ٠ هو النقطة ....

(أ) (٣ ، −٤) (ب) (٤ ، −٣) (جـ) (−٣ ، ٤) (د) (−٤ ، ٣)

٤ إذا كانت $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ ، $\overrightarrow{ق_3}$ ثلاث قوى مقدرة بالنيوتن متزنة ومتلاقية فى نقطة واحدة

وكانت : $\overrightarrow{ق_1}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ − ٣ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ + ٥ $\overrightarrow{ص}$

فإن : $\overrightarrow{ق_3}$ = ... نيوتن.

(أ) ٥ $\overrightarrow{س}$ + ٢ $\overrightarrow{ص}$ (ب) −٥ $\overrightarrow{س}$ − ٢ $\overrightarrow{ص}$

(جـ) $\sqrt{٢٩}$ (د) $\sqrt{٣٤}$

---

٥ وضع جسم وزنه (و) نيوتن على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠°

وحفظ الجسم فى حالة توازن بتأثير قوة مقدارها ٣٦ نيوتن تعمل فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى. فإن مقدار وزن الجسم = ... نيوتن.

(أ) ٣٦ $\sqrt{٣}$ (ب) ٣٦ $\sqrt{٢}$ (جـ) ٧٢ (د) ٧٢ $\sqrt{٣}$

---

٦ الصورة العامة لمعادلة الدائرة التى مركزها م (−٢ ، ٥) وتمر بالنقطة (٣ ، ٢)

هى ....

(أ) $س^2$ + $ص^2$ − ٤ س + ١٠ ص − ٥ = ٠ .

(ب) $س^2$ + $ص^2$ + ٤ س − ١٠ ص − ٥ = ٠ .

(جـ) $س^2$ + $ص^2$ + ٢ س − ٥ ص − ٥ = ٠ .

(د) $س^2$ + $ص^2$ + ٤ س − ١٠ ص − ٢٥ = ٠ .

---

٧ إذا كان المستقيم ل // المستوى س ، أ ∈ س فإن : ل ∩ س = ...

(أ) ∅ (ب) ل (جـ) {أ} (د) س

---

٨ هرم رباعى منتظم مساحته الجانبية ٢٤٠ $سم^2$ وارتفاعه الجانبى ١٢ سم

أوجد : (١) ارتفاع الهرم. (٢) حجم الهرم.

---

٩ إذا طوينا هذه الشبكة لتصبح مخروطًا

فإن طول نصف قطر قاعدته = ...



(أ) ١٠ سم (ب) ٨ سم (جـ) ٥ سم (د) ٢,٥ سم

١٠ كرة معدنية وزنها ٤٠٠ ث.كجم يؤثر فى مركزها ، موضوعة بين مستويين أملسين أحدهما رأسى والآخر يميل على الرأسى بزاوية قياسها ٦٠°
أوجد رد فعل كل من المستويين.

---

١١ حجم مخروط قائم طول راسمه = ١٥ سم ، مساحته الكلية = ٢١٦ π سم^2 يساوى .... سم^3

(أ) ٢٠٥ π (ب) ٣٢٠ π (جـ) ٣٨٠ π (د) ٣٢٤ π

---

١٢ إذا كانت ح هى محصلة قوتين ق$_1$ ، ق$_2$ حيث : ق$_2$ > ق$_1$ فأى من الشروط الآتية يجعل ح ⊥ ق$_1$ ؟

(أ) ح^2 = ق$_1^2$ + ق$_2^2$ (ب) ح^2 = ق$_2^2$ − ق$_1^2$

(جـ) ق$_1$ ⊥ ق$_2$ (د) جميع ما سبق.

---

١٣ أ ب جـ د مربع طول ضلعه ١٢ سم ، هـ ∈ ب جـ بحيث ب هـ = ٥ سم أثرت قوى مقاديرها ٢ ، ١٣ ، ٤ $\sqrt{2}$ ، ٩ ث.جم فى الاتجاهات أ ب ، أ هـ ، جـ أ ، أ د على الترتيب ، عيِّن محصلة هذه القوى.

---

١٤ إذا كانت : س^2 + ص^2 + ٢ (جتا θ) س − ٢ (جا θ) ص − ٨ = ٠ تمثل معادلة دائرة فإن : نق = ... وحدة طول.

(أ) $\sqrt{2}$ (ب) ٢ $\sqrt{2}$ (جـ) ٣ (د) ٨

---

١٥ أربع قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة مقاديرها ق$_1$ ، ٦ $\sqrt{2}$ ، ٦ $\sqrt{2}$ ، ق$_2$ ثقل جرام وتؤثر الأولى فى اتجاه الشرق والثانية فى اتجاه الشمال الشرقى والثالثة فى اتجاه الشمال الغربى والرابعة تؤثر فى اتجاه الجنوب فإذا كانت محصلة هذه القوى تساوى ٧ ثقل جرام وتؤثر فى اتجاه الشرق. فإن : (ق$_1$ ، ق$_2$) = ...

(أ) (٧ ، ٠) (ب) (٧ ، ١٢) (جـ) (٧ ، ١٢ $\sqrt{2}$) (د) (٦ $\sqrt{2}$ ، ٦ $\sqrt{2}$)

١٦ عند طى الشكل الذى أمامك

فإن المساحة الكلية للجسم الناتج = ... سم²

(أ) $١٠٨\sqrt{٣}$

(ب) $٣٢٤\sqrt{٣}$

(جـ) ٧٥٨

(د) $١٣٩\sqrt{٣}$

١٧ أ ب جـ د هـ شكل خماسى منتظم أثرت قوة مقدارها ٢٠ نيوتن فى اتجاه $\overrightarrow{أ جـ}$ ثم حُللت هذه القوة فى اتجاهين $\overrightarrow{أ ب}$ ، $\overrightarrow{أ هـ}$ فإن مقدار مركبة القوة فى اتجاه $\overrightarrow{أ ب}$ يساوى .... نيوتن

(أ) ١٠

(ب) ٢٠

(جـ) $٢٠\sqrt{٣}$

(د) ١٢,٤

١٨ مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ١٥ سم وارتفاعه ٢٠ سم فإن مساحته الجانبية = ... سم²

(أ) ٦٠٠ π

(ب) ٣٧٥ π

(جـ) ١٨٧٥ π

(د) ٥٦٢٥ π

١٩ إذا كانت القوة التى مقدارها ق تتزن مع قوتين مقداراهما ٥ ، ٣ نيوتن والقتان تحصران بينهما زاوية قياسها ٦٠° فإن : ق = ... نيوتن

(أ) $\sqrt{١٩}$

(ب) $\sqrt{٣٤}$

(جـ) ٧

(د) ١٥

٢٠ فى الشكل المقابل :

القوة $\overrightarrow{ق}$ هى محصلة القوتين $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$

فإن : $\frac{ق_١ + ق_٢}{ق}$ = ...

(أ) جا ٣٠° + جا ٤٥°

(ب) $\frac{جا ٧٥° + جا ٣٠°}{جا ٧٥°}$

(جـ) $\frac{جا ٤٥° + جا ٣٠°}{جا ٧٥°}$

(د) $\frac{جا ٧٥°}{جا ٣٠°} + \frac{جا ٧٥°}{جا ٤٥°}$

٢١ مركز الدائرة ٢ س² + ٢ ص² − ٦ س + ٨ ص = ٠ هو النقطة ....

(أ) (٣ ، −٤)

(ب) (−٤ ، ٣)

(جـ) $\left(\frac{٣}{٢} ، −٢\right)$

(د) (−٣ ، −٤)

٢٢ قوتان متعامدتان مقداراهما ٦ ، ٨ نيوتن فإن جيب زاوية ميل المحصلة على القوة الأولى = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

---

٢٣ أقل عدد من المستويات التى يمكن أن تحدد سطح مجسم هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

---

٢٤ إذا كان : $\overleftarrow{ق_١} = ٢\overleftarrow{س} - ٢\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٢} = ٤\overleftarrow{س} - ٨\overleftarrow{ص}$

، محصلتهما $\overleftarrow{ح} = ٢أ\overleftarrow{س} - ٣ب\overleftarrow{ص}$ فإن : أ + ب = ...

(أ) ٢ (ب) $٣\frac{١}{٣}$ (جـ) $٦\frac{١}{٣}$ (د) ١٢



النمــوذج الثامن



امتحان إلكترونى ٨

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ قوتان مقداراهما ٨ ، ق ث.جم وقياس الزاوية بينهما ∈]٠ ، π[، ومحصلتهما تنصف الزاوية بينهما فإن : ق = ... ث.جم.

(أ) $٢\sqrt{٢}$ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٦

---

٢ حجم هرم رباعى منتظم محيط قاعدته ٣٦ سم وارتفاعه ١٠ سم يساوى .... سم^٣

(أ) ٨١٠ (ب) ١٨٠ (جـ) ٣٦٠ (د) ٢٧٠

---

٣ محيط الدائرة التى معادلتها : $س^٢ + ص^٢ = ٨$ هو ....

(أ) ٨π (ب) ٦٤π (جـ) $٢\sqrt{٢}$π (د) $٤\sqrt{٢}$π

---

٤ إذا اتزنت ثلاث قوى متلاقية فى نقطة فإن مقدار كل قوة يتناسب مع .... الزاوية المحصورة بين القوتين الآخريين.

(أ) جيب تمام (ب) جيب (جـ) ظل (د) ظل تمام

٥ قوتان متساويتان فى المقدار ومقدار كل منهما ق نيوتن فإذا كان مقدار محصلتهما ق نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما = ...

(أ) صفر (ب) ٣٠° (جـ) ٦٠° (د) ١٢٠°

٦ هرم سداسى منتظم حجمه ٨ $\sqrt{٣}$ سم^٣ وارتفاعه ٤ سم أوجد محيط قاعدته.

٧ قوة مقدارها ١٠ $\sqrt{٢}$ ثقل. جرام تعمل فى اتجاه الجنوب الشرقى تم تحليلها إلى مركبتين متعامدين فإن مقدار مركبة القوة فى اتجاه الجنوب = ... ثقل. جرام.

(أ) ١٠ $\sqrt{٣}$ (ب) ١٠ $\sqrt{٢}$ (جـ) ١٠ (د) ٥

٨ الصورة العامة لمعادلة الدائرة التى مركزها (٢ ، −١) وطول نصف قطرها ٣ سم هى ....

(أ) س^٢ + ص^٢ − ٤ س + ٢ ص − ٤ = ٠.

(ب) س^٢ + ص^٢ − ٢ س + ص − ٤ = ٠.

(جـ) س^٢ + ص^٢ + ٤ س − ٢ ص − ٤ = ٠.

(د) س^٢ + ص^٢ − ٤ س + ٢ ص − ١٦ = ٠.

٩ جسم وزنه ٢٤ نيوتن معلق فى أحد طرفى خيط طوله ١٣٠ سم وطرفه الآخر مثبت فى نقطة من حائط رأسى ، أثرت على الجسم قوة أفقية ق ، فاتزن الجسم عندما يكون على بعد ٥٠ سم من الحائط فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٢٦ (ب) ١٢ (جـ) ١٣ (د) ١٠

١٠ الزاوية المركزية للقطاع الذى إذا طويناه أصبح المخروط الموضح تكون ....



(أ) حادة. (ب) منفرجة.

(جـ) مستقيمة. (د) منعكسة.

١١ أثرت قوى مقاديرها ق ، ٨٠ ، ك ، ٥٠ ، ٨٠ ، $٣\sqrt{٣}$ ث.كجم فى نقطة مادية فى اتجاهات الشرق ، ٣٠° شرق الشمال ، الشمال ، الغرب ، الجنوب على الترتيب.

أوجد قيمتى ق ، ك إذا كانت محصلة القوى = ٤٠ ث.كجم فى اتجاه ٦٠° شمال الشرق.

١٢ عدد المستويات التى تمر بنقطتين معلومتين هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائى.

١٣ مخروط دائرى قائم طول راسمه ١٧ سم وارتفاعه ١٥ سم

فإن طول نصف قطر قاعدته = ... سم.

(أ) ٨ (ب) ١٣ (جـ) ٧ (د) ١٢

١٤ فى الشكل المقابل :



دائرة م تمس محور السينات عند أ

، و ب = ٢ وحدة طول ، ب جـ = ٦ وحدة طول

فإن معادلة الدائرة م هى ....

(أ) $(س + ٤)^٢ + (ص + ٥)^٢ = ١٦$ (ب) $(س - ٤)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ٢٥$

(جـ) $(س - ٤)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ١٦$ (د) $(س + ٤)^٢ + (ص + ٥)^٢ = ٢٥$

١٥ وضع جسم وزنه ٦ ث.كجم على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠°

وحفظ فى حالة توازن بواسطة قوة أفقية فإن مقدار رد فعل المستوى

على الجسم = ... ث.كجم.

(أ) $٢\sqrt{٣}$ (ب) $٤\sqrt{٣}$ (جـ) $١٢\sqrt{٣}$ (د) $٨\sqrt{٣}$

١٦ أوجد قيم ك التى تجعل الدائرتين :

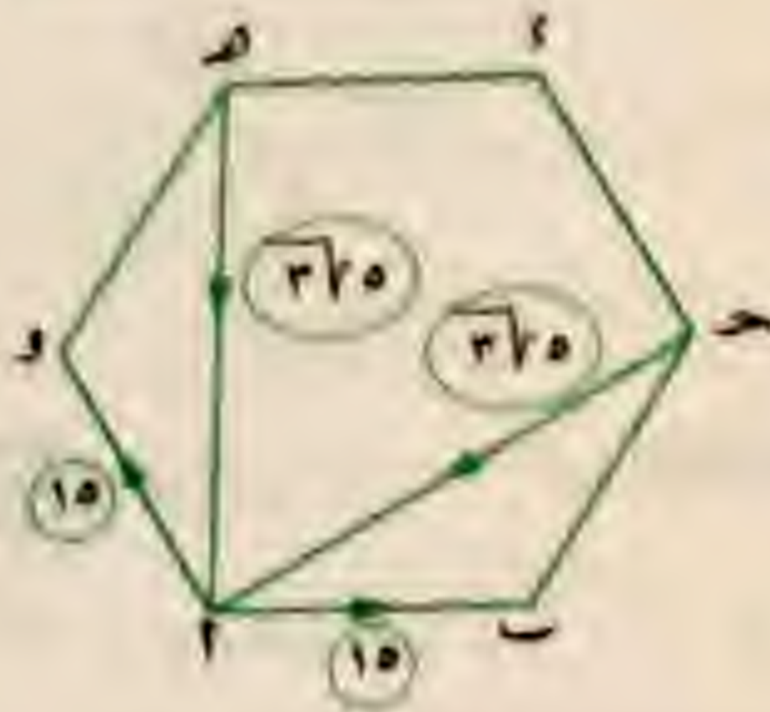
$د_١ : (س + ٢)^٢ + (ص + ١١)^٢ = ك$ ، $د_٢ : (س - ٣)^٢ + (ص - ١)^٢ = ١٦$

متماستين.

١٧ إذا كانت محصلة قوتين متعامدتين تميل على القوة الكبرى بزاوية قياسها θ فأى القيم الآتية تصلح قيمة لـ θ ؟

(أ) ٩٠° (ب) ٧٠° (جـ) ٤٥° (د) ١٠°

١٨ فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم

أثرت القوى ١٥ ، ٥ $\sqrt{3}$ ، ٥ $\sqrt{3}$ ، ١٥ على الترتيب فى الأضلاع $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{حـأ}$ ، $\overleftarrow{هـأ}$ ، $\overleftarrow{أو}$

فإن المحصلة ح = ... نيوتن.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢٥ (د) صفر

١٩ أ ب حـ ء هـ و شكل سداسى منتظم أثرت قوة مقدارها ٢٠ نيوتن فى اتجاه $\overleftarrow{أء}$ فإن مركبتى القوة فى اتجاه $\overleftarrow{أحـ}$ ، $\overleftarrow{أو}$ على الترتيب هما ....

(أ) ١٠ $\sqrt{3}$ ، ١٠ (ب) ٥ $\sqrt{3}$ ، ١٠ (جـ) ١٠ ، ١٠ $\sqrt{3}$ (د) ٢٠ $\sqrt{3}$ ، ٢٠

٢٠ الشبكة التى أمامك تصف مجسمًا حجمه ٩٦ π سم^3



فإن مساحته الكلية = ... سم^2

(أ) ١٦ π (ب) ٣٢ π

(جـ) ٤٨ π (د) ٩٦ π

٢١ أى الجمل الآتية صحيحة ؟

(أ) الأوجه الجانبية للهرم القائم تكون متطابقة.

(ب) الهرم المنتظم هو هرم قائم.

(جـ) ارتفاعات الأوجه الجانبية للهرم تكون متساوية.

(د) أقل عدد من المستويات التى تحدد مجسم = ٣ مستويات.

٢٢ في الشكل المقابل :

مصباح وزنه و ث.جم معلق في نهاية خيط اتزن بتأثير قوة عمودية على الخيط عندما يميل الخيط على الرأسي بزاوية قياسها ٦٠°

فإن : $\frac{ق}{و}$ = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (د) $\sqrt{٣}$

٢٣ قوتان ق ، ٢ ق محصلتهما تكون عمودية على إحداهما فإن : ح = ...

(أ) ق $\sqrt{٥}$ (ب) ق $\sqrt{٣}$ (جـ) ٢ ق (د) ق

٢٤ في الشكل المقابل :

هرم رباعي منتظم فإن ارتفاعه = ... سم

(أ) ٧ $\sqrt{٢}$ (ب) ٢ $\sqrt{٧}$

(جـ) ٤ $\sqrt{٢}$ (د) ٢ $\sqrt{٥}$





النموذج التاسع

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ قوتان متعامدتان مقداراهما ٢ ق − ٥ ، ق + ٢ نيوتن تؤثران في نقطة مادية ، و محصلتهما يساوي ٣ $\sqrt{٥}$ نيوتن فإن : ق = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

٢ أى المجسمات يعبر عن الشبكة المقابلة ؟



(أ) هرم رباعي.

(ب) هرم باعي منتظم.

(جـ) هرم ثلاثي منتظم الوجوه.

(د) غير ذلك.







٣ مخروط دائرى قائم حجمه ١٠٠ سم^3 فإن حجمه عندما يتضاعف ارتفاعه يساوى .... سم^3

(أ) ١٠٠ (ب) ٢٠٠ (جـ) ٤٠٠ (د) ٨٠٠

٤ وضع جسم وزنه ١٨ ث.كجم على مستوٍ مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ومنع من الانزلاق بتأثير قوة قدرها (ق) تميل على اتجاه خط أكبر ميل للمستوى إلى أعلى بزاوية قياسها ٣٠° فإن مقدار هذه القوة = ... ث.كجم

(أ) ١٢ (ب) ٩ (جـ) $٣\sqrt{٣}$ (د) $٦\sqrt{٣}$

٥ قوة مقدارها $٤\sqrt{٢}$ تعمل فى اتجاه الشرق تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مركبتها فى اتجاه الشمال الشرقى تساوى .... نيوتن.

(أ) ٤ (ب) $٤\sqrt{٢}$ (جـ) ٨ (د) $٨\sqrt{٢}$

٦ هرم رباعى منتظم محيط قاعدته ٤٠ سم وارتفاعه ١٢ سم

فإن مساحته الجانبية = ... سم^2

(أ) ٢٠٠ (ب) ٢٤٠ (جـ) ٢٦٠ (د) ٣٢٠

٧ معادلة الدائرة التى يمسها المستقيم س + ص = ٢ ومركزها (٣ ، ٥) هى ....

(أ) (س − ٣)^2 + (ص − ٥)^2 = $٣\sqrt{٢}$ (ب) (س + ٣)^2 + (ص + ٥)^2 = ١٨

(جـ) (س − ٣)^2 + (ص − ٥)^2 = ١٢ (د) (س − ٣)^2 + (ص − ٥)^2 = ١٨

٨ علق ثقل مقداره ١٦ نيوتن فى أحد طرفى خيط خفيف والطرف الآخر مثبت فى نقطة من حائط رأسى ، أزيح الثقل بقوة فى اتجاه عمودى على الخيط حتى أصبح الخيط فى وضع التوازن يميل على الحائط بزاوية قياسها ٣٠°

فإن مقدار الشد فى الخيط = ... نيوتن

(أ) ٨ (ب) $٨\sqrt{٢}$ (جـ) $٨\sqrt{٣}$ (د) ١٢

٩ $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٦ أمتار ووزنه ٨ ث.كجم يتصل طرفه أ بحائط رأسي عند مفصل ، حفظ القضيب في وضع أفقي بربطه من إحدى نقطة جـ حيث : أجـ = ٤ أمتار بأحد طرفي خيط ثم ثبت الطرف الثاني للخيط في نقطة على الرأسي فوق أ وعلى بعد ٤ أمتار منها. احسب مقدار الشد في الخيط ورد فعل المفصل.

---

١٠ معادلة الدائرة التي تمس محور السينات عند النقطة (−٢ ، ٠) وتقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات وترًا طوله ٤ $\sqrt{٣}$ وحدة طول = ...

(أ) (س + ٢)^2 = ٤٨ (ب) (س + ٢)^2 + (ص − ٤)^2 = ١٨

(جـ) (س − ٢)^2 + (ص + ٤)^2 = ٢٤ (د) (س + ٢)^2 + (ص − ٤)^2 = ١٦

---

١١ قوتان متساويتان في المقدار محصلتهما ٢٤ نيوتن وتميل على القوة الأولى بزاوية قياسها ٣٠° فإن مقدار أي من هاتين القوتين = ... نيوتن.

(أ) ٨ (ب) ٨ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٨ $\sqrt{٢}$ (د) ١٢

---

١٢ قطاع دائري طول نصف قطر دائرته ١٨ سم وقياس زاويته المركزية ٦٠° طوى راصقًا نصفا قطره ليكون أكبر مساحة جانبية لمخروط قائم. أوجد حجم هذا المخروط.

---

١٣ النسبة بين طول حرف الهرم الثلاثي المنتظم الوجوه وارتفاعه = ...

(أ) $\sqrt{٢}$: $\sqrt{٣}$ (ب) $\sqrt{٣}$: ٢ (جـ) $\sqrt{٦}$: ٢ (د) $\sqrt{٣}$: ٢

---

١٤ ثلاث قوى مقاديرها ١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ نيوتن تؤثر في نقطة مادية ، الأولى نحو الشرق ، الثانية تصنع زاوية قياسها ٣٠° غرب الشمال والثالثة تصنع زاوية قياسها ٦٠° جنوب الغرب. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

---

١٥ مخروط دائري قائم مساحة قاعدته ٢٥ π سم^2 وطول راسمه ١٣ سم فإن مساحته الجانبية = ... سم^2

(أ) ٥٠ π (ب) ٦٥ π (جـ) ٩٠ π (د) ١٠٠ π

---

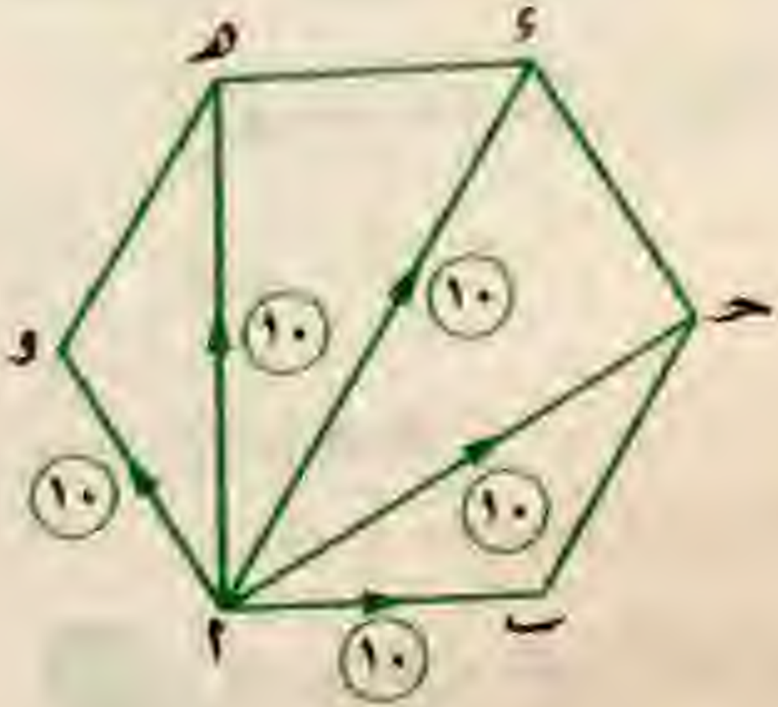
١٦ قوتان مقداراهما ق ، ٢ ق نيوتن تؤثران في نقطة مادية وكانت المحصلة عمودية على إحداهما فإن قياس الزاوية بين القوتين = ...

(أ) ٦٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٣٥°

١٧ النقطة التى تقع على الدائرة : $(س - ٢)^٢ + ص^٢ = ١٣$ هى ....

(أ) (٣ ، ٢) (ب) (٣ ، -٢) (جـ) (٥ ، ٢) (د) (٤ ، ٣)

١٨ أثرت خمس قوى متساوية فى المقدار ومقدار كل منها ١٠ نيوتن فى أحد رؤوس سداسى منتظم وفى اتجاهات الرؤوس الأخرى للسداسى كما بالشكل المقابل



فإن محصلة هذه القوى = ... نيوتن

(أ) ٥٠ (ب) ٢٠ (جـ) $٣٠\sqrt{٣}$ (د) $(٢٠ + ١٠\sqrt{٣})$

١٩ فى الشكل المقابل :

دائرة تم تقسيمها إلى قطاعين دائريين بحيث تكون شبكتى مخروطين قائمين



فإن : $\frac{\text{المساحة الجانبية للمخروط الأصغر}}{\text{المساحة الجانبية للمخروط الأكبر}}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٨}$ (د) $\frac{١}{١٦}$

٢٠ قوتان مقداراهما ٤ ، ٦ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٩٠°

فإن ظل زاوية ميل محصلتهما على القوة الأولى يساوى ....

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $٢\sqrt{١٣}$ (د) $\frac{\sqrt{٦}}{٢}$

٢١ قوتان متساويتان فى المقدار ، قياس الزاوية بينهما ٩٠° ومقدار محصلتهما ٨ نيوتن

فإن مقدار كل منهما = ... نيوتن.

(أ) $٢\sqrt{٢}$ (ب) ٤ (جـ) $٤\sqrt{٢}$ (د) ٨

٢٢ مركز الدائرة $س^٢ + ص^٢ - ٦ س + ٨ ص = ٠$ هو النقطة ....

(أ) (٣ ، -٤) (ب) (٤ ، -٣) (جـ) (-٣ ، ٤) (د) (-٤ ، ٣)

٢٣ فى الشكل المقابل :

أ نقطة مادية متزنة تحت تأثير القوى الثلاث الموضحة بالشكل حيث $\overrightarrow{ق}$ تتزن مع قوتين مقدار كل منهما ٨ نيوتن وتصنع مع كل منهما زاوية قياسها ١٢٠°

فإن : ق = ... نيوتن

(أ) صفر (ب) ٨ (جـ) ١٦ (د) ٨ جا ١٢٠°

٢٤ المستويان غير المتوازيين يتقاطعان فى ....

(أ) نقطة. (ب) خط مستقيم. (جـ) مستوى. (د) شعاع.

النمــوذج العاشر

امتحان إلكترونى

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ النقطة التى تقع على الدائرة $س^٢ + (ص - ٥)^٢ = ٢٠$ هى ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٣ ، -٢) (جـ) (٢ ، ٥) (د) (٤ ، ٣)

٢ قوتان ٣ ، ٤ نيوتن محصلتهما ٧ نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما هو ....

(أ) صفر° (ب) ٦٠° (جـ) ١٨٠° (د) ٩٠°

٣ إذا كانت : $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ ، $\overrightarrow{ق_٣}$ ثلاث قوى متلاقية فى نقطة ومتزنة فإن مقدار محصلة $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ يساوى ....

(أ) $ق_١$ (ب) $ق_١ + ق_٢$ (جـ) $ق_٣$ (د) صفر

٤ قوتان مقداراهما ٨ ، ق نيوتن تؤثران فى نقطة مادية ، إذا كان قياس الزاوية بينهما ١٢٠° ومحصلتهما $ق\sqrt{٣}$ نيوتن فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٤ (ب) $٤\sqrt{٢}$ (جـ) $٤\sqrt{٣}$ (د) ٨

٥ مخروط دائرى قائم طول راسمه ١٧ سم وارتفاعه ١٥ سم فإن مساحته الكلية = ... سم^{٢}

(أ) ٢٠٠ π (ب) ١٣٦ π (جـ) ٣٢٠ π (د) ٤٠٠ π

٦ هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ٢٠ سم وارتفاعه ١٠ $\sqrt{٣}$ سم

أوجد : (١) المساحة الجانبية للهرم. (٢) حجم الهرم.

٧ إذا كانت (و) هى نقطة الأصل لنظام إحداثى متعامد فى المستوى وكانت $\overrightarrow{ق}$ = (٨ ث.كجم ، ١٣٥°) قوة تؤثر فى نقطة و فإن مركبة القوة $\overrightarrow{ق}$ فى اتجاه محور الصادات تساوى ....

(أ) -٤ $\sqrt{٢}$ (ب) ٤ $\sqrt{٢}$ (جـ) ٤ $\sqrt{٣}$ (د) ٤

٨ أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم. أثرت قوى مقاديرها ٦ $\sqrt{٣}$ ، ٥ ، ٦ $\sqrt{٣}$ نيوتن فى $\overleftarrow{أحـ}$ ، $\overleftarrow{أء}$ ، $\overleftarrow{أهـ}$ على الترتيب. فإن مقدار واتجاه محصلة هذه القوى هو ....

(أ) ١٨ نيوتن فى اتجاه $\overleftarrow{أء}$ (ب) ٢٣ نيوتن فى اتجاه $\overleftarrow{أء}$

(جـ) ٢٠ نيوتن فى اتجاه $\overleftarrow{أهـ}$ (د) ٢٣ نيوتن فى اتجاه $\overleftarrow{أحـ}$

٩ علق ثقل مقداره ٣٢ نيوتن فى طرف خيط طوله ١٠ سم وثبت الطرف الآخر للخيط فى حائط رأسى ثم شد الثقل بقوة أفقية أبعدته عن الحائط فاتزن عندما كان الثقل يبعد عن الحائط مسافة ٦ سم. فإن مقدار القوة = ... نيوتن.

(أ) ٢٤ (ب) ٤٠ (جـ) ٣٦ (د) ٢٨

١٠ وضع جسم وزنه ١٨ نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ومنع من الانزلاق بتأثير قوة أفقية قدرها ق نيوتن فإن مقدار رد فعل المستوى على الجسم = ... نيوتن.

(أ) ٦ $\sqrt{٣}$ (ب) ٨ $\sqrt{٣}$ (جـ) ١٢ $\sqrt{٣}$ (د) ١٠ $\sqrt{٣}$

١١ معادلة الدائرة التى مركزها (-٤ ، ٣) وتمر بنقطة الأصل هى ....

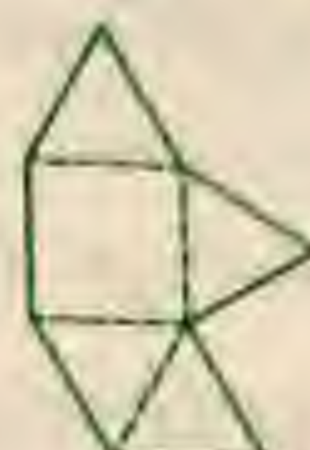
(أ) (س + ٤)^{٢} + (ص - ٣)^{٢} = ٥ (ب) (س - ٤)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ٢٥

(جـ) (س + ٤)^{٢} + (ص - ٣)^{٢} = ٦٢٥ (د) (س + ٤)^{٢} + (ص - ٣)^{٢} = ٢٥

١٢ إناء أسطوانى الشكل به ماء ، غمر فيه جسم معدنى على شكل مخروط قائم ، ارتفاعه ١٢ سم وطول نصف قطر قاعدته ٢ سم غمرًا كاملًا ، فارتفع سطح الماء فى الإناء بمقدار ١ سم أوجد طول قطر قاعدة الإناء.

١٣ أى الشبكات التالية لا تصنع هرمًا رباعيًا منتظمًا عند طيها ؟


(أ)


(ب)


(جـ)


(د)

١٤ خمس قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة مقاديرها ١٢ ، ٩ ، ٥ $\sqrt{٣}$ ، ٧ $\sqrt{٢}$ ، ٧ ث.كجم تعمل فى اتجاهات الشرق ، الشمال ، الشمال الغربى ، الجنوب الغربى ، الجنوب على الترتيب. أثبت أن المجموعة متزنة.

١٥ الشبكة التى أمامك تصف مجسمًا حجمه ٩٦ π سم^{٣}



فإن مساحته الكلية = ... سم^{٢}

(أ) ٩٦ π (ب) ٤٨ π

(جـ) ٣٢ π (د) ١٦ π

١٦ فى الشكل المقابل :

إذا كانت معادلة الدائرة هى

$س^{٢} + ص^{٢} - ٦ س + ٤ ص - ١٢ = ٠$.

، $\overline{مب} \perp$ المستقيم ل حيث ل : $٣ س - ٤ ص + ٢٣ = ٠$.

، $\overline{مب}$ يقطع الدائرة فى أ فإن : طول $\overline{أب}$ = ... وحدة طول.

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٨ (د) ١٢

١٧ قوتان مقداراهما ق ، ق $\sqrt{٣}$ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية ومقدار محصلتهما ق نيوتن وكانت هـ$_1$ هى قياس الزاوية بين القوة الأولى والمحصلة وكانت هـ$_2$ قياس الزاوية بين القوة الثانية والمحصلة فإن : ....

(أ) هـ$_1$ = هـ$_2$ (ب) هـ$_1$ = $\frac{١}{٢}$ هـ$_2$ (جـ) هـ$_1$ = ٣ هـ$_2$ (د) هـ$_1$ = ٤ هـ$_2$

---

١٨ أى الجمل الآتية غير صحيحة ؟

(أ) أى مستقيمين مختلفين ومتوازيين يعينان مستويًا.

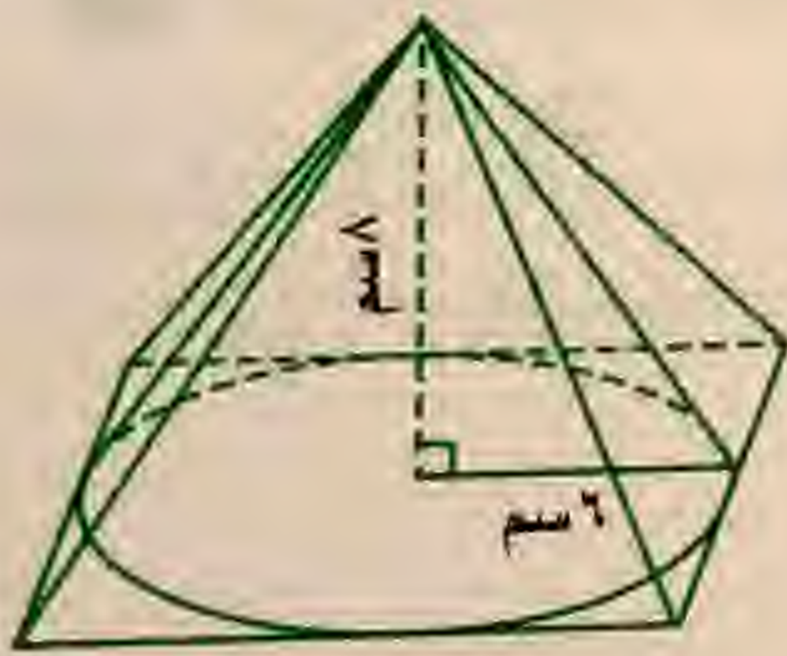
(ب) كل مستقيمين مختلفين متقاطعين يشتركان فى نقطة واحدة.

(جـ) المستقيمان المتخالفان لا يجمعهما مستوى واحد.

(د) أى ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة يمر بها مستوى واحد على الأقل.

---

١٩ فى الشكل المقابل :



هرم قائم منتظم ومخروط دائرى قائم مشتركان فى الرأس وقاعدة المخروط سطح دائرة تمس أضلاع قاعدة الهرم من الداخل فإن النسبة بين المساحة الجانبية للمخروط القائم والمساحة الجانبية للهرم تساوى ....

(أ) $\frac{٤}{\pi}$ (ب) $\frac{٥}{٦}$ (جـ) $\frac{٧}{٨}$ (د) $\frac{\pi}{٤}$

---

٢٠ قوة مقدارها ٥ $\sqrt{٣}$ نيوتن تعمل فى اتجاه ٣٠° شرق الشمال تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مقدار مركبتها فى اتجاه الشرق يساوى .... نيوتن.

(أ) $\frac{٥\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $\frac{١٥}{٢}$ (جـ) $\frac{١٥\sqrt{٣}}{٢}$ (د) ١٥ $\sqrt{٣}$

---

٢١ إذا كانت $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ ، $\overleftarrow{ق_3}$ ثلاث قوى متلاقية فى نقطة ومتزنة فإن مقدار محصلة $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ يساوى ....

(أ) ق$_1$ (ب) ق$_2$ + ق$_3$ (جـ) ق$_3$ (د) صفر



٢٢ في الشكل المقابل :
جسم وزنه ١٨ نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° يتزن بتأثير قوة أفقية ق نيوتن
فإن : ق + ر = ... نيوتن.

(أ) ٦ $\sqrt{٣}$ (ب) ١٢ $\sqrt{٣}$
(جـ) ١٨ $\sqrt{٣}$ (د) ٢٤ $\sqrt{٣}$

---

٢٣ طول قطر الدائرة : ٤ $س^٢$ + ٤ $ص^٢$ + ١٦ س − ٨ ص − ١٦ = .
يساوي .... وحدة طول.

(أ) ٢ (ب) ٦ (جـ) ١٢ (د) ٢٤

---

٢٤ النسبة بين طول حرف الهرم الثلاثي المنتظم الوجوه وارتفاعه تساوي ....

(أ) $\sqrt{٢}$: $\sqrt{٣}$ (ب) $\sqrt{٣}$: ٢ (جـ) $\sqrt{٦}$: ٢ (د) $\sqrt{٣}$: ٣

ثالثًا : امتحانات الإدارات التعليمية

١ محافظة القاهرة



أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ قوتان متلاقيتان فى نقطة مقدارهما ٥ نيوتن ، ٣ نيوتن فإن مقدار محصلتهما مقاسة بالنيوتن ∋ ....

(أ) [٢ ، ٨] (ب)]٢ ، ٨[(جـ) [٢ ، ٥] (د)]٢ ، ٥[

٢ قوتان متساويتان فى المقدار متلاقيتان فى نقطة مقدار كل منهما ٦ نيوتن ومقدار محصلتهما ٦ نيوتن ، فإن قياس الزاوية بينهما يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

٣ قوتان متساويتان فى المقدار وقياس الزاوية بينهما ٩٠° ومقدار محصلتهما ٦ نيوتن فإن مقدار كل قوة منهما يساوى .... نيوتن.

(أ) $3\sqrt{2}$ (ب) ٤ (جـ) $4\sqrt{2}$ (د) ٨

٤ قوة مقدارها $4\sqrt{2}$ نيوتن تعمل فى اتجاه الشرق تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مركبتها فى اتجاه الشمال الشرقى تساوى .... نيوتن.

(أ) صفر (ب) $4\sqrt{2}$ (جـ) ٤ (د) ٦

٥ بتحليل القوة التى مقدارها ١٠ نيوتن إلى مركبتين $\overline{ق_1}$ ، $\overline{ق_2}$ اللتين تصنعان معها زاويتين قياسيهما ٦٠° ، ٩٠° من الجهتين كما بالشكل



فإن : $ق_1$ = ... نيوتن.

(أ) $5\sqrt{3}$ (ب) ١٠ (جـ) $10\sqrt{3}$ (د) ٢٠

٦ إذا كان: $\overleftarrow{ق_1} = ٢\overleftarrow{س} - ٢\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_2} = ٤\overleftarrow{س} - ٨\overleftarrow{ص}$

، محصلتهما $\overleftarrow{ح} = ٢أ\overleftarrow{س} - ٣ب\overleftarrow{ص}$ فإن: أ + ب = ...

(أ) ٢ (ب) $٢\frac{١}{٣}$ (جـ) $٦\frac{١}{٣}$ (د) ١٢

---

٧ إذا أثرت القوى $\overleftarrow{ق_1} = ٤\overleftarrow{س} + ٥\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_2} = أ\overleftarrow{س} - ٧\overleftarrow{ص}$

، $\overleftarrow{ق_3} = ٣\overleftarrow{س} + ب\overleftarrow{ص}$ فى نقطة مادية وكانت القوى متزنة

فإن: أ + ٢ب = ...

(أ) −٥ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) −٣

استخدم الشكل المقابل فى الإجابة عن السؤالين (٨ ، ٩):

إذا كان أ ب حـ ء هـ و شكل سداسى منتظم

تؤثر القوى ٢ ، ٤ $\sqrt{٣}$ ، ٨ ، ٢ $\sqrt{٣}$ ، ٤ ثقل كجم

فى الاتجاهات $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أحـ}$ ، $\overleftarrow{أء}$ ، $\overleftarrow{أهـ}$ ، $\overleftarrow{أو}$ على الترتيب

٨ مقدار محصلة القوى = ... ث.كجم

(أ) (١٤ + ٦ $\sqrt{٣}$) (ب) ٢٠

(جـ) ٢٠ $\sqrt{٣}$ (د) (٢٠ + $\sqrt{٣}$)

٩ اتجاه محصلة هذه القوى تميل على $\overleftarrow{أب}$ بزاوية قياسها ....

(أ) °٣٠ (ب) °٤٥ (جـ) °٦٠ (د) °٩٠

استخدم الشكل المقابل فى الإجابة عن السؤالين (١٠ ، ١١):

إذا كان الشكل يمثل مجموعة من القوى المستوية المتزنة



١٠ ق = ... نيوتن.

(أ) ٨٠ (ب) ٤٠

(جـ) ٥٠ (د) ٤٠ $\sqrt{٣}$

١١ شـ = ... نيوتن.

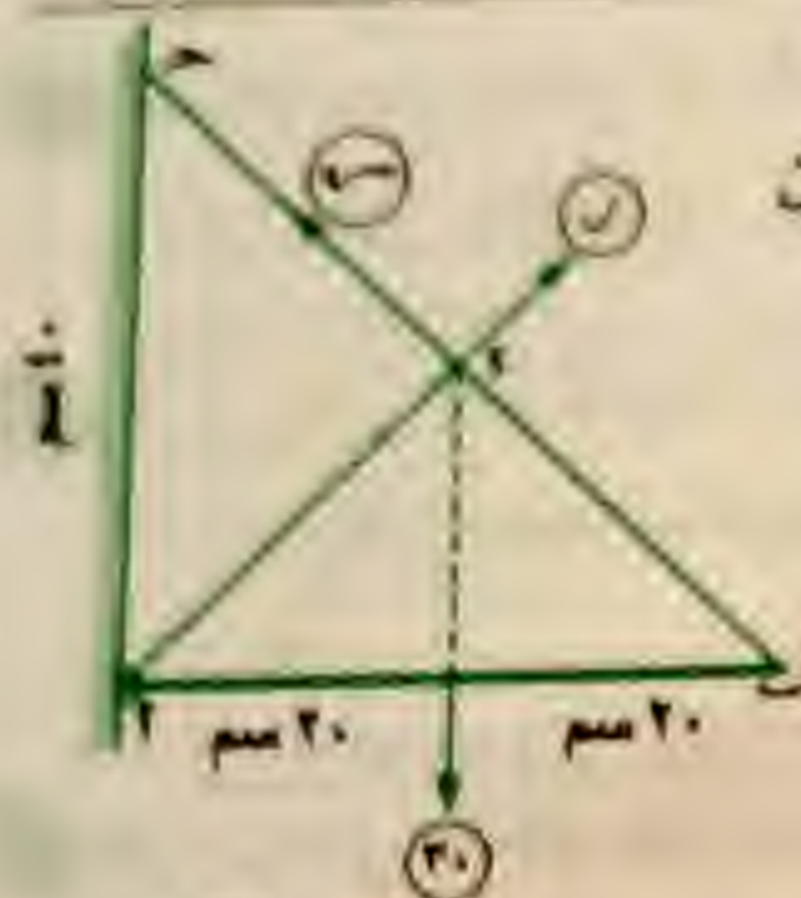
(أ) ٨٠ (ب) ٤٠

(جـ) ٤٠ $\sqrt{٣}$ (د) ٥٠

١٢ ثلاث قوى متساوية في المقدار ومتلاقية في نقطة ومتزنة فإن قياس الزاوية بين أى قوتين منهما يساوى ....

(أ) ٦٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

استخدم الشكل المقابل في الإجابة عن السؤالين (١٣ ، ١٤) :



إذا كان $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٤٠ سم ، ووزنه ٣٠ نيوتن متصل بمفصل عند أ ويتزن أفقيًا بخيط طرفاه عند ب وعند جـ حيث جـ تقع رأسيًا فوق أ ، أجـ = ٤٠ سم

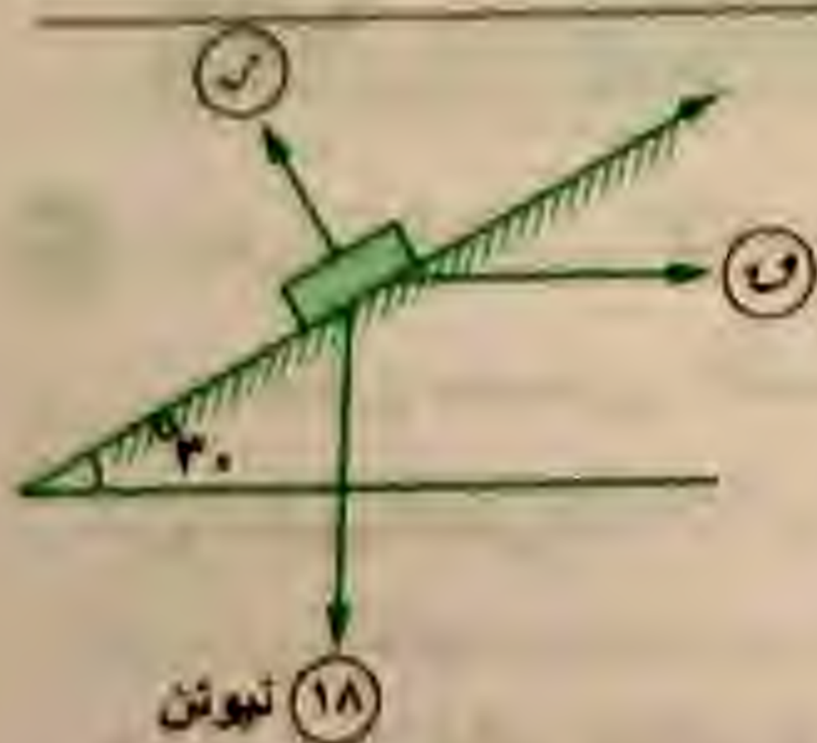
١٣ رد فعل المفصل ر = ... نيوتن.

(أ) ٣٠ (ب) ٢٠ (جـ) $٤٠\sqrt{٢}$ (د) $١٥\sqrt{٢}$

١٤ الشد في الخيط $\overline{بجـ}$ = ... نيوتن.

(أ) $١٥\sqrt{٢}$ (ب) ٣٠ (جـ) ٢٠ (د) $٤٠\sqrt{٢}$

١٥ في الشكل المقابل :



جسم وزنه ١٨ نيوتن موضوع على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ، اتزن الجسم تحت تأثير قوة أفقيه ق نيوتن.

فإن : ق + ر = ... نيوتن.

(أ) $٦\sqrt{٣}$ (ب) $١٢\sqrt{٣}$ (جـ) $١٨\sqrt{٣}$ (د) $٢٤\sqrt{٣}$

١٦ عدد المستويات التى تمر بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) عدد لا نهائى.

١٧ من الشكل المقابل :



المستوى س ∩ المستوى ص = ...

(أ) {ب} (ب) {أ ، ب ، جـ}

(جـ) المستقيم ل (د) ∅

٢٧ مركز الدائرة : $س^٢ + ص^٢ - ٦ س + ٨ ص = ٠$ هو النقطة ....

(أ) (٣ ، −٤) (ب) (٤ ، −٣) (جـ) (−٣ ، ٤) (د) (−٤ ، ٣)

---

٢٨ طول قطر الدائرة : $٤ س^٢ + ٤ ص^٢ + ١٦ س - ٨ ص - ١٦ = ٠$ يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ١٢ (د) ٢٤

---

٢٩ مخروط دائرى قائم حجمه ٩ π سم^٣ ، وطول نصف قطر قاعدته يساوى ارتفاعه فتكون مساحة قاعدته = ... سم^٢

(أ) ٩ π (ب) ٣ π (جـ) ٢٧ π (د) ١٢ π

---

٣٠ مخروط دائرى قائم إذا زاد طول نصف قطر قاعدته للضعف ، وقل ارتفاعه للنصف فإن حجمه ....

(أ) يظل كما هو. (ب) يزداد للضعف.

(جـ) يقل للنصف. (د) يزداد لأربعة أمثال.

٢ محافظة الجيزة

إدارة الهرم
توجيه الرياضيات

أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ قوتان مقداراهما ٦ نيوتن ، ٨ نيوتن محصلتهما ٢ نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما ....

(أ) °٣٠ (ب) °٩٠ (جـ) °١٨٠ (د) °٢٧٠

---

٢ قوتان مقداراهما ٧ ، ق ث.كجم المحصلة تنصف الزاوية بينهما فإن : ق = ... ث.كجم

(أ) ٨ (ب) ٧ (جـ) ١٠ (د) ٥

---

٣ قوتان مقداراهما ٩ ، ٦ نيوتن فإن القيمة العظمى لمحصلتهما .... نيوتن.

(أ) ٢٠ (ب) ٣٠ (جـ) ١٠ (د) ١٥

---

٤ قوتان قياس الزاوية بينهما θ فإن مقدار محصلتهما ....

(أ) يزداد كلما زادت قيمة θ (ب) يتناقص كلما نقصت قيمة θ

(جـ) يزداد كلما نقصت قيمة θ (د) لا يتغير بتغير قيمة θ



٥ قوتان متعامدتان مقدارهما (٢ ق − ٥) ، (ق + ٢) نيوتن ومقدار محصلتهما ٣ √٥ نيوتن فإن قيمة ق تساوى .... نيوتن

(أ) ٧　(ب) ٤　(جـ) ٦　(د) ٣

---

٦ إذا وضع جسم وزنه (و) على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية θ فإن مركبة الوزن فى اتجاه المستوى تساوى ....

(أ) و طا θ　(ب) و جا θ　(جـ) و جتا θ　(د) و

---

٧ قوة مقدارها ٦ نيوتن تعمل فى اتجاه الشمال تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مركبتها فى اتجاه الشرق تساوى .... نيوتن.

(أ) ١٢　(ب) ٦　(جـ) صفر　(د) ٨

---

٨ ق١ = ٥ س + ٣ ص ، ق٢ = أ س + ٦ ص

، ق٣ = −١٤ س + ب ص وكانت المحصلة ح = (١٠ √٢ ، ٣/٤ π)

فإن : (أ ، ب) = ...

(أ) (−١ ، ١)　(ب) (١ ، ١)　(جـ) (١ ، −١)　(د) (−١ ، −١)

---

٩ ثلاث قوى مستوية متلاقية فى نقطة مقاديرها ٦٠ ، ٨٨ ، ٦٠ نيوتن تؤثر فى نقطة الأولى نحو الشمال والثانية فى اتجاه ٣٠° جنوب الغرب والثالثة فى اتجاه ٣٠° جنوب الشرق فإن مقدار المحصلة يساوى .... نيوتن.

(أ) ٣٠　(ب) ٢٣　(جـ) ٣٢　(د) ٢٨

---

١٠ ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة ومتزنة فإذا كان ٧ ، ٣ نيوتن مقدارى قوتين منهم فإن مقدار القوة الثالثة يمكن أن يساوى ....

(أ) ١١ نيوتن.　(ب) ٢ نيوتن.　(جـ) ٥ نيوتن.　(د) ٣ نيوتن.

---

١١ علق جسم وزنه ٢٠٠ ث.جم بخيطين طولاهما ٦٠ سم ، ٨٠ سم من نقطتين على خط أفقى واحد البعد بينهما ١٠٠ سم فإن مقدار الشد فى الخيطين .... ث.جم

(أ) ١٦٠ ، ١٢٠

(ب) ١٨٠ ، ١٢٠

(جـ) ١٥٠ ، ١٦٠

(د) ١٠٠ ، ١٣٠

---

١٢ أقل عدد من القوى المستوية الغير متساوية فى المقدار يمكن أن يتزن هو ....

(أ) ١　(ب) ٢　(جـ) ٣　(د) ٤

١٣ قضيب منتظم وزنه ٢٤ نيوتن يرتكز بطرفيه على مستويين أملسين مائلين يصنعان مع الأفقى زاويتين قياساهما ٦٠° ، ٣٠° فإن مقدار رد فعل كل من المستويين ....

(أ) ١٢ ، ١٥ نيوتن　　(ب) ١٢ ، ١٢ $\sqrt{٣}$ نيوتن

(جـ) ١٢ $\sqrt{٣}$ ، ١٠ نيوتن　　(د) ١٥ ، ١٣ نيوتن

---

١٤ إذا كانت قوة مقدارها ق تتزن مع قوتين مقداراهما ٥ ، ٣ نيوتن وتحصران بينهما زاوية قياسها ٦٠° فإن : ق = ... نيوتن

(أ) ٧　　(ب) ١٥　　(جـ) ١٩　　(د) ٣٤

---

١٥ إذا كانت مجموعة القوى $\overrightarrow{ق_١}$ = (أ ، ٧) ، $\overrightarrow{ق_٢}$ = (−٥ ، −ب) ، $\overrightarrow{ق_٣}$ = (١ ، ١) متزنة فإن : (أ ، ب) = ...

(أ) (٤ ، ٢)　　(ب) (١ ، ٢)　　(جـ) (٤ ، ٨)　　(د) (−٤ ، −٨)

---

١٦ هرم رباعى قائم قاعدته معين طولا قطريه ١٢ سم ، ٨ سم وارتفاعه ١٠ سم فإن حجمه يساوى .... سم^٣

(أ) ٤٠　　(ب) ٨٠　　(جـ) ١٦٠　　(د) ٢٠٠

---

١٧ طول قطر الدائرة : ٤ $س^٢$ + ٤ $ص^٢$ + ١٦ س − ٨ ص − ١٦ = ٠ يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٣　　(ب) ٦　　(جـ) ١٢　　(د) ٢٤

---

١٨ النسبة بين المساحة الجانبية للهرم الثلاثى المنتظم الوجوه إلى مساحته الكلية = ...

(أ) ١ : ٣　　(ب) ١ : ٤　　(جـ) ٣ : ٤　　(د) ١ : ٢

---

١٩ مخروط دائرى قائم طول قطر قاعدته ٦ سم. وارتفاعه ٤ سم. فإن طول راسمه = ... سم.

(أ) ٢　　(ب) ٣　　(جـ) ٤　　(د) ٥

---

٢٠ المستقيمات الرأسية المختلفة فى الفراغ تكون ....

(أ) متخالفة.　　(ب) متوازية.

(جـ) متقاطعة.　　(د) يجمعها مستوى واحد.

٢١ جميع الحالات الآتية تعين مستوى ما عدا ....

(أ) مستقيم ونقطة ولا تنتمى إليه. (ب) مستقيمين متوازيين غير منطبقين.

(جـ) مستقيمين متقاطعين. (د) مستقيمين متخالفين.

٢٢ إذا كانت الدائرة تمس محورى الإحداثيات فى الربع الأول فإن مركزها يقع على المستقيم ....

(أ) ص = س (ب) ص = ٢ س (جـ) ص = $\frac{١}{٢}$ س (د) ص = − س

٢٣ هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته = طول ارتفاعه الجانبى فإن النسبة بين مساحته الجانبية ومساحته الكلية = ...

(أ) ٢ : ٣ (ب) ٣ : ٤ (جـ) ١ : ٢ (د) ٣ : ٥

٢٤ المستقيمان المتخالفان ....

(أ) متوازيان. (ب) متقاطعان.

(جـ) يجمعهما مستوى واحد. (د) لا يجمعهما مستوى واحد.

٢٥ طول قوس القطاع الدائرى الذى إذا طويناه أصبح مخروط دائرى قائم حجمه ٤٩ π سم^{٣} وارتفاعه ٣ سم يساوى .... سم

(أ) ٢ π (ب) ٤ π (جـ) ٨ π (د) ١٤ π

٢٦ أى المعادلات الآتية يعبر عن دائرة ....

(أ) س^{٢} − ص^{٢} + س − ص = ٦ (ب) ٢ س^{٢} + ص^{٢} − س + ص = ٥

(جـ) س^{٢} + ص^{٢} − س = ٦ (د) س^{٢} + ص^{٢} − س ص = ٦

٢٧ مخروط دائرى قائم طول راسمه ٢٥ سم ومساحته الجانبية ٥٥٠ سم^{٢} فإن حجمه = ... سم^{٣} حيث $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$

(أ) ١٢٢٣ (ب) ١٢٣٢ (جـ) ١٣٢٢ (د) ٢١٢٢

٢٨ عدد المستويات التى تمر بثلاث نقاط على استقامة واحدة ....

(أ) مستوى واحد فقط. (ب) عدد لا نهائى.

(جـ) ثلاثة مستويات. (د) أربعة مستويات.

٢٩ هرم رباعى منتظم مساحته الكلية ٧٠ سم^2 ، ومساحته الجانبية ٤٥ سم^2
فإن ارتفاع الهرم = ... سم

(أ) ٢,٥ (ب) $\sqrt{5}$ (جـ) $\sqrt{14}$ (د) ٤,٥

٣٠ المعادلة $\begin{vmatrix} س & ت ص \\ ت ص & س \end{vmatrix}$ − ٤٩ = ٠ تمثل معادلة دائرة
طول نصف قطرها .... وحدة طول.

(أ) ٤٩ (ب) ١٤ (جـ) ٩ (د) ٧



أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

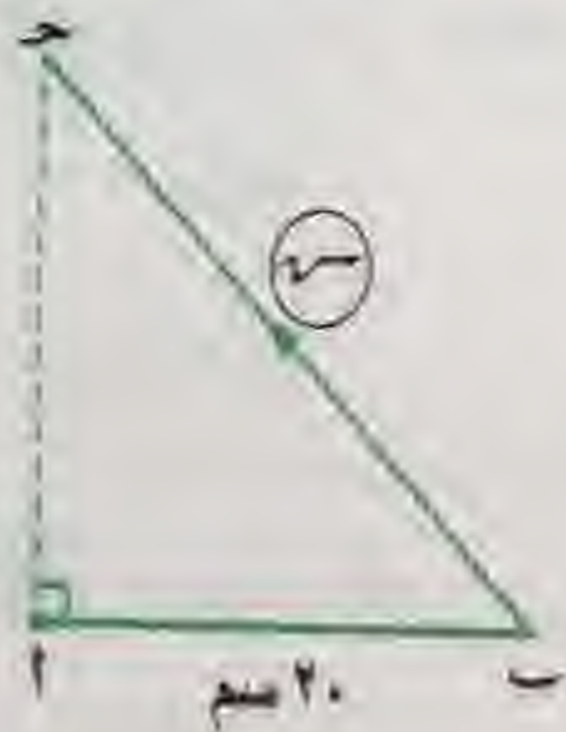
١ قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ٥ ، ٣ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٦٠°
فإن مقدار محصلتهما ح = ... نيوتن.

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٨

٢ مخروط دائرى قائم ارتفاعه ١٢ سم، وطول راسمه ١٥ سم. فيكون حجمه .... سم^3

(أ) ٣٢٤ π (ب) ٧١٥ π (جـ) ٣٢ π (د) ١٨٠ π

٣ فى الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٢٠ سم ووزنه ٣٠ نيوتن ، متصل بمفصل مثبت فى حائط رأسى عند أ ، والطرف ب مربوط بخيط خفيف طوله ٢٠ $\sqrt{2}$ سم ، ومثبت طرفه الآخر عند حـ على الحائط أعلى أ ، اتزن القضيب فى وضع أفقى ،
فإن قيمة رد فعل المفصل = ... نيوتن.

(أ) ١٠ $\sqrt{2}$ (ب) ١٠ (جـ) ١٥ (د) ١٥ $\sqrt{2}$

٤ عدد المستويات التى تمر بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) عدد لا نهائى.

٥ قوتان مقداراهما ق١ ، ق٢ ث.جم حيث ق١ > ق٢ ومقدار محصلتهما ح مقاسة بالثقل كيلوجرام ∈ [٢ ، ١٢] فإن : ق١^{٢} − ق٢^{٢} = ... ث.جم.

(أ) ١٢ (ب) ٣ (جـ) ٩ (د) ٣٦

---

٦ إذا كان $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مماس للدائرة س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢} حيث أ = (٠ ، ٢ نق)
فإن طول $\overline{\text{أب}}$ = ... وحدة طول.

(أ) نق (ب) ٢ نق (جـ) $\sqrt{٣}$ نق (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ نق

---

٧ إذا كانت س^{٢} + ص^{٢} + ٢ (جتا θ) س − ٢ (جا θ) ص − ٨ = ٠ تمثل معادلة دائرة
فإن : نق = ... وحدة طول.

(أ) $\sqrt{٢}$ (ب) ٢ $\sqrt{٢}$ (جـ) ٣ (د) ٨

---

٨ قوتان مقداراهما ق ، ٢ ق نيوتن تؤثران في نقطة مادية وكانت المحصلة عمودية على إحداهما فإن قياس الزاوية بين القوتين = ...°

(أ) ٦٠ (ب) ٩٠ (جـ) ١٢٠ (د) ١٣٥

---

٩ إذا كان : $\overline{\text{ق}}_{١}$ = ٢ $\overline{\text{س}}$ − ٢ $\overline{\text{ص}}$ ، $\overline{\text{ق}}_{٢}$ = أ $\overline{\text{س}}$ − $\overline{\text{ص}}$ ، $\overline{\text{ق}}_{٣}$ = ٤ $\overline{\text{س}}$ − ب $\overline{\text{ص}}$
، والمحصلة $\overline{\text{ح}}$ = ٦ $\overline{\text{س}}$ − ٤ $\overline{\text{ص}}$ فإن : (أ ، ب) = ...

(أ) (١ ، −١) (ب) (−١ ، ١) (جـ) (−١ ، −١) (د) (١ ، ١)

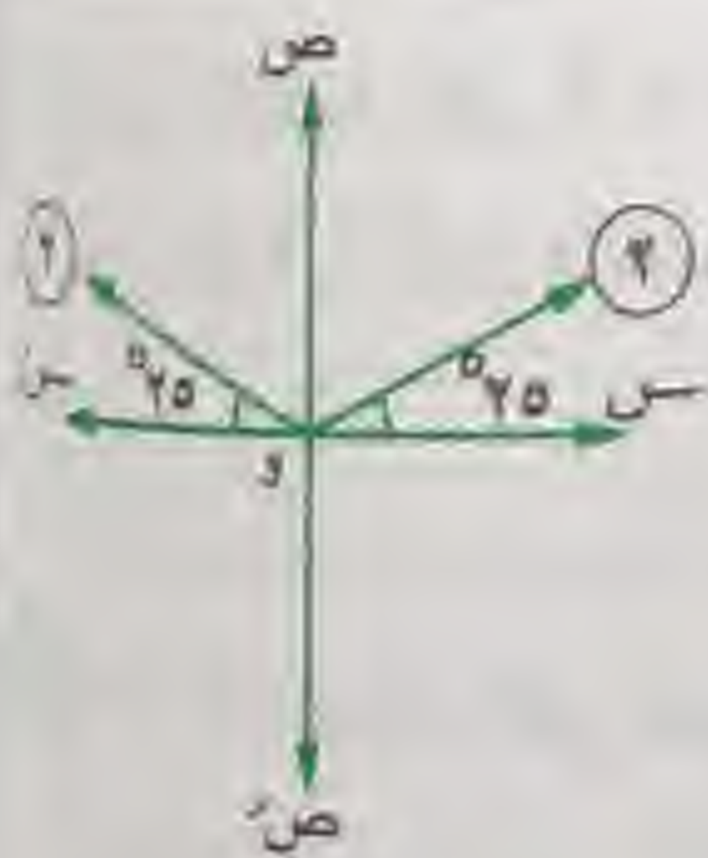
---

١٠ هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ١٠ سم ، وارتفاعه الجانبي ١٣ سم تكون مساحته الجانبية .... سم^{٢}

(أ) ٢٦٠ (ب) ٣٦٠ (جـ) ١٣٠ (د) ٥٢٠

---

١١ محصلة القوى في الشكل المقابل تؤثر في اتجاه ....



(أ) $\overrightarrow{\text{وس}}$
(ب) $\overleftarrow{\text{وس}}$
(جـ) $\overrightarrow{\text{وص}}$
(د) $\overleftarrow{\text{وص}}$

١٢ إذا كانت القوة التى مقدارها ق تتزن مع قوتين مقداراهما ٦ ، ٨ نيوتن وتحصران بينهما زاوية قياسها ٩٠° فإن : ق = ... نيوتن

(أ) ١٠ (ب) ٨ (جـ) ١٤ (د) ٢

---

١٣ إذا كان المستقيم ل ⊂ المستوى س ، أ ∈ س فإن : ل ∩ س = ...

(أ) ∅ (ب) ل (جـ) س (د) {أ}

---

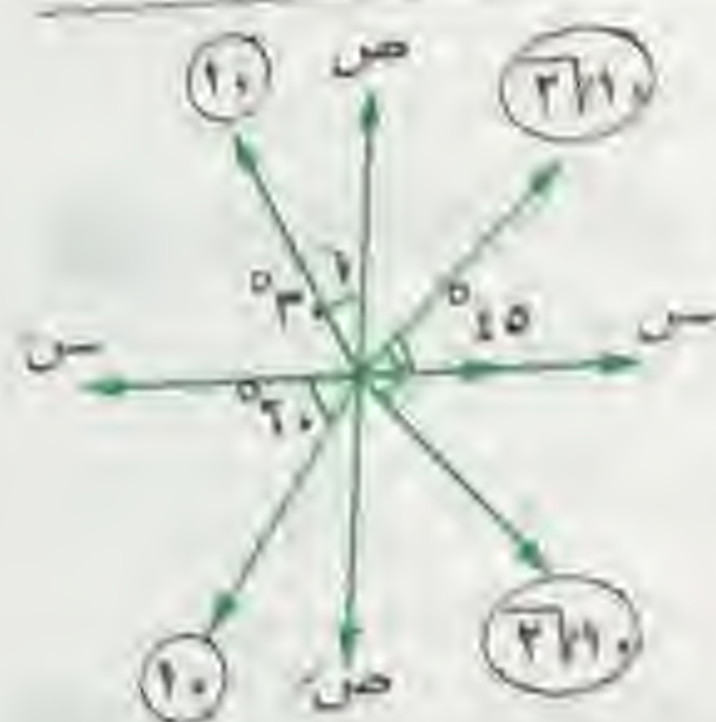
١٤ أ ب جـ ء أَ بَ جـَ ءَ مكعب طول حرفه = ٦ سم

فإن حجم الهرم بَ أ ب جـ = ... سم^{٣}

(أ) ٣٦ (ب) ٧٢ (جـ) ٣٦ $\sqrt{٣}$ (د) ١٨ $\sqrt{٣}$

---

١٥ فى الشكل المقابل :



إذا كانت القوى المبينة مقدرة بالنيوتن

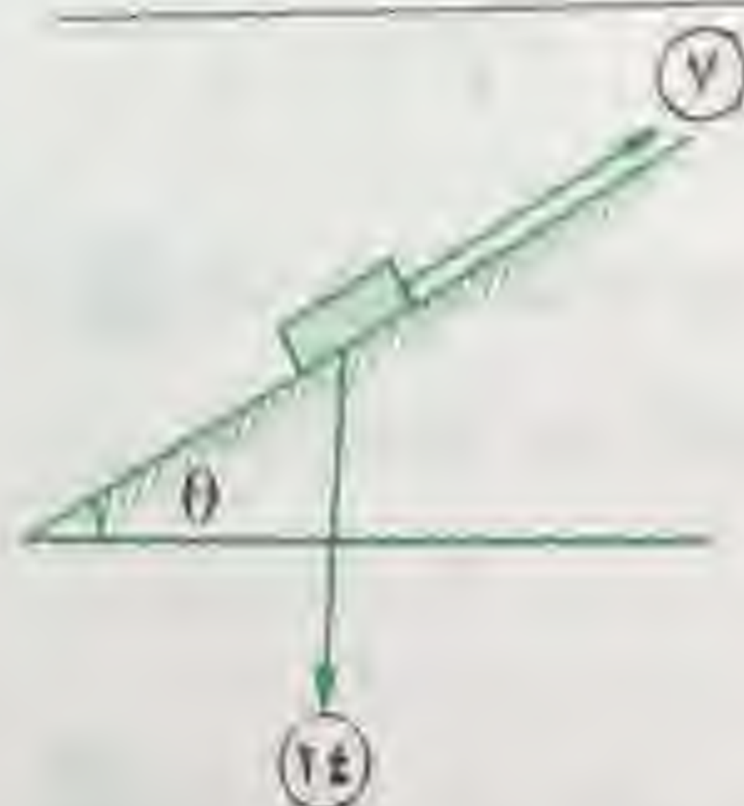
فإن محصلة هذه القوى ح = ... نيوتن.

(أ) ٢٠ (ب) ١٠ $\sqrt{٢}$

(جـ) ١٠ (د) صفر

---

١٦ فى الشكل المقابل :



الجسم متزن على مستوى مائل أملس

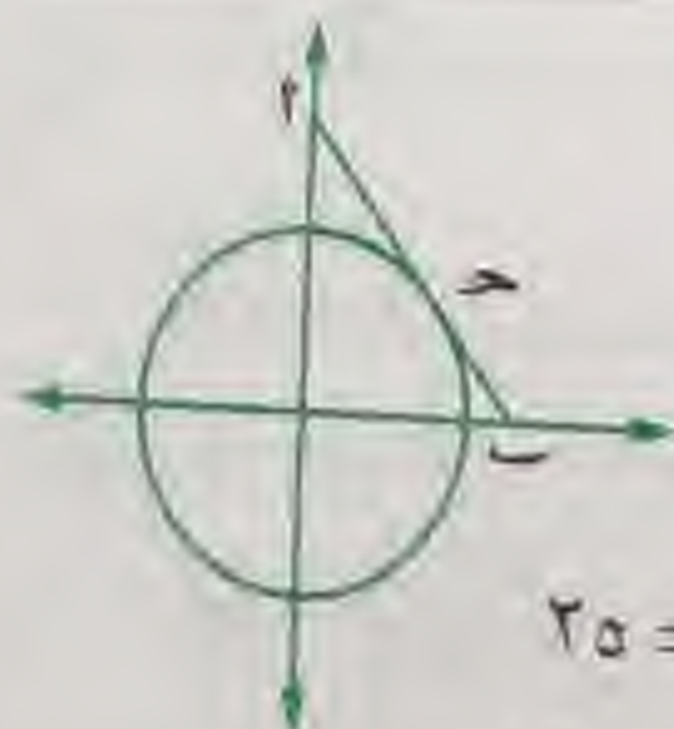
فإن : ق (∠ θ) = ...°

(أ) ٦٠ (ب) ٤٥

(جـ) ٣٠ (د) ٧٥

---

١٧ فى الشكل المقابل :



أ ب مماس للدائرة عند جـ ، أ جـ = ١٢,٥ وحدة طول

، ب جـ = ٨ وحدة طول ، فإن معادلة الدائرة هى ....

(أ) س^{٢} + ص^{٢} = ١٠ (ب) س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥

(جـ) س^{٢} + ص^{٢} = ١٠٠ (د) س^{٢} + ص^{٢} = ١٢٥

١٨ إذا كانت $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ ، $\overrightarrow{ق_٣}$ ثلاث قوى متلاقية في نقطة ومتزنة

فإن : مقدار محصلة $ق_١$ ، $ق_٢$ = ...

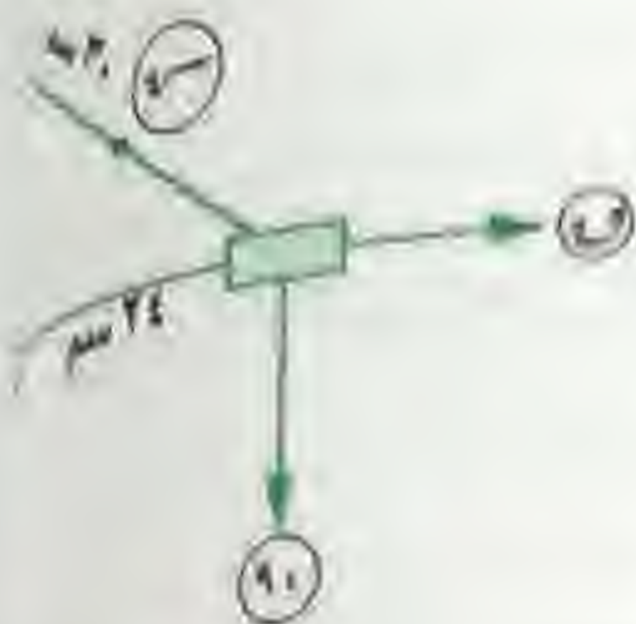
(أ) $ق_٣$ (ب) $ق_١ + ق_٢$ (ج) $ق_٣^٢$ (د) صفر

---

١٩ في الشكل المقابل :

جسم وزنه ٩٠ ث.جم معلق في نهاية خيط طوله ٣٠ سم جذب الجسم بتأثير قوة أفقية حتى اتزن وهو على بعد ٢٤ سم من الحائط

فإن : ش − ق = ... ث.جم



(أ) ١٥٠ (ب) ١٢٠

(ج) ٥٠ (د) ٣٠

---

٢٠ معادلة الدائرة التي مركزها (−٤ ، ٣) وتمر بنقطة الأصل هي ....

(أ) $(س + ٤)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ٥$ (ب) $(س - ٤)^٢ + (ص + ٣)^٢ = ٢٥$

(ج) $(س + ٤)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ٦٢٥$ (د) $(س + ٤)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ٢٥$

---

٢١ هرم ثلاثي منتظم الوجوه طول حرفه ٦ سم فإن حجمه = ... $سم^٣$

(أ) $٢٧\sqrt{٣}$ (ب) $٣٦\sqrt{٣}$ (ج) $٥٤\sqrt{٢}$ (د) $١٨\sqrt{٢}$

---

٢٢ إذا كانت النسبة بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى لمحصلة قوتين كنسبة ٤ : ٣

فإن النسبة بين القوتين ....

(أ) ٤ : ٧ (ب) ٥ : ٤ (ج) ١ : ٧ (د) ٧ : ٢

---

٢٣ إذا كان : $ل_١$ ، $ل_٢$ مستقيمان متخالفان فإن : $ل_١ \cap ل_٢$ = ...

(أ) $\varnothing$

(ب) $ل_١$

(ج) $ل_٢$

(د) المستوى الذي يجمع $ل_١$ ، $ل_٢$

---

٢٤ إذا كان $\overrightarrow{ق_١} = ٥\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ق_٢} = ٧\overrightarrow{س} - ٥\overrightarrow{ص}$

فإن : $\|\overrightarrow{ح}\|$ = ... وحدة قوة.

(أ) ١٢ (ب) ٥ (ج) ١٣ (د) $\sqrt{٧٣}$

٢٥ قوتان مقدارهما $ق_1$ ، $ق_2$ ث كجم ومقدار محصلتهما ٢٤ نيوتن وتميل على القوة الأولى بزاوية قياسها ٣٠° فإن $ق_2$ = ... ث كجم

(أ) ٨ (ب) ٨ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٨ $\sqrt{٢}$ (د) ١٢

٢٦ حللت القوة التي مقدارها ١٢ نيوتن إلى مركبتين $\overline{ق_1}$ ، $\overline{ق_2}$ تصنعان معها زاويتين قياساهما ٣٠° ، ٩٠° على الترتيب كما بالشكل المقابل فإن $ق_1$ = ... نيوتن



(أ) ١٠ (ب) ١٠ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٦ $\sqrt{٣}$ (د) ٤ $\sqrt{٣}$

٢٧ المعادلة (س ص ٨) $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ٢٠ \end{pmatrix}$ + ▭ = ▭ تمثل دائرة طول قطرها = ... وحدة طول

حيث ▭ المصفوفة الصفرية.

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

٢٨ في الشكل المقابل :



المستوى أ ب ء ∩ المستوى م حـ ء = ...

(أ) $\overleftrightarrow{م ء}$

(ب) $\overleftrightarrow{حـ ء}$

(جـ) {ء}

(د) $\overleftrightarrow{م حـ}$

٢٩ النقطة التي تقع على الدائرة $(س - ٢)^2 + ص^2 = ١٣$ هي ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٣ ، -٢) (جـ) (٢ ، ٥) (د) (٤ ، ٣)

٣٠ أي المجسمات الآتية يعبر عن الشبكة المقابلة ؟



(أ) هرم رباعي.

(ب) هرم رباعي منتظم.

(جـ) هرم ثلاثي منتظم الوجوه.

(د) غير ذلك.

(أ) صفر



$(ص + ٣)^2 = ٢٥$

$(ص - ٣)^2 = ٢٥$

سم²

(د) ١٨ $\sqrt{٢}$

كنسبة ٤ : ٣

(د) ٧ : ٣

$\sqrt{٧٢}$



٤ محافظة القليوبية

أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ ثلاث قوى مستوية متزنة ومتلاقية فى نقطة واحدة وكان مقدارى قوتين منهما هو ٧ ، ٣ نيوتن فإن مقدار القوة الثالثة يمكن أن يكون .... نيوتن.

(أ) ٢ (ب) ١١ (جـ) ٥ (د) ٣

٢ هرم رباعى منتظم مساحة قاعدته = ١٠٠ سم^{٢}. وارتفاعه ١٢ سم فإن مساحته الجانبية تساوى .... سم^{٢}.

(أ) ٢٦٠ (ب) ٥٢٠ (جـ) ١٣٠ (د) ٣٦٠

٣ إذا كانت : $\overline{ق}_١ = ٢ \overline{س}$ ، $\overline{ق}_٢ = ٤ \overline{س} + ٨ \overline{ص}$

فإن : $\| \overline{ح} \| =$ .... وحدة قوة.

(أ) ١٤ (ب) $\sqrt{٨٤}$ (جـ) ١٠٠ (د) ١٠

٤ هرم سداسى منتظم طول ضلع قاعدته = ٨ سم ، ارتفاعه = ١٠ سم فإن حجمه يساوى .... سم^{٣}.

(أ) $٣٢٠\sqrt{٣}$ (ب) $٩٦٠\sqrt{٣}$ (جـ) $\frac{٣٢٠\sqrt{٣}}{٣}$ (د) ٥٥٤٫٢٥

٥ قوتان متساويتان فى المقدار ومقدار محصلتهما ١٦ نيوتن عندما كان قياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{٢}$ فإن القيمة العظمى لمحصلتيهما تساوى .... نيوتن.

(أ) ٣٢ (ب) $٨\sqrt{٢}$ (جـ) $١٦\sqrt{٢}$ (د) صفر

٦ النسبة بين المساحة الجانبية للهرم الثلاثى المنتظم الوجوه ومساحته الكلية هى ....

(أ) ٤ : ١ (ب) ١ : ٤ (جـ) ٤ : ٣ (د) ٣ : ٤

٧ إذا كانت ى الزاوية بين قوتين مقداراهما ٢ نيوتن ، ٦ نيوتن ، ى ∈]٠ ، π[فإن مقدار محصلة القوتين مقاسة بالنيوتن ∈ ....

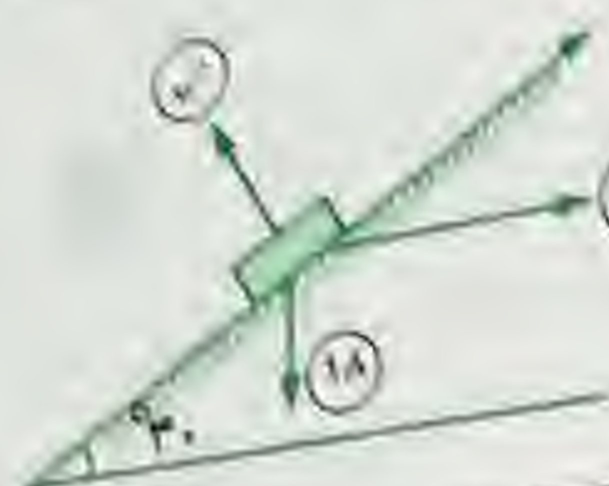
(أ)]٤ ، ٨[(ب) [٤ ، ٨] (جـ)]٤ ، ٨] (د) [٤ ، ٨[

٨ إذا كانت الدائرة التى معادلتها : $س^٢ + ص^٢ - ٦ س + ٨ ص + حـ = ٠$ ، تمس محور السينات فإن : حـ = ...

(أ) -٩ (ب) ٩ (جـ) ٦ (د) -٦

٩ فى الشكل المقابل :

ق + ر = ...



(أ) $١٢\sqrt{٣}$ (ب) $٦\sqrt{٣}$ (جـ) $١٨\sqrt{٣}$ (د) $٢٤\sqrt{٣}$

١٠ طول القطعة المماسة للدائرة : $س^٢ + ص^٢ = ٩$ من النقطة (٥ ، ٠) يساوى .... وحدة طول.

(أ) ١٤ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٤

١١ أقل عدد من القوى المستوية الغير متساوية مقدارًا ويمكن أن تكون متزنة هو ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ١

١٢ جميع الحالات الآتية تعين مستوى ماعدا ....

(أ) مستقيمين متقاطعين. (ب) مستقيمين متوازيين مختلفين.

(جـ) مستقيم ونقطة تنتمى إليه. (د) ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة.

١٣ فى الشكل المقابل :

تكون محصلة القوى تعمل فى اتجاه ....



(أ) الجنوب. (ب) الشرق.

(جـ) الغرب. (د) الشمال.

١٤ أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم أثرت قوة مقدارها ١٠ نيوتن فى $\overleftarrow{أء}$ فإن مركبتى القوة فى اتجاه $\overleftarrow{أحـ}$ ، $\overleftarrow{أو}$ على الترتيب هما .... نيوتن.

(أ) $٥\sqrt{٣}$ ، ٥ (ب) ٥ ، $٥\sqrt{٣}$ (جـ) $١٠\sqrt{٣}$ ، ٥ (د) $١٠\sqrt{٣}$ ، ١٠

١٥ [illegible] حجمه ٩٦ π سم³
فإن مساحته الجانبية = ... سم²



(أ) ٦٠ π (ب) ١٠٨ π
(ج) ٣٦ π (د) ٩٦ π

---

١٦ إذا كانت ح هي محصلة القوتين ق١ ، ق٢ وكانت ى قياس الزاوية بينهما وكان ق١ : ق٢ : ح = ٤ : ٣ : √١٣ فإن ى =

(أ) ٩٠° (ب) ١٢٠° (ج) ٦٠° (د) ٣٠°

---

١٧ مركز الدائرة التي معادلتها ٢ س² + ٢ ص² + ١٢ س − ١٦ ص = ٠ هو ....

(أ) (٣ ، −٤) (ب) (−٦ ، ٨) (ج) (−٣ ، ٤) (د) (٦ ، −٨)

---

١٨ في الشكل المقابل :

كرة منتظمة مركزها م ، وطول قطرها ٦ سم

ووزنها ١٠ نيوتن ، ب جـ = ٣ سم

فإنه في وضع الاتزان يكون ر + ش = ... نيوتن



(أ) ٢٤٠ (ب) ١٢٠
(ج) ٦٠ (د) ٨٠

---

١٩ مخروط قائم طول راسمه يساوي طول قطر قاعدته
فإن مساحته الكلية تساوي .... سم²

(أ) ٣ π نق² (ب) ٢ π نق² (جـ) ٤ π نق² (د) ٤ π نق²

---

٢٠ في الشكل المقابل :

ق١ : ق٢ : ق٣ = ...



(أ) ٥ : ٣ : ٤ (ب) ٣ : ٥ : ٤
(جـ) ٤ : ٣ : ٥ (د) ٥ : ٤ : ٣

٢١ هرم رباعي منتظم محيط قاعدته ٦٤ سم، وارتفاعه ٣ سم، فإن حجمه يساوي .... سم^3.

(أ) ٢٦٥ (ب) ٥٦٢ (جـ) ٢٥٦ (د) ٦٥٢

٢٢ قياس الزاوية بين $\overrightarrow{ق_1}$ ومحصلة القوتين $(\overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2})$ ، $(\overrightarrow{ق_1} - \overrightarrow{ق_2})$ هي

(أ) صفر° (ب) π (جـ) $\frac{\pi}{2}$ (د) $\frac{\pi}{3}$

٢٣ مخروط دائري قائم ارتفاعه ٤ سم، وطول راسمه ٥ سم، يكون حجمه .... سم^3.

(أ) 36π (ب) 15π (جـ) 24π (د) 12π

٢٤ إذا وضع جسم وزنه و نيوتن على مستوى أملس يميل على الرأسي بزاوية قياسها هـ فإن مركبة وزن الجسم في اتجاه المستوى هي ....

(أ) و جا هـ (ب) و جتا هـ (جـ) و (د) و ظا هـ

٢٥ إذا كان : $\overleftrightarrow{أب} \subset$ المستوى س ، $\overleftrightarrow{جـ ء}$ // المستوى س

فإن : $\overleftrightarrow{جـ ء}$ ، $\overleftrightarrow{أب}$ ....

(أ) متوازيان فقط. (ب) متخالفان فقط.

(جـ) متوازيان أو متخالفان. (د) متقاطعان.

٢٦ إذا كانت القوى $\overrightarrow{ق_1} = ٤\overrightarrow{س} + ٥\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = أ\overrightarrow{س} - ٧\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_3} = ٣\overrightarrow{س} + ب\overrightarrow{ص}$ متزنة فإن : أ + ٢ ب = ...

(أ) ٧ (ب) −٥ (جـ) ٥ (د) −٣

٢٧ إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ محور تماثل للدائرة التي معادلتها $س^2 + ص^2 = نق^2$ وكان أ ، ب $\in$ للدائرة حيث أ = (−٢ ، ٥) فإن : ب = ...

(أ) (٢ ، −٥) (ب) (٢ ، ٥) (جـ) (٠ ، ٠) (د) (٥ ، −٢)

٢٨ إذا كانت $ص^2 + (س - ٥)^2 = ٢٠$ هي معادلة دائرة فإن النقطة .... تقع على الدائرة.

(أ) (٤ ، ٣) (ب) (٣ ، ٤) (جـ) (٥ ، ٠) (د) (٠ ، ٥)





٢٩ فى الشكل المقابل :

اتجاه رد فعل المفصل على القضيب عند أ ....



(أ) فى اتجاه $\overrightarrow{أب}$

(ب) فى اتجاه $\overrightarrow{أحـ}$

(جـ) ينصف $\overline{بحـ}$

(د) عمودى على $\overline{بحـ}$

---

٣٠ إذا قطع محور السينات الدائرة التى معادلتها $س^٢ + ص^٢ = ٤٩$ فى النقطتين أ ، ب فإن طول $\overline{أب}$ = ... وحدة طول.

(أ) ٤٩ (ب) ٧ (جـ) ٢ (د) ١٤

٥ محافظة الشرقية

إدارة شرق الزقازيق
توجيه الرياضيات

أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا بلغت محصلة قوتين تؤثران فى نقطة قيمتها العظمى فإن قياس الزاوية بين خطى عملهما يساوى ....

(أ) ١٨٠° (ب) ١٢٠° (جـ) صفر° (د) ٦٠°

---

٢ حجم مخروط قائم طول راسمه = ١٥ سم ومساحته الكلية = ٢١٦ π سم^٢ يساوى .... سم^٣

(أ) ٢٠٥ π (ب) ٢٢٠ π (جـ) ٢٨٠ π (د) ٣٢٤ π

---

٣ إذا كان : $\overrightarrow{ق_١} = ٥\overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢} = أ\overrightarrow{س} + ٦\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٣} = -١٤\overrightarrow{س} + ب\overrightarrow{ص}$ ثلاث قوى مقدرة بالنيوتن ومتزنة ومتلاقية فى نقطة فإن : أ + ب = ...

(أ) صفر (ب) ١٨ (جـ) -١٨ (د) ٩

---

٤ إذا كان المستقيم ل // المستوى س ، أ ∈ س فإن : ل ∩ س = ...

(أ) ل (ب) {أ} (جـ) ∅ (د) س





٥ عدد المستويات التى تمر بثلاث نقط على استقامة واحدة = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائى.

٦ طول قطر الدائرة : ٤ $س^٢$ + ٤ $ص^٢$ + ١٦ س − ٨ ص − ١٦ = ٠

يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ١٢ (د) ٢٤

٧ الدائرة التى معادلتها : $(س - أ)^٢ + (ص - ب)^٢ = أ^٢$ ، حيث (أ ≠ ب) ....

(أ) تمس محور السينات. (ب) تمس محور الصادات.

(جـ) تمس المحورين. (د) لا تمس أى من المحورين.

٨ قوة مقدارها ٤ $\sqrt{٢}$ نيوتن تعمل فى اتجاه الشرق تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مقدار مركبتها فى اتجاه الشمال الشرقى يساوى .... نيوتن.

(أ) صفر (ب) ٤ $\sqrt{٢}$ (جـ) ٤ (د) ٦

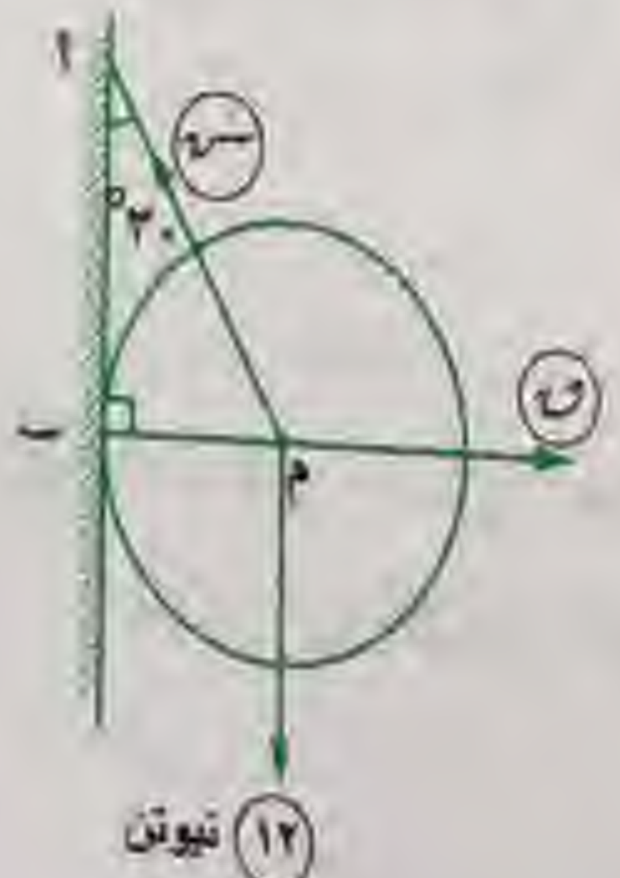
٩ قوتان مقداراهما ٨ ، ق ث جم وقياس الزاوية بينهما ∈]٠ ، π[، محصلتهما تنصف الزاوية بينهما فإن : ق = ... ث جم.

(أ) ٤ (ب) ١٦ (جـ) ٢ $\sqrt{٣}$ (د) ٨

١٠ أثرت القوى المستوية التى مقاديرها ٥ ، ٤ ، ق ، ٣ ، ك ، ٧ ث.كجم فى نقطة مادية وقياس الزاوية بين كل قوتين متتاليتين منها ٦٠° فإن : (ق ، ك) = ... علمًا بأن المجموعة متزنة.

(أ) (٣ ، ٩) (ب) (٩ ، ٦) (جـ) (٤ ، ٣) (د) (٥ ، ٤)

١١ فى الشكل المقابل :



إذا كانت الكرة فى وضع توازن

فإن : (ش ، ر) = ...

(أ) (٤ $\sqrt{٣}$ نيوتن ، ٨ $\sqrt{٣}$ نيوتن)

(ب) (٨ $\sqrt{٣}$ نيوتن ، ٤ $\sqrt{٣}$ نيوتن)

(جـ) (١٢ نيوتن ، ٨ نيوتن)

(د) (٤ نيوتن ، ٨ نيوتن)

١٢ وضع جسم وزنه ٦ ث.كجم على مستوى مائل أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ... وحفظ في حالة توازن بواسطة قوة أفقية فإن مقدار هذه القوة الأفقية = ...

(أ) $\sqrt{3}$ (ب) $2\sqrt{3}$ (جـ) $4\sqrt{3}$ (د) ٦

١٣ النقطة التي تقع على الدائرة : $(س - ٢)^2 + ص^2 = ١٣$ هي ....

(أ) (٣ ، ٢) (ب) (٣ ، -٢) (جـ) (٢ ، ٥) (د) (٤ ، ٢)

١٤ هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ١٠ سم وارتفاعه الجانبي ١٢ سم فإن مساحته الجانبية = ...

(أ) ٣٦٠ $سم^2$ (ب) ٢٦٠ $سم^2$ (جـ) ١٣٠ $سم^2$ (د) ٢٤٠ $سم^2$

١٥ طول نصف قطر قاعدة مخروط دائري قائم ارتفاعه ١٥ سم ، وطول راسمه ١٧ سم يساوي .... سم

(أ) ١٠ (ب) ٨ (جـ) ٧ (د) ٩

١٦ المستقيمان المتخالفان هما المستقيمان اللذان ....

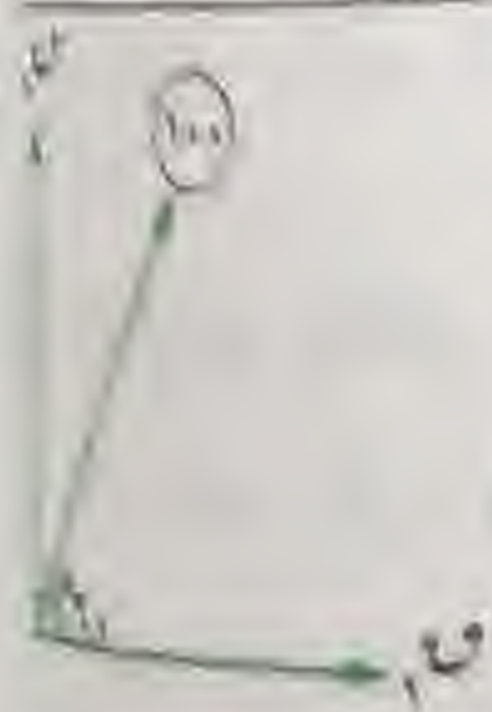
(أ) لا يتقاطعان. (ب) لا يتعامدان.

(جـ) لا يتوازيان. (د) لا يتقاطعان ولا يتوازيان.

١٧ قوتان متعامدتان مقداراهما ١٢ نيوتن ، ٥ نيوتن تؤثران في نقطة فإن مقدار محصلتهما = ... نيوتن

(أ) ١٧ (ب) ٧ (جـ) ١٣ (د) ١٤

١٨ في الشكل المقابل :



القوة مقدرة بالنيوتن فإن : $(ق_1 ، ق_2) =$ ....

(أ) $(٥٠ ، ٥٠\sqrt{3})$ (ب) $(٥٠\sqrt{3} ، ١٠)$

(جـ) (٥٠ ، ٥٠) (د) (١٠ ، ١٠)

١٩ ثلاث قوى مستوية مقاديرها ٥ ، ١٠ ، $4\sqrt{7}$ نيوتن تؤثر في نقطة مادية فإذا كان قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية يساوي ٦٠° فإن القيمة العظمى لمحصلة القوى الثلاثة هي ....

(أ) $5\sqrt{7}$ (ب) $14\sqrt{7}$ (جـ) $9\sqrt{7}$ (د) $15\sqrt{7}$

٢٠ مركز الدائرة : سـ^{٢} + ص^{٢} − ٦ سـ + ٨ ص = ٠ هو النقطة ....

(أ) (٣ ، −٤) (ب) (٤ ، −٣) (جـ) (−٣ ، ٤) (د) (−٤ ، ٣)

٢١ في الشكل المقابل :



جسم وزنه ١٨ نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° يتزن بتأثير قوة ق نيوتن في اتجاه المستوى لأعلى فإن : ق + ر = ... نيوتن.

(أ) ٦ $\sqrt{٣}$ (ب) ٩ $\sqrt{٣}$

(جـ) ١٨ $\sqrt{٣}$ (د) ٩ + ٩ $\sqrt{٣}$

٢٢ مصباح وزنه ٢٨٠ ث.جم معلق في نهاية خيط اتزن بتأثير قوة عمودية على الخيط عندما يميل الخيط على الرأسي بزاوية قياسها ٦٠° فإن : $\frac{ق}{ش}$ = ...

(أ) ٢ (ب) $\sqrt{٣}$ (جـ) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (د) $\frac{١}{٢}$

٢٣ أقل بعد بين محور الصادات ونقطة على الدائرة التي معادلتها :

(سـ − ٧)^{٢} + (ص − ٥)^{٢} = ١٦ هو.............. وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٧

٢٤ مركز الدائرة التي $\overline{أب}$ قطر فيها حيث أ = (−١ ، ٣) ، ب = (٥ ، −٣) هو ....

(أ) (٤ ، ٠) (ب) (٢ ، ٠) (جـ) (−٦ ، −٦) (د) (٠ ، ٤)

٢٥ مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ١٥ سم ، وارتفاعه ٢٠ سم فإن مساحته الجانبية = ... سم^{٢}.

(أ) ٣٧٥ π (ب) ٦٠٠ π (جـ) ١٥٠٠ π (د) ١٨٧٥ π

٢٦ هرم رباعي منتظم مساحته الجانبية = ٣٠ سم^{٢} ، ارتفاعه الجانبي = ٥ سم. فإن محيط قاعدته = ... سم.

(أ) ٦ (ب) ١٢ (جـ) ٢٤ (د) ٣٦

٢٧ عدد المستويات التى تمر بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) عدد لا نهائي

٢٨ إذا وضع جسم وزنه (و) على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها θ

فإن مركبة وزنه فى اتجاه المستوى = ...

(أ) و (ب) و ظا θ (جـ) و جتا θ (د) و جا θ

٢٩ إذا كانت النسبة بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى لمحصلة قوتين كنسبة ٧ : ١

فإن النسبة بين القوتين = ...

(أ) ٧ : ٤ (ب) ٧ : ٣ (جـ) ٥ : ٢ (د) ٥ : ٢

٣٠ علق ثقل مقداره ٢٠٠ ث.جم بخيطين طولهما ٦٠ سم، ٨٠ سم. من نقطتين على خط أفقى واحد البعد بينهما ١٠٠ سم. وكان الشد فى الخيط الأول $ش_١$ والشد فى الخيط الثانى $ش_٢$ فإن : $ش_١ + ش_٢$ = ... ث.جم.

(أ) ١٦٠ (ب) ١٢٠ (جـ) ٢٤٠ (د) ٢٨٠

٦ محافظة المنوفية



إدارة شبين الكوم
توجيه الرياضيات

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة والكتاب المدرسي)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ الكتلة تقاس بوحدة ....

(أ) داين. (ب) نيوتن. (جـ) كيلوجرام. (د) ث.جرام

٢ إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، ٤) فإن : $\|\overrightarrow{أ}\|$ = ...

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ١٢

٣ عدد المستويات التى تمر بثلاثة نقط ليست على استقامة واحدة تساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

٤ في الشكل المقابل :



إذا كان : أب = ٣ سم ، ب‌ء = ء‌حـ = ١ سم

، ق(∠أبحـ) = ٩٠° فإن حجم الجسم الناشئ

من دوران المنطقة المظللة دورة كاملة حول المحور $\overleftrightarrow{أب}$

كما بالشكل المقابل = ...

(أ) π (ب) ٢ π (جـ) ٣ π (د) ٤ π

---

٥ في الشكل المقابل :



ثلاث قوى مقاديرها ١ ، ٢ ، ٤ $\sqrt{٣}$ ، ٣ $\sqrt{٣}$ نيوتن

وتؤثر في النقطة و في اتجاهات $\overrightarrow{وس}$ ، $\overrightarrow{وأ}$ ، $\overrightarrow{وب}$ ، $\overrightarrow{وص}$

، ق (∠أوحـ) = ٦٠° ، ق (∠ب و ء) = ٣٠°

فإن مقدار واتجاه محصلة القوى يساوى ....

(أ) (٤ ، ١٨٠°) (ب) (٤ ، ٠°) (جـ) (٣ ، ٠°) (د) (٥ ، ٩٠°)

---

٦ في الشكل المقابل :



إذا كان : أء = ٣ سم ، أب = ٥ سم

فإن المساحة الكلية للمخروط = ... سم^{٢}.

(أ) ٨ π (ب) ٢٤ π (جـ) ٤٨ π (د) ٣٦ π

---

٧ الصورة العامة لمعادلة الدائرة التى مركزها (٢ ، -١) وطول نصف قطرها ٣ سم.

هى : س^{٢} + ص^{٢} .... = ٠

(أ) -٤ س + ٢ ص - ٩ (ب) -٤ س + ٢ ص - ٤

(جـ) + ٢ س - ص + ٣ (د) + ٢ س - ص + ٩

---

٨ إذا كانت $\overrightarrow{ق_{١}}$ ، $\overrightarrow{ق_{٢}}$ ، $\overrightarrow{ق_{٣}}$ ثلاث قوى متزنة ومتلاقية في نقطة بحيث :

$\overrightarrow{ق_{١}}$ = (٢ ، -٥) ، $\overrightarrow{ق_{٢}}$ = (-٣ ، ٢) فإن : $\overrightarrow{ق_{٣}}$ = ...

(أ) (٢ ، ١) (ب) (-١ ، -٣) (جـ) (١ ، ٣) (د) (٣ ، ١)

٩ قوتان مقدارهما ١٢ ، ١٥ نيوتن تؤثران فى جسيم وتحصران زاوية قياسها هـ حيث جا هـ = $\frac{٤}{٥}$ فإن قياس الزاوية المحصورة بين المحصلة والقوة الأولى = ...

(أ) صفر (ب) ٣٠° (جـ) ٩٠° (د) خلاف ذلك

١٠ فى الشكل المقابل :



ثلاث قوى متزنة مقاديرها ق ، ك ، ٤ $\sqrt{٢}$ نيوتن
، ق (∠ب م جـ) = ٩٠° ، ق (∠ب م ء) = ١٣٥°
فإن : ق ، ك تساوى .... على الترتيب.

(أ) ٤ ، ٤
(ب) ٤ ، ٤ $\sqrt{٢}$
(جـ) ٤ $\sqrt{٢}$ ، ٤
(د) ٢ ، ٢

١١ مركز الدائرة : ٢ $س^٢$ + ٢ $ص^٢$ − ٣٢ = ٠ هو ....

(أ) (٠ ، ٠) (ب) (٢ ، ٢) (جـ) (١ ، ١) (د) (−١ ، −١)

١٢ عدد المستويات التى تمر بمستقيمين متوازيين مختلفين = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) عدد لا نهائى

١٣ فى الشكل المقابل :



م أ ب جـ ء هرم رباعى منتظم حجمه ٤٨ $سم^٣$ وارتفاعه ٤ سم
، ك جـ = ك ب ، $\overline{أ جـ}$ ∩ $\overline{ب ء}$ = {ح}
، ق (∠م ح ك) = ق (∠ح ك ب) = ق (∠م ك ب) = ٩٠°
فإن المساحة الجانبية للهرم = ... $سم^٢$

(أ) ١٨
(ب) ٢٤
(جـ) ٣٦
(د) ٦٠

١٤ مخروط دائرى قائم ، طول راسمه ١٧ سم، وارتفاعه ١٥ سم.
فإن طول نصف قطر قاعدته = ... سم.

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٠

١٥ إذا كان : ق ، ٢ مقدارى قوتين تؤثران فى جسيم وتحصران بينهما زاوية قياسها ١٢٠°
، المحصلة تنصف الزاوية المحصورة بين القوتين فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) $\sqrt{٣}$ (د) خلاف ذلك.

١٦ الصورة القطبية للمتجه $\overrightarrow{أ} = \sqrt{2}\ \overrightarrow{س} + \sqrt{2}\ \overrightarrow{ص}$ هى ....

(أ) (٢ ، ١٣٥°) (ب) (٤ ، ٤٥°) (جـ) (٢ ، ٤٥°) (د) (٤ ، ١٣٥°)

١٧ قوتان مقداراهما ٨ $\sqrt{3}$ ، ٨ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وتحصران بينهما زاوية قياسها ١٥٠° فإن مقدار محصلتهما = ... نيوتن

(أ) ٦٤ (ب) ٣٢ (جـ) ١٦ (د) ٨

١٨ إذا كان : $\overrightarrow{ق_1}$ = (٥ ، ٣) ، $\overrightarrow{ق_2}$ = (أ ، ٦) ، $\overrightarrow{ق_3}$ = (-١٤ ، ب) ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة ومحصلتهم $\overrightarrow{ح}$ = (١٠ $\sqrt{2}$ ، ١٣٥°) فإن قيمتى أ ، ب على الترتيب هما ....

(أ) -١ ، ١ (ب) ١ ، -١ (جـ) ٢ ، ١ (د) ١ ، ٢

١٩ إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى مستوية متلاقية فى نقطة فإن مقدار كل قوة يتناسب مع .... الزاوية المحصورة بين القوتين الأخريين.

(أ) جيب تمام (ب) جيب (جـ) ظل (د) ظل التمام

٢٠ فى الشكل المقابل :

إذا كانت مقادير القوى ق ، ٥ ، ك ، ٦ $\sqrt{10}$ متزنة وتؤثر فى المستطيل أ ب جـ ء فى الاتجاهات $\overrightarrow{جـ ب}$ ، $\overrightarrow{جـ أ}$ ، $\overrightarrow{جـ ء}$ ، $\overrightarrow{ح جـ}$ بحيث أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم ، أ ح = ٦ سم

فإن قيمة ك = ... نيوتن.

(أ) ١٢ (ب) ١٥ (جـ) ١٨ (د) ٢٠

٢١ فى الشكل المقابل :

إذا كان الجسم متزن تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية فى نقطة مقاديرها $ق_1$ ، $ق_2$ ، $ق_3$ نيوتن وأضلاع المثلث القائم توازى خطوط عمل هذه القوى وفى ترتيب دورى واحد ، أ ب = ٤ سم ، أ جـ = ٣ سم

فإن : $ق_1 : ق_2 : ق_3$ = ...

(أ) ٣ : ٤ : ٣ (ب) ٣ : ٥ : ٤ (جـ) ٤ : ٥ : ٣ (د) ٤ : ٣ : ٥

٢٢ عدد المستقيمات التي تمر بنقطتين مختلفتين

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

٢٣ إذا كان الخط المستقيم ل // المستوى س فإن ل ∩ س =

(أ) ل (ب) المستوى س (جـ) ∅ (د) خلاف ذلك

٢٤ إذا كان س ، ص مستويان بحيث س ∩ ص = ∅

فإن س .... ص

(أ) ⊥ (ب) // (جـ) = (د) ≡

٢٥ إذا كانت الدائرة : س² + ص² + ٦ س − ١٢ ص + ٥ = ٠ ، تمر برؤوس خماسي منتظم علمًا بأن كل وحدة في المستوى الاحداثي تمثل ٥ سم.

فإن مساحة سطح الخماسي المنتظم ≈ .... سم²

(أ) ٨٧٣٢ (ب) ٧٨٢٣ (جـ) ٣٢٨٧ (د) ٢٣٧٨

٢٦ وضع جسم وزنه ٨ ث.جم على مستوى مائل أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها هـ بحيث جا هـ = ٠.٦ وحفظ الجسم في حالة الاتزان بواسطة قوة أفقية فإن مقدار هذه القوة = ... داين.

(أ) ٦ (ب) −٥٨٨ (جـ) ٥٨٨ (د) خلاف ذلك.

٢٧ الدائرة التي تمر بالثلاث نقط أ = (−٢ ، ٠) ، ب = (٢ ، −١) ، جـ = (٣ ، ٣)

يكون طول قطرها = ... وحدة طول.

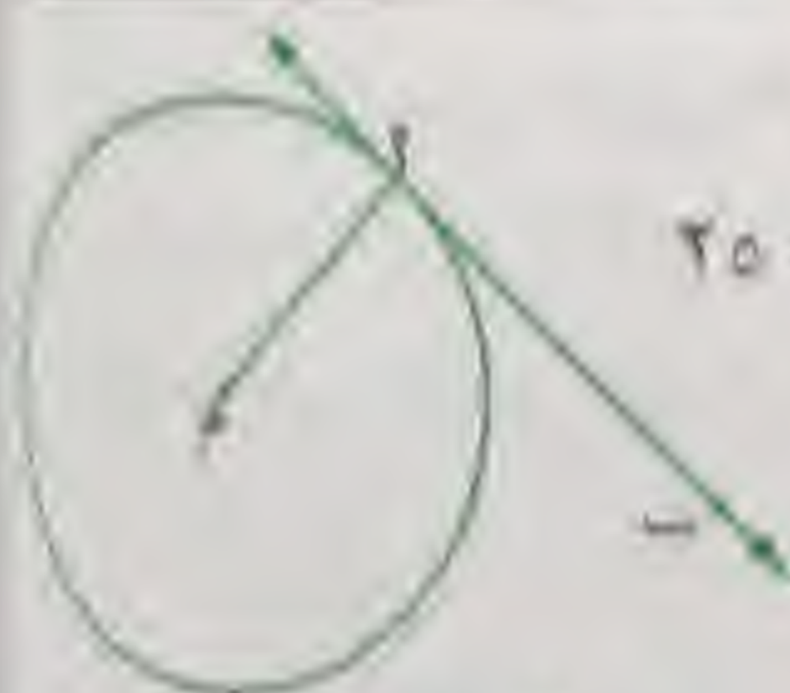
(أ) $\sqrt{٣٤}$ (ب) $\sqrt{٣٣}$ (جـ) $\sqrt{٣٢}$ (د) $\sqrt{٣١}$

٢٨ إذا كان محور الصادات يمس الدائرة : س² + ص² + ٤ س + ك ص + ٤ = ٠

فإن : ك = ...

(أ) ± ٢ (ب) ± ٣ (جـ) ± ٤ (د) ± ٥

٢٩ في الشكل المقابل :



إذا كانت معادلة الدائرة م هي (س − ٣)² + (ص + ٢)² = ٢٥

، $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م عند أ حيث : ب = (−٢ ، ١٠)

فإن : أب = ... وحدة طول.

(أ) ١٣ (ب) ٧ (جـ) ١٢ (د) ٥

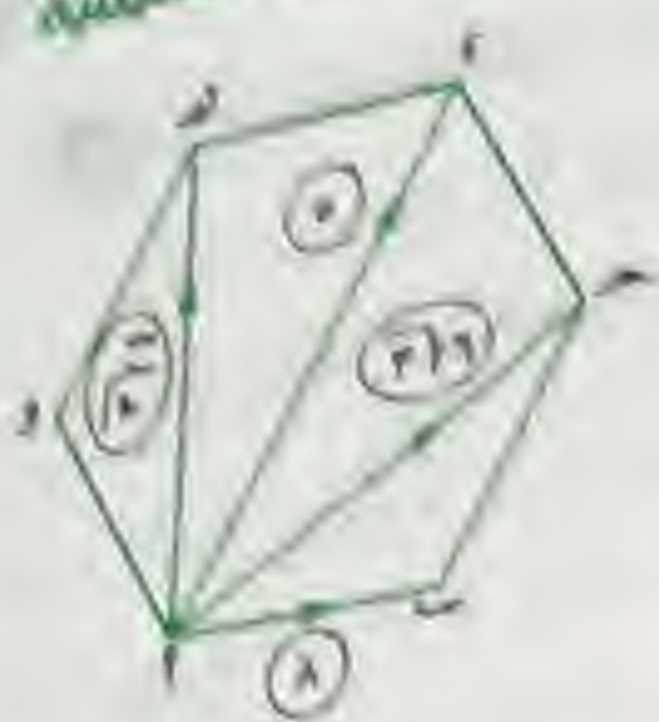
٣٠ في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء هـ و سداسي منتظم ، القوى التي مقاديرها

٨ ، ٦ $\sqrt{٣}$ ، ٥ ، ٤ $\sqrt{٣}$ نيوتن

أثرت في $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{أحـ}$ ، $\overrightarrow{أء}$ ، $\overrightarrow{أهـ}$ بالترتيب

فإن مقدار محصلتهم = ... نيوتن.



(أ) $\sqrt{٥٦١}$ (ب) $\sqrt{٦٥١}$

(جـ) $\sqrt{١٥٦}$ (د) $\sqrt{١٦٥}$

٧ محافظة الغربية



إدارة السنطة
توجيه الرياضيات الفترة الصباحية

أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا وضع جسم وزنه و على مستوى أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها هـ فإن مقدار مركبة وزنه في اتجاه عمودي على المستوى هي ....

(أ) و جا هـ (ب) و جتا هـ (جـ) و ظا هـ (د) و ظتا هـ

٢ إذا كانت : $\overrightarrow{ق} = ٢ \overrightarrow{س} + ٥ \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق} = -٣ \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$

فإن : $\overrightarrow{ع}$ = (............ ، ....)

(أ) (٦ ، ١) (ب) (١ ، ٦) (جـ) (-١ ، ٦) (د) (١ ، ٧)

٣ إذا كان : المستقيم ل // المستوى س فإن : ل ∩ س = ...

(أ) ل (ب) س (جـ) ∅ (د) لا شئ مما سبق.

٤ يتقاطع المستويان في ....

(أ) نقطة. (ب) خط مستقيم. (جـ) قطعة مستقيمة. (د) شعاع.

٥ أقل زاوية يمكن أن يدورها مثلث متساوي الساقين حول محور تماثله لينتج مخروط دائري قائم هي .... درجة.

(أ) ٩٠° (ب) ١٨٠° (جـ) ٢٧٠° (د) ٦٠°

٦ ثلاث قوى مستوية مقاديرها ٥ ، ٦ ، ٧ نيوتن تؤثر في نقطة مادية فإذا كانت القوى متزنة فإن جيب تمام الزاوية بين القوتين الثانية والثالثة = ...

(أ) $\frac{٧}{٥}$ (ب) $\frac{-٥}{٧}$ (جـ) $\frac{١٥}{١٧}$ (د) $\frac{١}{٢}$



٧ في الشكل المقابل :

قوة مقدارها ٢٠ نيوتن تعمل في اتجاه ٣٠ شمال الشرق

فإن مقدار مركبتها في اتجاه الشمال = ... نيوتن

(أ) ١٠ $\sqrt{3}$ (ب) ٢٠

(جـ) ١٠ (د) ٥

٨ في الشكل المقابل :

مقدار محصلة القوتين = ... نيوتن

(أ) ٢ ق (ب) ق

(جـ) $\sqrt{3}$ ق (د) صفر

٩ عدد أوجه الهرم الخماسي المنتظم = ...

(أ) ٧ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

١٠ ثلاث قوى مستوية ومتلاقية في نقطة ومتزنة إذا كان مقداري قوتين منهم ٨ ، ٤ نيوتن

فإن مقدار القوة الثالثة يمكن أن يكون .... نيوتن.

(أ) ١ (ب) ١٣ (جـ) ٧ (د) صفر

١١ إذا قطع المخروط الدائري القائم بمستوى يوازي قاعدته فالمقطع الناتج هو ....

(أ) مثلث متساوي الساقين. (ب) مثلث متساوي الأضلاع.

(جـ) دائرة. (د) شبه منحرف.

١٢ وضع جسم يزن ٢٠ ث. كجم على مستوى مائل أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ى

حيث جا ى = $\frac{3}{5}$ ومنع من الانزلاق بواسطة قوة أفقية ق فإن : ق = ... نيوتن

(أ) ٣٠ (ب) ١٥ (جـ) ١٠ (د) ٥ $\sqrt{3}$

١٣ قوتان مقداراهما ٥ ، ق نيوتن أصغر محصلة لهم ١٠ نيوتن ، ق > ٥

فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٦ (ب) ١٠ (جـ) ١٥ (د) ٢٠

١٤ إذا كانت المعادلة : ٢ س^٢ + (أ - ١) ص^٢ + ٥ س - ٢ ص = ٧ تمثل دائرة

فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢

(جـ) ٣ (د) ٤

---

١٥ كرة مصمتة ملساء وزنها ٢٠ ث.جم طول نصف قطرها ٥ سم. متزنة بربطها بخيط طوله ٥ سم. مربوط بنقطة على سطحها وطرفه الآخر بنقطة فى المستوى الرأسى الأملس فوق نقطة التماس فإن رد فعل المستوى الرأسى ر = ... ث.جم

(أ) $\frac{٢٠}{\sqrt{٣}}$ (ب) ٢٠

(جـ) $\frac{٢٠}{\sqrt{٥}}$ (د) صفر

---

١٦ هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ٦ سم. ، وطول حرفه الجانبى ٨ سم

فإن ارتفاعه = ... سم.

(أ) ٥ $\sqrt{٢}$ (ب) $\sqrt{٤٦}$

(جـ) $\sqrt{٨٥}$ (د) ٤٨

---

١٧ فى الشكل المقابل :



حللت قوة مقدارها ٢٠ $\sqrt{٢}$ ث.كجم تعمل فى اتجاه الشمال الغربى إلى مركبتين إحداهما ق$_١$ نحو الشمال الشرقى والأخرى ق$_٢$ نحو الغرب

فإن : ق$_٢$ = ... ث.كجم

(أ) ٣٠ (ب) ٤٠

(جـ) ٥٠ (د) ٤٠ $\sqrt{٢}$

---

١٨ باستخدام الشبكة التى أمامك



فإن المساحة الجانبية للمجسم الناتج

= .... سم^٢.

(أ) ٨ $\sqrt{٣}$ (ب) ١٢ $\sqrt{٣}$

(جـ) ١٦ $\sqrt{٣}$ (د) ٢٤

---

١٩ فى الشكل المقابل :



طول راسم المخروط = ... سم.

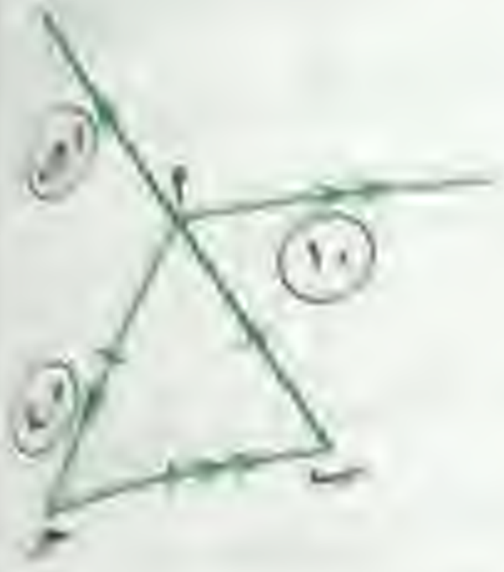
(أ) ١٢ (ب) ١٣

(جـ) ٥ (د) ١٠

٢٠ فى الشكل المقابل :

إذا كانت المجموعة متزنة

فإن : ق = ... نيوتن.



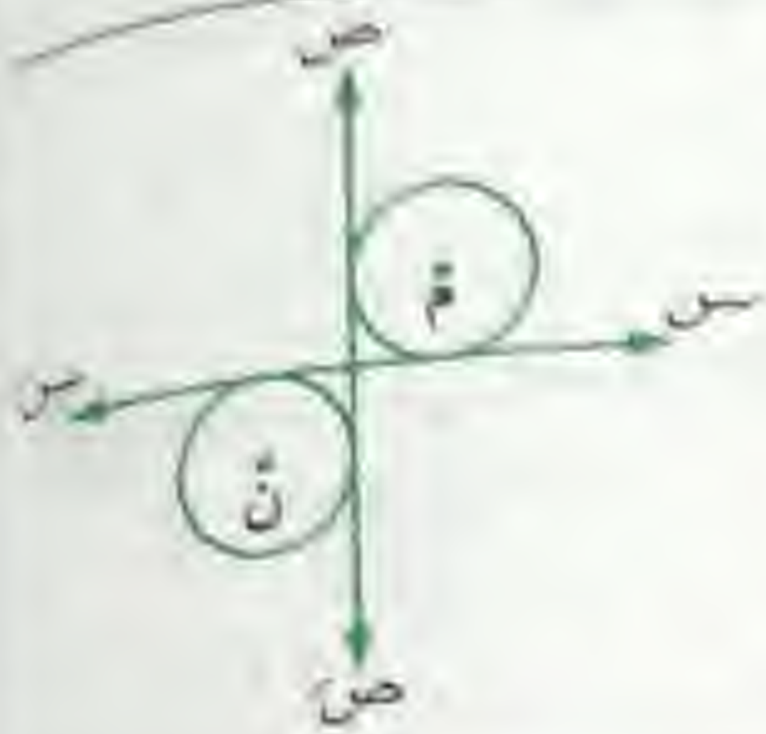
(أ) ١٠ (ب) ١٢

(جـ) ٢٠ (د) ١٣

٢١ فى الشكل المقابل :

م ، نَ دائرتان متطابقتان طول نصف قطر أى منها يساوى ٣ سم

فإن : م نَ = ... سم.



(أ) ٦ (ب) ٦ $\sqrt{2}$

(جـ) ٩ $\sqrt{2}$ (د) ٤

٢٢ ثلاث قوى متساوية فى المقدار ومتلاقية فى نقطة مادية ومتزنة

فإن قياس الزاوية بين أى قوتين = ... °

(أ) ١٢٠ (ب) ٢٤٠ (جـ) ١٨٠ (د) صفر

٢٣ إذا طوينا هذه الشبكة لتصبح مخروط دائرى قائم

فإن طول نصف قطر قاعدته = ... سم.



(أ) ١٢ (ب) ١٠

(جـ) ٦ (د) ٣

٢٤ طول نصف قطر الدائرة : ٢ س^2 + ٢ ص^2 + ٨ س − ٤ ص − ٨ = صفر

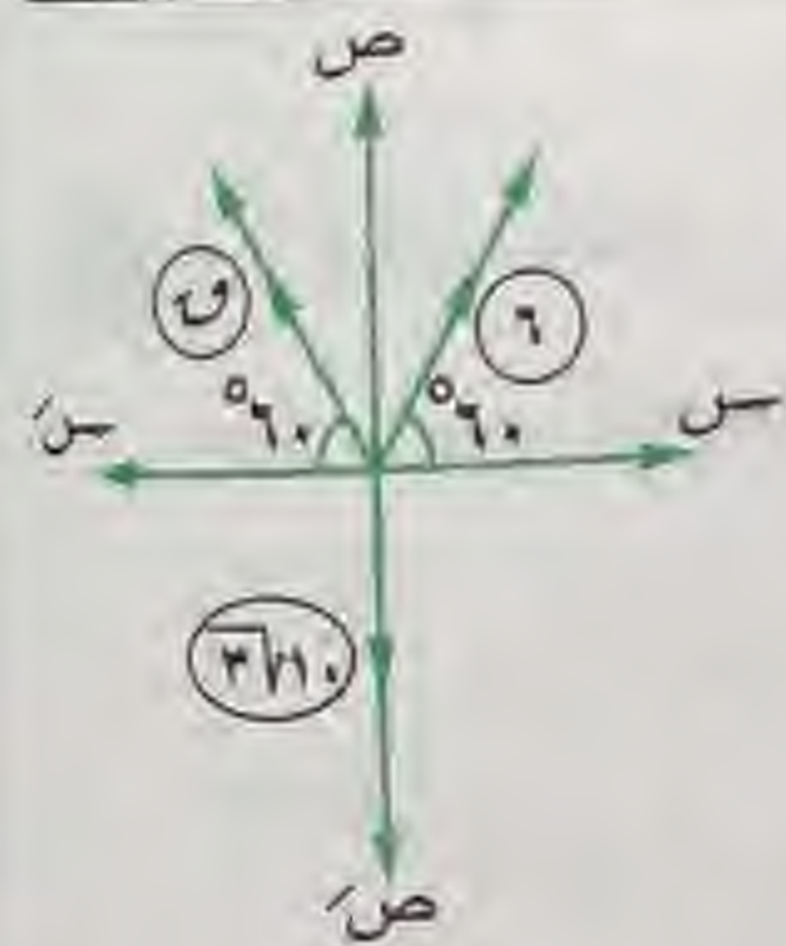
يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٢

٢٥ إذا كانت محصلة القوى الموضحة بالشكل

تؤثر فى محور السينات

فإن : ق = ... نيوتن.



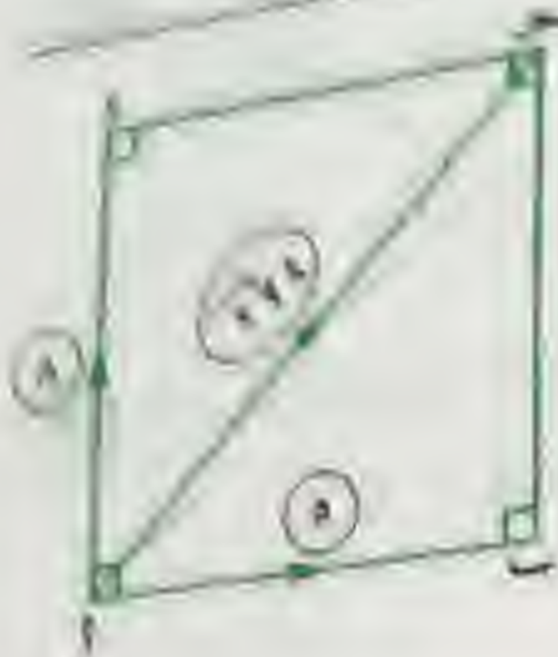
(أ) ١٠ (ب) ١٤

(جـ) ١٨ (د) ٦

٢٦ هرم قائم قاعدته معين طولا قطريه ٦ سم، ٤ سم، وارتفاعه ٥ سم.
فإن حجمه = ... سم^{٣}

(أ) ١٠ (ب) ٢٤ (جـ) ٢٠ (د) ٣٠

٢٧ أ ب جـ د مربع أثرت القوى ٥ ، ٨ ، ٤ $\sqrt{٢}$ نيوتن في الأضلاع $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{أد}$ ، $\overrightarrow{أجـ}$ على الترتيب فإن المحصلة في الصورة القطبية هي (.................. ، ....)



(أ) (٥ ، ٥٤°) (ب) (١٥ ، ٦٠°)
(جـ) (١٥ ، ٥٣° ٨َ) (د) (١٣ ، ٩٠°)

٢٨ سداسي منتظم مرسوم داخل دائرة طول نصف قطرها ٤ سم
فإن مساحته = ... سم^{٢}.

(أ) ٨ $\sqrt{٣}$ (ب) ١٦ $\sqrt{٣}$ (جـ) ١٦ (د) ٢٤ $\sqrt{٣}$

٢٩ قوتان مقداراهما ق ، ٢ نيوتن. تؤثران في نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ٦٠°.
إذا كانت محصلتهما ٢ $\sqrt{٣}$ نيوتن. فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٢

٣٠ إذا كان المستقيمان : س = -٣ ، س = ٤ يمسان الدائرة م
فإن محيطها = ... سم. حيث ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

(أ) ٢٢ (ب) ٤٤ (جـ) ١٢ (د) ١٤

٨ محافظة بورسعيد



إدارة شمال
توجيه الرياضيات

أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان : $\overrightarrow{ق_١}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ = $\overrightarrow{س}$ + $\overrightarrow{ص}$ حيث ق$_١$ ، ق$_٢$ مقاسه بالنيوتن فإن : مقدار محصلتهما .... نيوتن.

(أ) $\sqrt{٢}$ (ب) $\sqrt{٥}$ (جـ) $\sqrt{١٣}$ (د) ٥

٢ أي ٣ نقاط ليست على استقامة واحدة تعين ....

(أ) مستوى واحد. (ب) مستويين. (جـ) ٣ مستويات. (د) ٤ مستويات.

٣ إذا بلغت محصلة قوتين تؤثران في نقطة قيمتها العظمى فإن قياس الزاوية بينهما تساوي ....°

(أ) ٩٠ (ب) صفر (جـ) ١٢٠ (د) ١٨٠

٤ إذا كان حجم هرم رباعي منتظم ١٢ سم^3 وارتفاعه ٤ سم فإن : طول حرف قاعدته = ... سم.

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

٥ في الشكل الموضح :

ح١ = ...

(أ) ١٢ جتا ٧٥°

(ب) ١٢ جتا ٤٥°

(جـ) ٦ قتا ٤٥°

(د) ٦ قتا ٧٥°



٦ في الشكل المقابل :

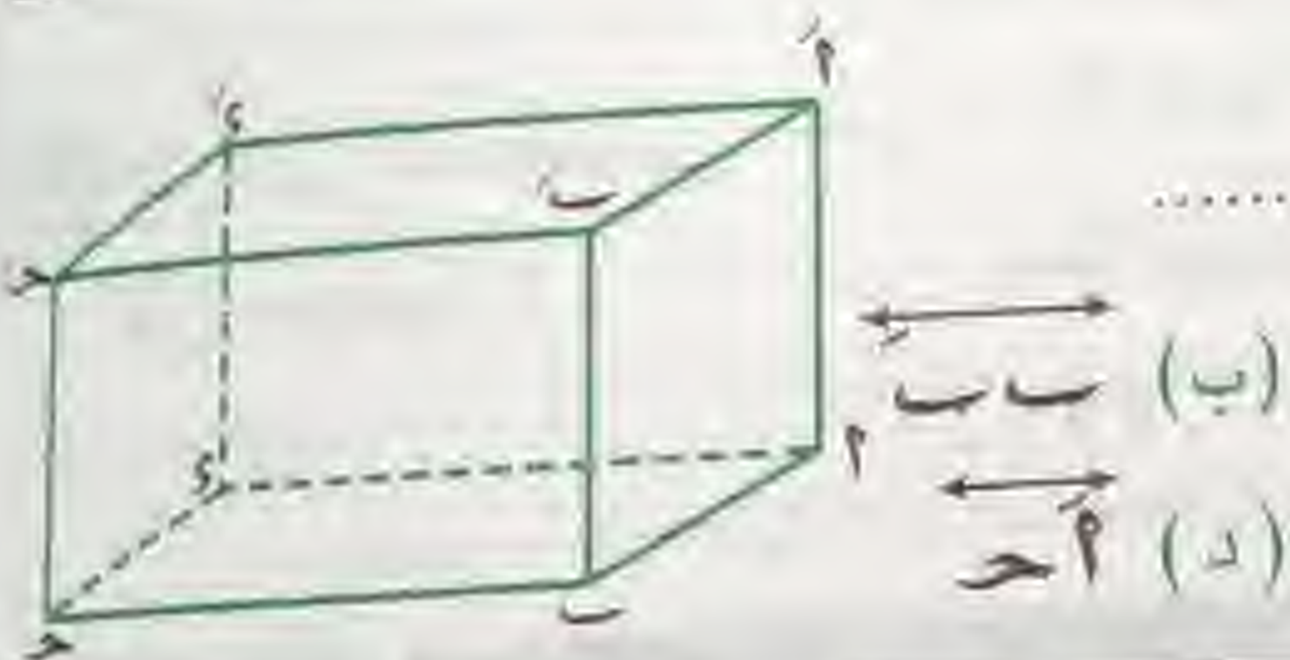
المستوى أأَبَ ∩ المستوى أَحـحَ = ...

(أ) $\overleftrightarrow{\text{أأَ}}$

(ب) $\overleftrightarrow{\text{بَب}}$

(جـ) $\overleftrightarrow{\text{حـحَ}}$

(د) $\overleftrightarrow{\text{أحـ}}$



٧ قوتان مقداراهما ٤ ، ق نيوتن تؤثران في نقطة مادية ، وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° ومحصلتهما عمودية على القوة الأولى فإن : ق تساوي .... نيوتن.

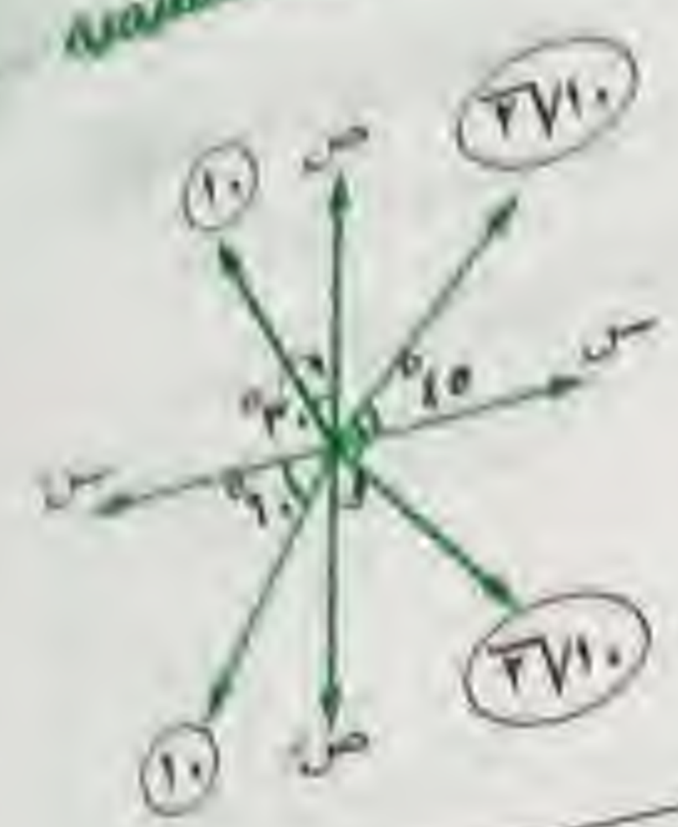
(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ٦ (د) ٢

٨ إذا كان طول نصف قطر قاعدة مخروط قائم ٦ سم، وارتفاعه ٨ سم. ، فإن مساحته الجانبية تساوي .... سم^2.

(أ) ٦٠ π (ب) ٢٨ π (جـ) ١٠ π (د) ٤٨ π

٩ في الشكل المقابل :

مقدار محصلة القوى ح = ... نيوتن.



(أ) ٢٠

(ب) ١٠ $\sqrt{٢}$

(جـ) ١٠

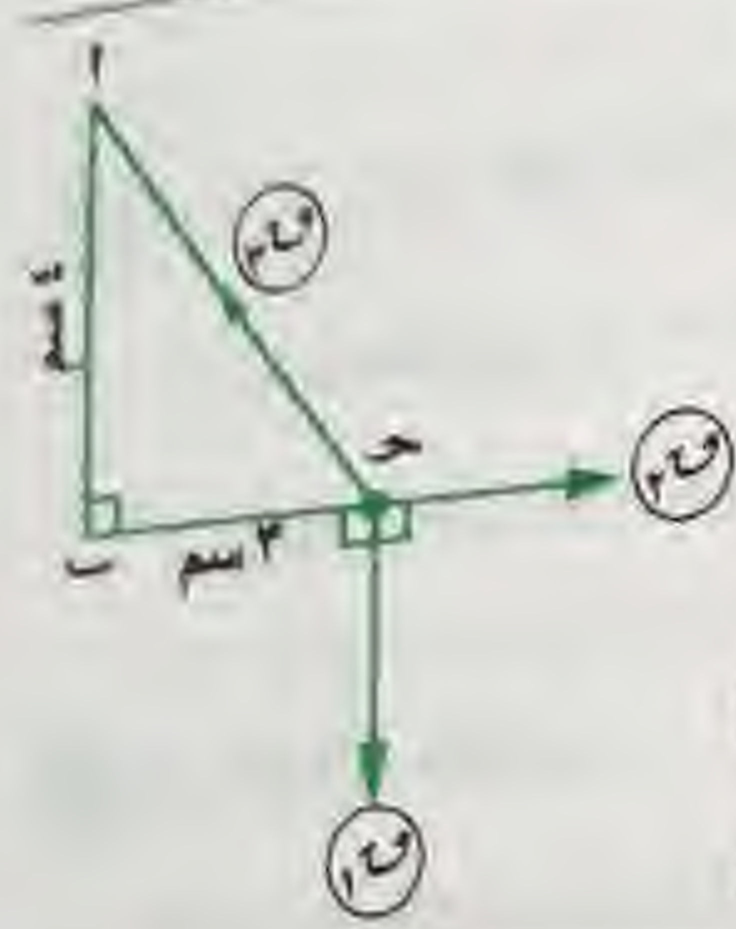
(د) صفر

١٠ مركز الدائرة : س^٢ + ص^٢ − ٦ س + ٨ ص = صفر هو النقطة ....

(أ) (−٤ ، ٣) (ب) (٤ ، −٣) (جـ) (−٣ ، ٤) (د) (٣ ، −٤)

١١ إذا كان الشكل المقابل يوضح اتزان جسم تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية في نقطة مقاديرها ق$_١$ ، ق$_٢$ ، ق$_٣$ نيوتن وأضلاع المثلث القائم توازى خطوط عمل هذه القوى وفي ترتيب دوري واحد

فإن ق$_١$: ق$_٢$: ق$_٣$ = ...



(أ) ٣ : ٤ : ٥

(ب) ٣ : ٥ : ٤

(جـ) ٤ : ٥ : ٣

(د) ٤ : ٣ : ٥

١٢ محيط الدائرة التي معادلتها : (س − ٣)^٢ + (ص + ٢)^٢ = ٢٥ يساوى .... وحدة طولية.

(أ) ٢ π (ب) ٣ π (جـ) ١٠ π (د) ٢٥ π

١٣ إذا كان : $\overleftarrow{ق_١}$ = ٥ $\overleftarrow{س}$ + ٣ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ = أ $\overleftarrow{س}$ + ٦ $\overleftarrow{ص}$

، $\overleftarrow{ق_٣}$ = −١٤ $\overleftarrow{س}$ + ب $\overleftarrow{ص}$ وكانت المحصلة $\overleftarrow{ح}$ = (١٠ $\sqrt{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$ π)

فإن : أ + ب = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) صفر (د) ١٤

١٤ إذا كان مجموع أطوال أحرف هرم ثلاثي منتظم الوجوه يساوى ١٨ سم

فإن : مساحته الكلية = ... سم^٢

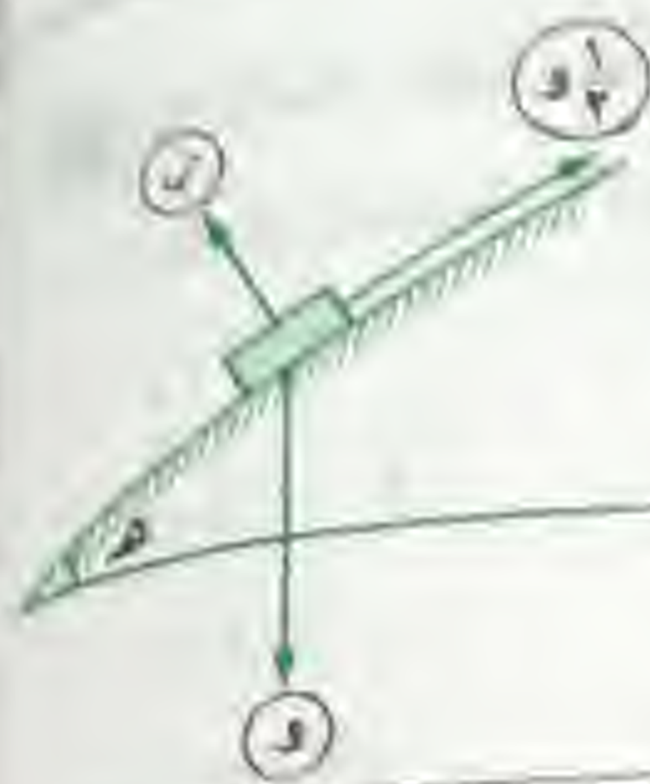
(أ) $\frac{٢٧ \sqrt{٢}}{٤}$ (ب) $\frac{٢٧ \sqrt{٣}}{٤}$ (جـ) $\frac{٢٧ \sqrt{٣}}{٢}$ (د) ٩ $\sqrt{٣}$

١٥ في الشكل المقابل :

إذا كان الجسم متزن

تحت تأثير القوى المبينة بالشكل

فإن : ق (د هـ) = ...



(أ) ٣٠°　　(ب) ٦٠°

(جـ) ٤٥°　　(د) ١٥°

---

١٦ مخروط قائم حجمه ٢٧ π سم^3. ومحيط قاعدته ٦ π سم.

فإن : ارتفاعه يساوى .... سم.

(أ) ٢٧　　(ب) ١٨　　(جـ) ٩　　(د) ٦

---

١٧ إذا تضاعف طول ضلع قاعدة هرم رباعى منتظم فإن حجمه ....

(أ) يتضاعف.　　(ب) لا يتغير.

(جـ) يتضاعف ثلاث مرات.　　(د) يتضاعف أربع مرات.

---

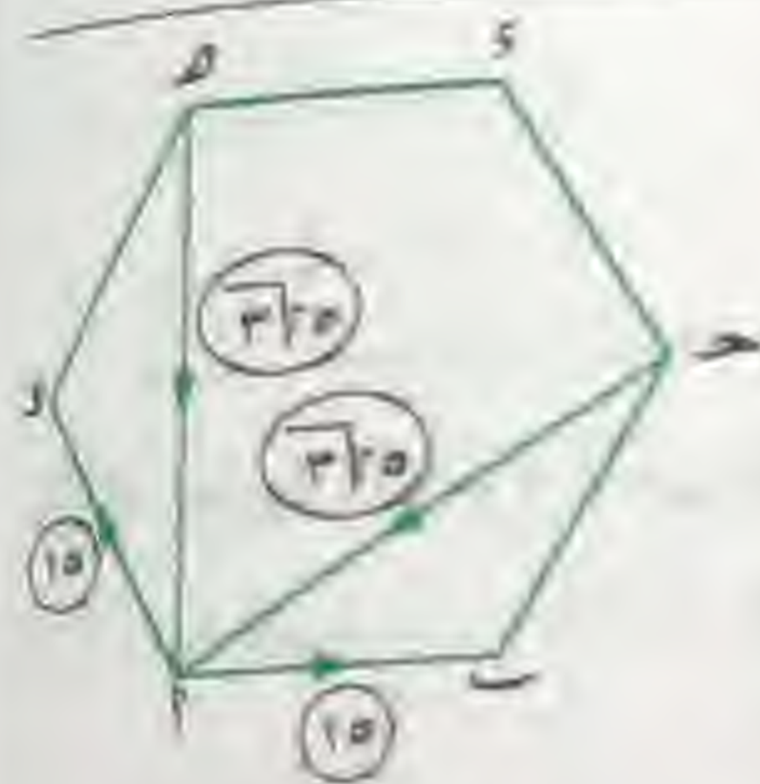
١٨ في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم

أثرت القوى ١٥ ، ٥$\sqrt{3}$ ، ٥$\sqrt{3}$ ، ١٥ نيوتن

على الترتيب فى الأضلاع $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{حـأ}$ ، $\overrightarrow{هـأ}$ ، $\overrightarrow{أو}$

فإن : مقدار المحصلة ح = ... نيوتن



(أ) ٥　　(ب) ١٠　　(جـ) ٢٥　　(د) صفر

---

١٩ إذا اتزنت ثلاث قوى متلاقية فى نقطة فإن مقدار كل قوة يتناسب مع .... الزاوية المحصورة بين القوتين الآخريين.

(أ) جيب تمام　　(ب) جيب　　(جـ) ظل　　(د) ظل تمام

---

٢٠ طول نصف قطر قاعدة مخروط دائرى قائم مساحته الكلية ٩٦ π سم^2. وطول راسمه ١٠ سم. يساوى .... سم.

(أ) ٦　　(ب) ١٤　　(جـ) ١٦　　(د) -١٦

٢١ يكون المستقيمان متخالفين إذا كانا ....

(أ) غير متوازيين. (ب) غير متقاطعين.

(جـ) غير منطبقين. (د) لا يجمعهما مستوى واحد.

٢٢ فى الشكل المقابل :



علق ثقل مقداره (و) نيوتن فى طرف خيط مثبت طرفه الآخر فى حائط رأسى وشد الثقل بقوة أفقية مقدارها ق نيوتن حتى أصبح الخيط مائلاً على الحائط بزاوية قياسها θ

فأى الجمل الآتية غير صحيح فى وضع الاتزان ....

(أ) ق = و ظا θ (ب) ش = ق + و

(جـ) $\overleftarrow{و} + \overleftarrow{ق} + \overleftarrow{ش} = \overleftarrow{صفر}$ (د) $ش^{٢} = ق^{٢} + و^{٢}$

٢٣ إذا كان حجم هرم سداسى منتظم يساوى $٨\sqrt{٣}$ سم^٣^، وارتفاعه يساوى ٤ سم.

فإن : محيط قاعدته = ... سم.

(أ) ٢ (ب) ١٢ (جـ) ٦ (د) $٦\sqrt{٣}$

٢٤ قوة مقدارها $٥\sqrt{٣}$ نيوتن تؤثر فى اتجاه ٣٠° شرق الشمال حللت إلى مركبتين متعامدين

فإن : مقدار المركبة فى اتجاه الشرق = ... نيوتن.

(أ) ٥ (ب) $٧\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٥\sqrt{٣}}{٢}$ (د) ١٥

٢٥ معادلة الدائرة التى تمس المحورين ومركزها النقطة (-٤ ، ٤) هى ....

(أ) $س^{٢} + ص^{٢} + ٨ س - ٨ ص + ١٦ = ٠$

(ب) $س^{٢} + ص^{٢} = ١٦$

(جـ) $س^{٢} + ص^{٢} - ٨ س + ٨ ص + ١٦ = ٠$

(د) $س^{٢} + ص^{٢} = ٨$

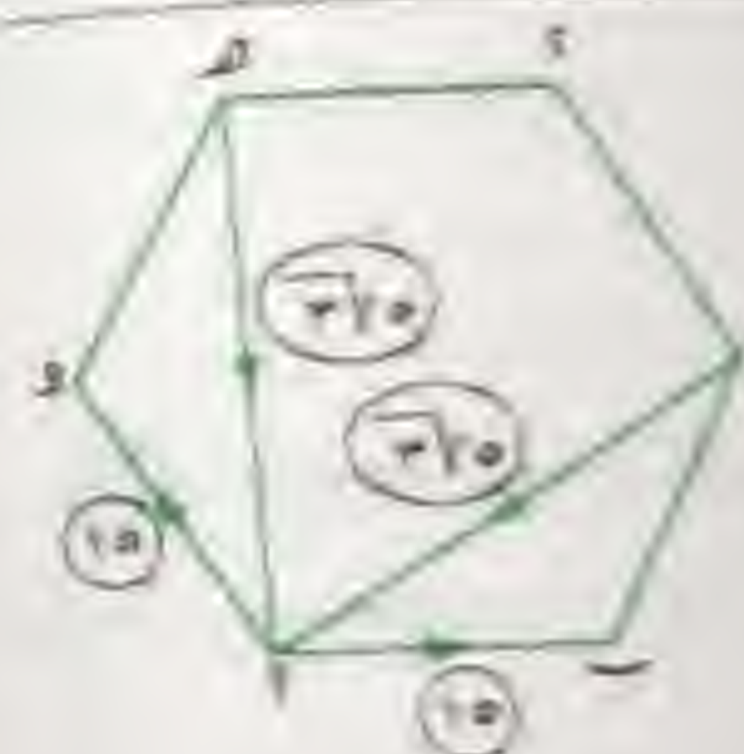
٢٦ قوتان متساويتان فى المقدار وقياس الزاوية بينهما يساوى ٩٠° ومقدار محصلتهما ٨ نيوتن فإن مقدار كل منهما يساوى .... نيوتن.

(أ) $٢\sqrt{٢}$ (ب) ٤ (جـ) $٤\sqrt{٢}$ (د) ٨



(د) ٦

بع مرات.



(د) صفر

.... الزاوية

(د) ظل تمام

. وطول راسمه

-١٦

٢٦ هرم منتظم حجمه ١٢ سم^٣ ومساحة قاعدته ٤ سم^٢ فإن ارتفاعه يساوي .... سم

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ٢

٢٧ أقل عدد من المستويات التي تحدد مجسمًا هو ....

(أ) ٣ مستويات. (ب) ٤ مستويات. (جـ) مستويان. (د) ٥ مستويات.

٢٨ في الشكل المقابل :



إذا وضع جسم وزنه ٦ ث.كجم على مستوى مائل أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ في حالة توازن بواسطة قوة أفقية $\overline{ق}$ فإن مقدار القوة الأفقية + مقدار رد الفعل = ... ث.كجم

(أ) ٦ (ب) $٦\sqrt{٣}$ (جـ) ١٨ (د) ٢٤

٣٠ في الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٢٠ سم ووزنه ٣٠ نيوتن متصل بمفصل مثبت في حائط رأسي عند أ والطرف ب مربوط بخيط خفيف طوله $٢٠\sqrt{٢}$ سم، مثبت طرفه الآخر عند جـ على الحائط فإذا اتزن القضيب أفقيًا فإن رد الفعل المفصل على القضيب ....

(أ) في اتجاه $\overleftarrow{أب}$ (ب) خط عمله يبتعد عن الحائط مسافة ١٠ سم.

(جـ) ينصف $\overline{ب جـ}$ (د) مقداره ١٥ نيوتن.

٩ محافظة كفر الشيخ

إدارة مطوبس
توجيه الرياضيات

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كانت : $\overline{ق}_١ = ٢\overline{س} + ٣\overline{ص}$ ، $\overline{ق}_٢ = \overline{س} + \overline{ص}$

فإن مقدار محصلتهما .... وحدة قوة.

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٧

٢ أي أربع نقط ليست في مستوى واحد تعين ....

(أ) مستوى. (ب) مستويان. (جـ) ثلاثة مستويات. (د) أربعة مستويات.

٣ قوتان متساويتان في المقدار تؤثران في نقطة والزاوية بينهما $\frac{\pi}{2}$ ومقدار محصلتهما ٦ نيوتن فإن مقدار كلاً منهما .... نيوتن.

(أ) $٣\sqrt{٢}$ (ب) $\sqrt{٣}$ (جـ) $٢\sqrt{٣}$ (د) $\frac{١}{٢}\sqrt{٢}$

٤ جميع الحالات الآتية تعين مستوى ما عدا ....

(أ) مستقيم ونقطة خارجة. (ب) مستقيمين متخالفين.

(جـ) مستقيمين متقاطعين. (د) مستقيمين متوازيين.

٥ إذا وضع جسم وزنه «و» نيوتن على مستوى يميل على الأفقي بزاوية قياسها هـ فإن مركبة الوزن في اتجاه المستوى .... نيوتن.

(أ) و جتا هـ (ب) و ظا هـ (جـ) و جا هـ (د) و

٦ هرم رباعي منتظم محيط قاعدته ٣٦ سم، وارتفاعه ١٠ سم، فإن حجمه = ... سم^٣

(أ) ٨١٠ (ب) ١٨٠ (جـ) ٣٦٠ (د) ٢٧٠

٧ في الشكل المقابل :

$ق_١$ = ... وحدة قوة.

(أ) ٢ جتا ٧٥ (ب) ١٢ جتا ٤٥

(جـ) ٦ قا ٤٥ (د) ٦ قتا ٧٥

٨ محيط الدائرة $(س - ٣)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ٢٥$ هو ....

(أ) ٥ π (ب) ٣ π (جـ) ١٠ π (د) ٢٥ π

٩ إذا كانت $\vec{ق}$ تتزن مع قوتين متعامدتين مقداراهما ٨ ، ١٥ نيوتن فإن : ق = ... نيوتن

(أ) ٧ (ب) ٢٣ (جـ) ١٧ (د) ١٩

١٠ هرم ثلاثي منتظم الوجوه مساحته ٩ √٣ فإن طول حرفه ....

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٢٧ (د) ٣√٣

١١ إذا بلغت محصلة قوتان تؤثران في نقطة قيمتها العظمى فإن قياس الزاوية بينهما ....

(أ) صفر (ب) ١٢٠ (جـ) ٦٠ (د) ١٨٠

١٢ قوتان مقدارهما ٨ ، ق نيوتن وقياس الزاوية بينهما ∈]٠ ، π[ومحصلتهما تنصف الزاوية بينهما فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٦ (د) ٢√٢

١٣ عدد الدوائر التي تمس محوري الإحداثيات وتقع مراكزها على الدائرة : س^2 + ص^2 = ٢٥ هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

١٤ مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ٧ سم. وطول راسمه ٢٥ سم.
فإن حجمه هو .... سم^3. حيث (π = $\frac{٢٢}{٧}$)

(أ) ١٢٣٢ (ب) ١٧٦ (جـ) ٥٢٤ (د) ٦٧١

١٥ القيمة العظمى والصغرى على الترتيب لمحصلة قوتين ٨ ، ١٣ نيوتن هي .... نيوتن

(أ) ١٢ ، ٨ (ب) ١٣ ، ٥ (جـ) ٢١ ، ٨ (د) ٢١ ، ٥

١٦ المساحة الجانبية لمخروط قائم ارتفاعه ٨ سم ، نق = ٦ سم. هي .... سم^2.

(أ) ١٠ π (ب) ٨ π (جـ) ٦٠ π (د) ١٤ π

١٧ إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية في نقطة
فإن كل قوة تتناسب مع .... الزاوية المحصورة بين القوتين الأخريين.

(أ) جيب (ب) جيب تمام (جـ) ظل (د) ظل التمام

١٨ معادلة الدائرة التي مركزها (٤ ، ٣) وتمس محور السينات هي ....

(أ) (س − ٣)^2 + (ص − ٤)^2 = ١٦ (ب) (س − ٤)^2 + (ص − ٣)^2 = ٩

(جـ) (س + ٣)^2 + (ص + ٤)^2 = ٩ (د) (س + ٣)^2 + (ص − ٤)^2 = ١٦

قوتان متلاقيتان في نقطة مقداراهما ٥ ق ، ٣ ق فإذا كانت القيمة العظمى لمحصلتهما ٤٠ نيوتن فإن القيمة الصغرى لمحصلتهما .... نيوتن.

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (ج) ٥ (د) صفر

طول نصف قطر قاعدة مخروط دائري قائم مساحته الكلية ٦١٦ π سم^{٢} وطول راسمه ٣٠ سم هو .... سم.

(أ) ٤٤ (ب) ١٤ (ج) ٣٠ (د) ٣٤

إذا كانت : $\overrightarrow{\text{ق}_1} = ٥\,\overrightarrow{\text{س}} + ٣\,\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_2} = \text{أ}\,\overrightarrow{\text{س}} + ٦\,\overrightarrow{\text{ص}}$

، $\overrightarrow{\text{ق}_3} = -١٤\,\overrightarrow{\text{س}} + \text{ب}\,\overrightarrow{\text{ص}}$ ثلاث قوى متلاقية في نقطة ، $\overrightarrow{\text{ح}} = (١٠\sqrt{٢} ، \frac{٣}{٤}\pi)$

فإن : (أ ، ب) = ...

(أ) (−١ ، ١) (ب) (٢ ، ١) (ج) (−١ ، ٢) (د) (١ ، −١)

غطاء مصباح على شكل مخروط قائم محيط قاعدته ٨٨ سم وارتفاعه ٢٠ سم

فإن مساحته ≃ .... سم^{٢}. $(\pi = \frac{٢٢}{٧})$

(أ) ٨٨ (ب) ٥٩٦ (ج) ١٠٧٤ (د) ١٠٤٧

علق ثقل مقداره ١٠٠ نيوتن بخيطين طوليهما ٣٠ سم ، ٤٠ سم من نقطتين في خط أفقي واحد البعد بينهما ٥٠ سم فإن مجموع مقداري الشد في الخيطين = ... نيوتن.

(أ) ٦٠ (ب) ٨٠ (ج) ٢٠ (د) ١٤٠

معادلة الدائرة التي هي صورة الدائرة : $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - ١٢\,\text{س} + ٦\,\text{ص} + ٢٠ = ٠$

بالانتقال (س + ٢ ، ص − ٢) هي ....

(أ) $(\text{س} + ٨)^{٢} + (\text{ص} + ٥)^{٢} = ٢٥$ (ب) $(\text{س} - ٨)^{٢} + (\text{ص} + ٥)^{٢} = ٢٥$

(ج) $(\text{س} - ٨)^{٢} + (\text{س} - ٥)^{٢} = ٢٥$ (د) $(\text{س} + ٥)^{٢} + (\text{ص} - ٨)^{٢} = ٢٥$

يكون المستقيمان متخالفين إذا كانا ....

(أ) غير متوازيين. (ب) غير منطبقين.

(ج) لا يجمعهما مستوى واحد. (د) يقعان في مستوى واحد.

٢٦ $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٤٠ سم ووزنه ٣٠ نيوتن متصل بمفصل عند أ ويتزن أفقيًا بخيط طرفاه عند ب ، حـ أعلى أ على الحائط ، أحـ = ٤٠ سم. فإن مقدار الشد فى الخيط = ... نيوتن.

(أ) ٣٠ (ب) ٤٠ (جـ) ١٥ (د) ١٥ $\sqrt{٢}$

٢٧ هرم رباعى منتظم حجمه ٤٨٠ سم^{٣} وطول ضلع قاعدته ١٢ سم فإن ارتفاعه ....

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٣٠ (د) ١٥

٢٨ ثلاث قوى متساوية المقدار ومتلاقية فى نقطة ومتزنة فإن قياس الزاوية بين أى قوتين ....

(أ) ٦٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

٢٩ النقطة التى تقع على الدائرة (س − ٢)^{٢} + ص^{٢} = ١٣ هى ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٣ ، −٢) (جـ) (٢ ، ٠) (د) (٤ ، ٣)

٣٠ ثلاث قوى ليست على استقامة واحدة متزنة متلاقية فى نقطة مقاديرها ٣ ، ٧ ، ق فإن ق يمكن أن تساوى ....

(أ) صفر (ب) ١٠ (جـ) ٥ (د) ٤

١٠ محافظة الأقصر

إدارة الطود والقرنة
توجيه الرياضيات



أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ٣ ق ، ٢ ق ومقدار محصلتهما ٥ ق فيكون قياس الزاوية بينهما ....

(أ) ٦٠° (ب) صفر° (جـ) ٢٠° (د) ١٨٠°

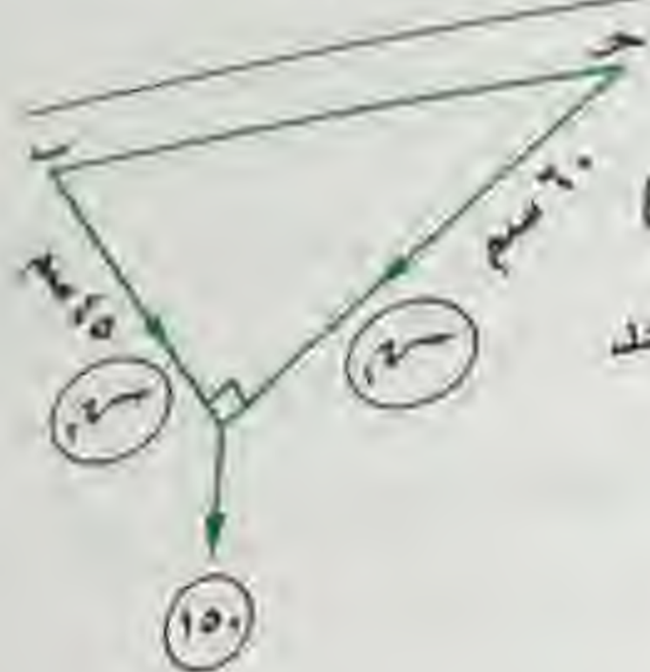
٢ قوتان مقداراهما ق ، ٢ ق محصلتهما تكون عمودية على إحداهما فإن : ح = ...

(أ) $\sqrt{٥}$ ق (ب) $\sqrt{٣}$ ق (جـ) ٣ ق (د) ق

٣ إذا أثرت القوى $\overline{ق}_1$ = ٤ $\overline{س}$ + ٥ $\overline{ص}$ ، $\overline{ق}_2$ = أ $\overline{س}$ − ٧ $\overline{ص}$ ، $\overline{ق}_3$ = ٣ $\overline{س}$ + ب $\overline{ص}$ في نقطة مادية وكانت القوى متزنة فإن : أ + ٢ ب = ...

(أ) −٥ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) −٣

٤ في الشكل المقابل :



جسم وزنه ١٥٠ ث.جم متزن بربطه بخيطين متعامدين طولاهما ٦٠ سم ، ٤٥ سم وطرفا الخيطين حـ ، ب على خط أفقي واحد

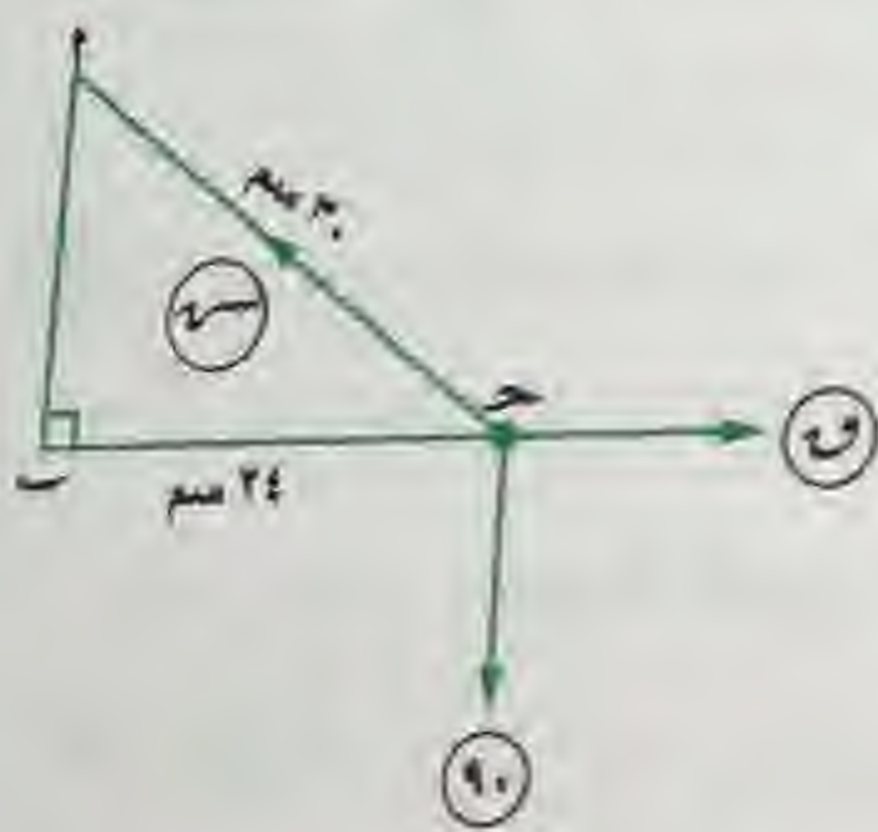
فإن : $ش_2 - ش_1$ = ... ث.جم

(أ) ١٢٠ (ب) ٩٠ (جـ) ٦٠ (د) ٣٠

٥ ثلاثة قوى متساوية في المقدار ومتلاقية في نقطة متزنة فإن قياس الزاوية بين أي قوتين = ...

(أ) ٦٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

٦ في الشكل المقابل :



جسم وزنه ٩٠ ث.جم ، على بعد ٢٤ سم.

من الحائط وطول الخيط ٣٠ سم.

فإن : ش − ق = ... ث.جم.

(أ) ١٥٠ (ب) ١٢٠ (جـ) ٥٠ (د) ٣٠

٧ أ ب حـ ء شبه منحرف قائم الزاوية عند كل من أ ، ء فيه :

أ ء = حـ ء = ٤٠ سم ، أ ب = ٧٠ سم ، م ∈ $\overline{أ ب}$ حيث أ م = ٤٠ سم أثرت القوى ٢٥ ، ق ، ١٠ $\sqrt{2}$ ، ٣٥ ث.جم في $\overrightarrow{حـ ب}$ ، $\overrightarrow{حـ م}$ ، $\overrightarrow{حـ أ}$ ، $\overrightarrow{حـ ء}$ على الترتيب وكان معيار محصلة هذه القوى يساوي ٥٠ ث.جم فإن : قيمة ق = ... ث.جم

(أ) ١٠ (ب) ٥٠ (جـ) ٢٠ (د) ٣٠

٨ قوتان مقداراهما ٤ ، ق نيوتن تؤثران في نقطة واحدة وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° فأي قيم ق التالية تجعل المحصلة أصغر ما يمكن ؟

(أ) ١ نيوتن. (ب) ٢ نيوتن. (جـ) ٣ نيوتن. (د) ٤ نيوتن.



٩ أى مجموعات القوى التى مقاديرها كالتالى لا يمكن أن تكون متزنة

(أ) ١٠ نيوتن ، ١٠ نيوتن ، ٥ نيوتن. (ب) ٤ نيوتن ، ٦ نيوتن ، ٨ نيوتن

(جـ) ١١ نيوتن ، ٧ نيوتن ، ٨ نيوتن. (د) ٨ نيوتن ، ٤ نيوتن ، ١٤ نيوتن

---

١٠ وضع جسم وزنه ١٠٠ نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ فى حالة توازن بواسطة قوة أفقية.

فإن مقدار القوة الأفقية = ... نيوتن.

(أ) ١٠٠ (ب) ٥٠ (جـ) $\frac{١٠٠}{\sqrt{٣}}$ (د) ١٥٠

---

١١ قوتان مقداراهما ق ، $\sqrt{٣}$ ق نيوتن متلاقيتان فى نقطة وكان مقدار محصلتهما $ح_{١}$ عندما كان قياس الزاوية بينهما ٩٠° ثم أصبح مقدار محصلتهما $ح_{٢}$ عندما كان قياس الزاوية بينهما ١٥٠° فإن : ....

(أ) $ح_{١} = ح_{٢}$ (ب) $ح_{١} = ٢ ح_{٢}$ (جـ) $ح_{١} = \frac{٢}{٥} ح_{٢}$ (د) $ح_{١} = \frac{١}{٢} ح_{٢}$

---

١٢ أثرت قوى مقاديرها ق ، ٦ ، ٤ $\sqrt{٢}$ ، ٥ $\sqrt{٢}$ ، ك نيوتن فى نقطة مادية فى اتجاهات الشرق ، الشمال ، الشمال الغربى ، الجنوب الغربى ، الجنوب على الترتيب، وكان مقدار محصلة القوى = ٢ نيوتن فى اتجاه الشمال فإن : ق - ك = ...

(أ) ١٢ (ب) ٢٧ (جـ) ٦ (د) ١٣

---

١٣ قوتان متعامدتان مقداراهما ٢ ق - ٥ ، ق + ٢ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية. مقدار محصلتهما يساوى ٣ $\sqrt{٥}$ نيوتن فإن : ق = ... نيوتن

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

---

١٤ ساق منتظمة قابلة للحركة حول أحد طرفيها شدت جانبًا بقوة أفقية تؤثر فى طرفها الآخر وتساوى نصف ثقل الساق. فإن قياس زاوية ميل الساق على الرأسى عندما تتزن = ...

(أ) ٦٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٣٠° (د) ٩٠°

١٥ كرة ملساء من الحديد وزنها و ث.كجم مستقرة بين حائط رأسى أملس ومستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ حيث جا هـ = $\frac{٣}{٥}$ فإذا اتزنت الكرة فإن مجموع مقدارى الضغط على كل من الحائط والمستوى المائل = ... ث.كجم.

(أ) $\frac{٤}{٣}$ و　　(ب) $\frac{٥}{٣}$ و　　(جـ) ٣ و　　(د) $\frac{١}{٣}$ و

---

١٦ عدد المستويات التى تمر بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة يساوى = ...

(أ) ١　　(ب) ٣　　(جـ) ٦　　(د) عدد لا نهائى.

---

١٧ حجم هرم رباعى منتظم محيط قاعدته ٣٦ سم وارتفاعه ١٠ سم يساوى .... سم^٣

(أ) ٨١٠　　(ب) ١٨٠　　(جـ) ٣٦٠　　(د) ٢٧٠

---

١٨ مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٢٤ سم وطول راسمه ٢٦ سم فإن مساحة قاعدته .... سم^٢

(أ) ٢٥ π　　(ب) ١٠٠ π　　(جـ) ٢٠ π　　(د) ٥٠ π

---

١٩ إذا كان حجم نصف كرة طول نصف قطرها (نق) يساوى حجم مخروط طول نصف قطر قاعدته نق وارتفاعه ع　فإن : ....

(أ) ع = $\frac{٥}{٣}$ نق　　(ب) ع = ٢ نق　　(جـ) ع = ٢ نق^٢　　(د) ع = ٤ نق

---

٢٠ الدائرة التى معادلتها (س − أ)^٢ + (ص − ب)^٢ = ب^٢ حيث أ ≠ ب ....

(أ) تمس محور السينات.　　(ب) تمس محور الصادات.

(جـ) تمس المحورين.　　(د) لا تمس أى من المحورين.

---

٢١ طول قوس القطاع الدائرى الذى إذا طويناه أصبح مخروطًا دائريًا قائمًا حجمه ٤٩ π سم^٣ وارتفاعه ٣ سم يساوى .... سم

(أ) ٢ π　　(ب) ٤ π　　(جـ) ٨ π　　(د) ١٤ π

---

٢٢ النسبة بين حجم هرم ثلاثى منتظم وحجم أكبر مخروط دائرى قائم يمكن وضعه داخل الهرم يساوى ....

(أ) $\frac{٣\sqrt{٣}}{\pi}$　　(ب) $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢\pi}$　　(جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{\pi}$　　(د) $\frac{٣\sqrt{٣}}{٤\pi}$

٢٣ إذا كان مجموع أطوال أحرف هرم ثلاثي منتظم الأوجه يساوي ١٨ سم فإن حجمه = ... سم^3

(أ) $9\sqrt{2}$ (ب) $\frac{9\sqrt{2}}{4}$ (جـ) $\frac{27\sqrt{2}}{5}$ (د) $9\sqrt{3}$

٢٤ معادلة الدائرة التي مركزها (١ ، ٢) وتمس المستقيم ٣ س + ٤ ص + ٩ = ٠ هي ....

(أ) س^2 + ص^2 − ٢ س − ٤ ص = ١٦ (ب) س^2 + ص^2 + ٢ س + ٤ ص = ١١

(جـ) س^2 + ص^2 + ٢ س + ٤ ص − ١٦ = ٠ (د) س^2 + ص^2 − ٢ س − ٤ ص = ١١

٢٥ الدائرتان (س + ٢)^2 = ١ − ص^2 ، س^2 + ص^2 − ٢ س − ٨ ص − ١٩ = ٠ تكونان ....

(أ) متقاطعتين. (ب) متماستين من الداخل.

(جـ) متباعدتين. (د) متماستين من الخارج.

٢٦ أ ب جـ مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه (ل) دار دورة كاملة حول ب جـ كمحور للدوران فإن حجم الجسم الناشئ من الدوران بدلالة π ، ل هو ....

(أ) $\frac{\pi ل}{4}$ (ب) $\frac{\pi}{4}$ ل^3 (جـ) $\frac{\pi ل^3}{4}$ (د) $\sqrt{3}$ π ل^3

٢٧ هرم رباعي قائم قاعدته معين طول ضلعه يساوي أحد قطري المعين = ٦ سم فإذا كان ارتفاع الهرم = ١٢ سم فإن حجم الهرم = ... سم^3

(أ) $72\sqrt{3}$ (ب) $16\sqrt{3}$ (جـ) ١٤٤ (د) ٧٢

٢٨ هرم سداسي منتظم حجمه ٨ $\sqrt{3}$ سم^3 وارتفاعه ٤ سم فإن محيط قاعدته = ... سم

(أ) ١٢ (ب) ٢٤ (جـ) ٣٦ (د) ٤٨

٢٩ مساحة سطح مضلع منتظم عدد أضلاعه ١٢ ضلعًا وتمر برؤوسه الدائرة : س^2 + ص^2 − ١٦ = ٠ هي .... وحدة مربعة.

(أ) ٢٤ (ب) ٣٦ (جـ) ٤٨ (د) ٧٢

٣٠ طول القطعة المماسة للدائرة : س^2 + ص^2 = نق^2 من النقطة (٠ ، ٢ نق) = ... وحدة طول

(أ) نق (ب) ٢ نق (جـ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ نق (د) $\sqrt{3}$ نق

الإجابات



إرشادات الاختبارات التراكمية القصيرة فى الاستاتيكا

الاختبار الأول

1. ① (د) ② (ب) ③ (أ) ④ (جـ)

2. ق = ٨ نيوتن / قياس زاوية ميل المحصلة على ق = ٣٠°

3. ق = ٨ نيوتن

الاختبار الثانى

1. ① (أ) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (د)

2. ق = ٤ $\sqrt{٢}$ نيوتن ، ح = ٤ نيوتن

3. ٥٠ ، ٥٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن.

الاختبار الثالث

1. ① (ب) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (جـ)

2. ح = ١٥,١٦ ث.كجم ، هـ = ٩٩,٤٠°

3. ٢٢ ، ١٠ ث.كجم ، ح = ٢ $\sqrt{٢٠١}$ ث.كجم

الاختبار الرابع

1. ① (جـ) ② (د) ③ (ب) ④ (أ)

2. ١٠٠ $\sqrt{٣}$ ث.جم ، ١٠٠ $\sqrt{٣}$ ث.جم

3. أ = -١٠ ، ب = ١٠

الاختبار الخامس

1. ١٢٠° ، اكتب بنفسك.

2. [illegible]

3. ش = $\frac{٢٠\sqrt{٣}}{٣}$ ث.جم ، س = $\frac{١٠\sqrt{٣}}{٣}$ ث.جم

4. ٩ $\sqrt{٧}$ نيوتن ، $\sqrt{٧}$ نيوتن.

إرشادات الاختبارات التراكمية القصيرة فى الهندسة والقياس

الاختبار الأول

1. ① (د) ② (أ) ③ (د) ④ (أ) ⑤ (د)

2. ① المستويان أ ب جـ ء ، أ َب َجـ َء َ
(يوجد إجابات أخرى)
② المستويان أ ب جـ ء ، أ ب ب َ أ َ
(يوجد إجابات أخرى)
③ المستقيمان $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{ب َجـ َ}$
(يوجد إجابات أخرى)
④ $\overleftrightarrow{أب}$ ، المستوى أ َب َجـ َء َ
(يوجد إجابات أخرى)
⑤ $\overleftrightarrow{أب}$

الاختبار الثانى

1. ① (ب) ② (جـ) ③ (ب) ④ (د)

2. ① المساحة الجانبية = ٨٠٠ سم^{٢}
② الحجم = $\frac{٤٠٠٠\sqrt{٣}}{٣}$ سم^{٣}

3. المساحة الكلية = ٥٧٦ $\sqrt{٣}$ سم^{٢}

الاختبار الثالث

1. ① (أ) ② (أ) ③ (د) ④ (د)

2. ارتفاعه الجانبى = ١٥ سم
المساحة الجانبية = ٥٤٠ سم^{٢}

3. ١٤ سم

الاختبار الرابع

1. ① (أ) ② (جـ) ③ (أ) ④ (د)

2. س^{٢} + ص^{٢} + ٤ س - ١٠ ص - ٥ = ٠

3. ① المساحة الكلية = ٩٦ π سم^{٢}
② الحجم = ٩٦ π سم^{٣}

٤ $١٠٠ \sqrt{٣}$ ث.جم ، $١٠٠ \sqrt{٣}$ ث.جم

٥ أ = −١ ، ب = ١

الاختبار الخامس

١ ١٣٥° ، أثبت بنفسك.

٢ ع = ٤ $\sqrt{٣}$ نيوتن وتعمل في إتجاه أ حـ

٢ ① المساحة الجانبية = ٨٠٠ سم^{٢}

② الحجم = $\frac{٤٠٠٠ \sqrt{٣}}{٣}$ سم^{٣}

٣ المساحة الكلية = ٥٧٦ $\sqrt{٣}$ سم^{٢}

الاختبار الثالث

١ ① (أ) ② (أ) ③ (د) ④ (د)

---

١ ① (أ) ② (د) ③ (د) ④ (ب)

٢ (أ) أ = −١ ، ب = ١

(ب) $١٠٠ \sqrt{٣}$ ث.جم ، $١٠٠ \sqrt{٣}$ ث.جم

٣ (أ) س^{٢} + ص^{٢} − ٤ س + ٢ ص − ٤ = ٠

(ب) $\frac{٢٠ \sqrt{٣}}{٣}$ ، $\frac{١٠ \sqrt{٣}}{٣}$ ث.جم

(أ) ٢٢٠٫٦٠٦ سم

(ب) ١٢٠ ث.جم ، ٩٠ ث.جم

٥ (أ) ع = $\sqrt{٦٥١}$ نيوتن ، هـ ≃ ٩ ٤٠°

(ب) ١٥ $\sqrt{٢}$ ، ١٥ $\sqrt{٢}$ نيوتن.

النموذج الأول

١ (ب) ٢ (د) ٣ (أ)

٤ (جـ) ٥ (د)

٦ بفرض أ ب في اتجاه و س

∴ س = ٢ جتا ٠°

+ ٤ $\sqrt{٣}$ جتا ٣٠°

+ ٨ جتا ٦٠°

+ ٢ $\sqrt{٣}$ جتا ٩٠°

+ ٤ جتا ١٢٠°

= ٢ × ١ + ٤ $\sqrt{٣}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٨ × $\frac{١}{٢}$ + ٢ $\sqrt{٣}$ × صفر + ٤ × $\frac{-١}{٢}$ = ١٠

، ص = ٢ جا ٠° + ٤ $\sqrt{٣}$ جا ٣٠° + ٨ جا ٦٠° + ٢ $\sqrt{٣}$ جا ٩٠° + ٤ جا ١٢٠° = ٢ × صفر

+ ٤ $\sqrt{٣}$ × $\frac{١}{٢}$ + ٨ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٢ $\sqrt{٣}$ =

+ ٤ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ١٠ $\sqrt{٣}$

∴ ح = ١٠ س + ١٠ $\sqrt{٣}$ ص

∴ ح = $\sqrt{(١٠)^{٢} + (١٠\sqrt{٣})^{٢}}$ = ٢٠ ث.كجم

، ظا هـ = $\frac{١٠\sqrt{٣}}{١٠}$ = $\sqrt{٣}$ ∴ هـ = ٦٠°

∴ مقدار المحصلة = ٢٠ ث.كجم وتصنع زاوية قياسها ٦٠° مع و س

النموذج الثانى

١ (أ)　٢ (ب)　٣ (أ)

٤ (ب)　٥ (د)

٦

$ح_١ = ٢ ق \text{ جتا } \frac{ى}{٢} = ١٢$

∴ $ق \text{ جتا } \frac{ى}{٢} = ٦$　(١)

، $ح_٢ = ٢ ق \text{ جتا } \left(\frac{١٨٠° - ى}{٢}\right)$

$= ٦$

∴ $ق \text{ جا } \frac{ى}{٢} = ٣$　(٢)

بتربيع المعادلتين وجمعهما :

∴ $ق^٢ \text{ جتا}^٢ \frac{ى}{٢} + ق^٢ \text{ جا}^٢ \frac{ى}{٢} = ٦^٢ + ٣^٢$

∴ $ق^٢ \left(\text{جتا}^٢ \frac{ى}{٢} + \text{جا}^٢ \frac{ى}{٢}\right) = ٤٥$

∴ $ق^٢ = ٤٥$

∴ $ق = \sqrt{٤٥} = ٣\sqrt{٥}$ ث كجم.

٧ (جـ)　٨ (أ)　٩ (د)

١٠ (جـ)　١١ (ب)

١٢

① فى Δ م ل هـ :

$م ل = \sqrt{(٢٥)^٢ - (٢٠)^٢}$

$= ١٥$ سم

∴ الارتفاع = ١٥ سم

② المساحة الجانبية

$= \frac{١}{٢} ×$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

$= \frac{١}{٢} × (٤ × ٤٠ × ٢٥) = ٢٠٠٠$ سم²

③ [illegible]

١٣ (د)　١٤ (جـ)　١٥ (جـ)

١٦



طول القوس $\overset{\frown}{أ ب}$

$= م ب × θ^{ء}$

$= ٣٦ × \frac{٢١٠}{١٨٠} π$

$= ٤٢ π$ سم

∵ محيط قاعدة المخروط $= ٤٢ π$

∴ $٢ π نق = ٤٢ π$

∴ $نق = ٢١$

∴ $ع = \sqrt{(٣٦)^٢ - (٢١)^٢}$

$= ٣\sqrt{٩٥}$ سم $\approx ٢٩,٢$ سم

١٧ (أ)　١٨ (أ)　١٩ (ب)

٢٠ (أ)　٢١ (جـ)　٢٢ (ب)

٢٣ (أ)　٢٤ (أ)

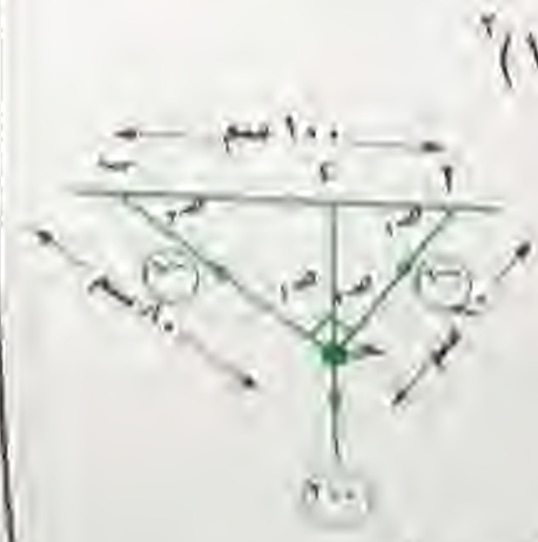
النموذج الثالث

١ (جـ)　٢ (أ)　٣ (جـ)　٤ (ب)

٥

∵ $(٦٠)^٢ + (٨٠)^٢ = (١٠٠)^٢$

∴ Δ أ جـ ب قائم الزاوية فى جـ



، باستخدام قاعدة لامى :

$\frac{٢٠٠}{\text{جا } ٩٠°} = \frac{ش_١}{\text{جا هـ}_١} = \frac{ش_٢}{\text{جا هـ}_٢}$

[illegible]

$∴ \frac{٢٠٠}{١} = \frac{ش_١}{\frac{٤}{٥}} = \frac{ش_٢}{\frac{٣}{٥}}$

∴ $ش_١ = ٢٠٠ × \frac{٤}{٥} = ١٦٠$ ث جم

، $ش_٢ = ٢٠٠ × \frac{٣}{٥} = ١٢٠$ ث جم

٦ (د)　٧ (جـ)　٨ (جـ)

٩ (ب)

١٠

بفرض أن :

$\overleftarrow{و س}$ هو اتجاه القوة الأولى

$س = ٨ \text{ جتا صفر}°$

$+ ٤\sqrt{٣} \text{ جتا } ٣٠°$

$+ ٦\sqrt{٣} \text{ جتا } ١٥٠°$

$+ ١٤ \text{ جتا } ٢٤٠°$

$= ٨ × ١ + ٤\sqrt{٣} × \frac{\sqrt{٣}}{٢} + ٦\sqrt{٣} × \left(\frac{-\sqrt{٣}}{٢}\right)$

$+ ١٤ × \left(\frac{-١}{٢}\right) = -٢$

، $ص = ٨ \text{ جا صفر} + ٤\sqrt{٣} \text{ جا } ٣٠° + ٦\sqrt{٣} \text{ جا } ١٥٠°$

$+ ١٤ \text{ جا } ٢٤٠° = ٨ × \text{صفر} + ٤\sqrt{٣} × \frac{١}{٢}$

$+ ٦\sqrt{٣} × \frac{١}{٢} + ١٤ × \left(\frac{-\sqrt{٣}}{٢}\right) = -٢\sqrt{٣}$

∴ $\overrightarrow{ح} = -٢ \overrightarrow{س} - ٢\sqrt{٣} \overrightarrow{ص}$

∴ $ح = \sqrt{(-٢)^٢ + (-٢\sqrt{٣})^٢} = ٤$ نيوتن

، $\text{ظا هـ} = \frac{-٢\sqrt{٣}}{-٢} = \sqrt{٣}$

، ∵ س < ٠ ، ص < ٠ ∴ هـ = ٢٤٠°

∴ مقدار المحصلة = ٤ نيوتن وتصنع زاوية قياسها ٢٤٠° مع $\overrightarrow{و س}$

١١ (أ)　١٢ (د)　١٣ (د)

١٤ (أ)　١٥ (د)

١٦

∵ مركز الدائرة الأولى $م_١ (١ ، -٣)$

، الدائرة الثانية

$س^٢ + ص^٢ - ٢ س + ٦ ص + \frac{٢٤}{٤} = ٠$

∴ مركز الدائرة الثانية $م_٢ = (١ ، -٣)$

∴ الدائرتان لهما نفس المركز

∴ الدائرتان متحدتا المركز

$نق_١ = \sqrt{(١)^٢ + (-٣)^٢ - ١} = ٣$ وحدة طول

$نق_٢ = \sqrt{(١)^٢ + (-٣)^٢ - \frac{٢٤}{٤}} = ٢$ وحدة طول

١٧ (ب)　١٨ (ب)　١٩ (د)

٢٠ (د)　٢١ (د)　٢٢ (جـ)

٢٣ (ب)　٢٤ (ب)

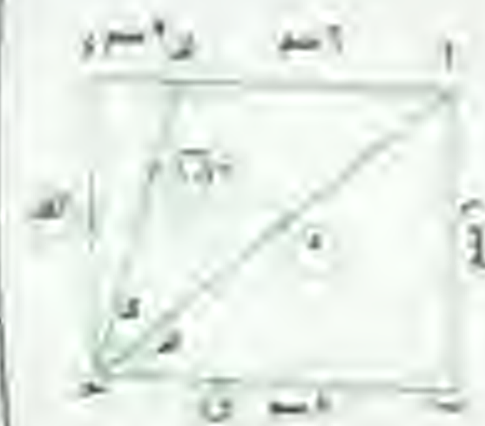
النموذج الرابع

١ (د)　٢ (ب)　٣ (جـ)

٤

من هندسة الشكل

$جـ هـ = ٢\sqrt{١٠}$ سم



∵ القوى متزنة

∴ س = صفر

، ص = صفر

∴ ق جتا صفر + ٤ جتا هـ − $٦\sqrt{١٠}$ جتا ى

− ك جتا ٩٠° = صفر

[illegible]

= $\frac{1}{3}$ × محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي
= $\frac{1}{3}$ × (٤ × ٤٠ × ٢٥) = ٢٠٠٠ سم^2
③ المساحة الكلية = ٢٠٠٠ + (٤٠)^2 = ٣٦٠٠ سم^2
④ الحجم = $\frac{1}{3}$ × (٤٠)^2 × ١٥ = ٨٠٠٠ سم^3

= صفر
∴ ك = ١٥ نيوتن.

٥ (د)	٦ (د)

٧

طول نصف قطر قاعدة المخروط = ٦ وحدات
، ارتفاعه = ٨ وحدات.
∴ حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ × π (٦)^2 × ٨
= ٩٦ π وحدة مكعبة.
، طول الراسم = $\sqrt{(٦)^2 + (٨)^2}$ = ١٠ وحدات.
∴ المساحة الكلية = π نق (ل + نق)
= π × ٦ (١٠ + ٦)
= ٩٦ π وحدة مربعة.

٨ (د)	٩ (ب)	١٠ (د)
١١ (ا)	١٢ (ا)	

١٣

نفرض أن المركز (س ، ٠) ∈ محور السينات.

١٧ (ب)	١٨ (ب)	١٩ (ب)
٢٠ (ب)	٢١ (ج)	٢٢ (ج)
٢٣ (د)	٢٤ (د)	

النموذج الخامس

١ (د)	٢ (ا)	٣ (د)
٤ (ب)	٥ (ج)	

٦

∵ المساحة الكلية
= π نق (ل + نق)
∴ ٩٦ π = π × نق × (١٠ + نق)
∴ ٩٦ = نق × (١٠ + نق)
∴ نق^2 + ١٠ نق − ٩٦ = ٠
∴ نق = −١٦ (مرفوض) أ، نق = ٦ سم
∴ ع = $\sqrt{(١٠)^2 - (٦)^2}$ = ٨ سم
∴ حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ π (٦)^2 × ٨ = ٩٦ π سم^3

٧

من الشكل:
Δ ا ب ح يمثل مثلث القوى
ا ب = $\sqrt{(٢٠)^2 - (١٠)^2}$
= ١٠ $\sqrt{٣}$

٨ (ب)

١٠

اعتبر حـ ب ، حـ ء هو المحوران و س ، و ص
∴ س = ٢ جتا صفر°
+ ٧ $\sqrt{٥}$ جتا θ
+ ٤ $\sqrt{٢}$ جتا ٤٥° + ٤ جتا ٩٠°
= ٢ + ٧ $\sqrt{٥}$ × $\frac{١٠}{٥\sqrt{٥}}$ + ٤ $\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$
+ صفر = ٢٠ نيوتن.
، ص = ٢ جا صفر + ٧ $\sqrt{٥}$ جا θ + ٤ $\sqrt{٢}$ جا ٤٥°
+ ٤ جا ٩٠° = صفر + ٧ $\sqrt{٥}$ × $\frac{٥}{٥\sqrt{٥}}$ + ٤ $\sqrt{٢}$
× $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٤ = ١٥ نيوتن.
∴ ح = $\sqrt{(٢٠)^2 + (١٥)^2}$ = ٢٥ نيوتن.
، طا هـ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{١٥}{٢٠}$ = $\frac{٣}{٤}$
∴ θ = ٣٦° ٥٢َ مع القوى الأولى.

١١ (ب)	١٢ (د)	١٣ (ب)

النموذج السادس

١٠

∵ حجم الهرم = ١٢٩٦
∴ ع = ١٢ سم

$\therefore$ ٤٢ $= \sqrt{(١٠)^٢ - (٦)^٢} = ٨$ سم

$\therefore$ حجم الجسم الناتج $= ٢\left(\frac{١}{٣}\,\pi\,\text{نق}^٢\,\text{ع}\right)$

$= ٢ \times \frac{١}{٣} \times \pi \times (٨)^٢ \times ٦$

$= ٢٥٦\,\pi$ سم^٣

١٧ (أ) **١٨** (جـ) **١٩** (جـ) **٢٠** (جـ)

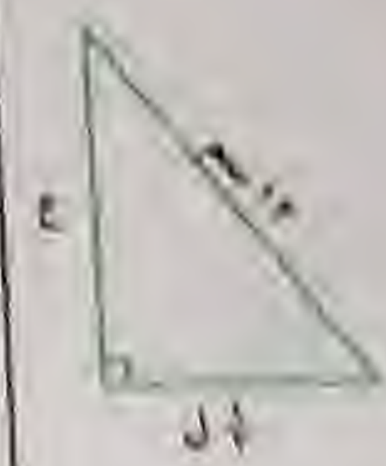
٢١ (أ) **٢٢** (ب) **٢٣** (جـ) **٢٤** (جـ)

النموذج السابع

١ (جـ) **٢** (أ) **٣** (أ) **٤** (ب)

٥ (جـ) **٦** (ب) **٧** (أ)

٨



$\because$ المساحة الجانبية $= ٢٤٠$

$\therefore \frac{١}{٢}$ (محيط القاعدة) $\times$ الارتفاع الجانبي $= ٢٤٠$

وبفرض طول ضلع القاعدة $=$ ل سم

$\therefore \frac{١}{٢} \times ٤\,\text{ل} \times ١٢ = ٢٤٠$

$\therefore$ ل $= ١٠$ سم

$\therefore$ ع $= \sqrt{(١٢)^٢ - (٥)^٢} = \sqrt{١١٩}$ سم

، حجم الهرم $= \frac{١}{٣} \times$ مساحة القاعدة $\times$ ع

$= \frac{١}{٣} \times (١٠)^٢ \times \sqrt{١١٩}$

$= \frac{١٠٠}{٣}\sqrt{١١٩} \simeq ٣٦٣.٦$ سم^٣

٩ (جـ)

١٠



$\therefore \frac{\text{ق}_١}{\text{جا}\ ١٥٠^\circ} = \frac{\text{ق}_٢}{\text{جا}\ ٩٠^\circ} = \frac{٤٠٠}{\text{جا}\ ١٢٠^\circ}$

$\therefore \text{ق}_١ = \frac{٤٠٠ \times \text{جا}\ ١٥٠^\circ}{\text{جا}\ ١٢٠^\circ} = \frac{٤٠٠\sqrt{٣}}{٣}$ ث.كجم.

$\therefore \text{ق}_٢ = \frac{٤٠٠ \times \text{جا}\ ٩٠^\circ}{\text{جا}\ ١٢٠^\circ} = \frac{٨٠٠\sqrt{٣}}{٣}$ ث.كجم.

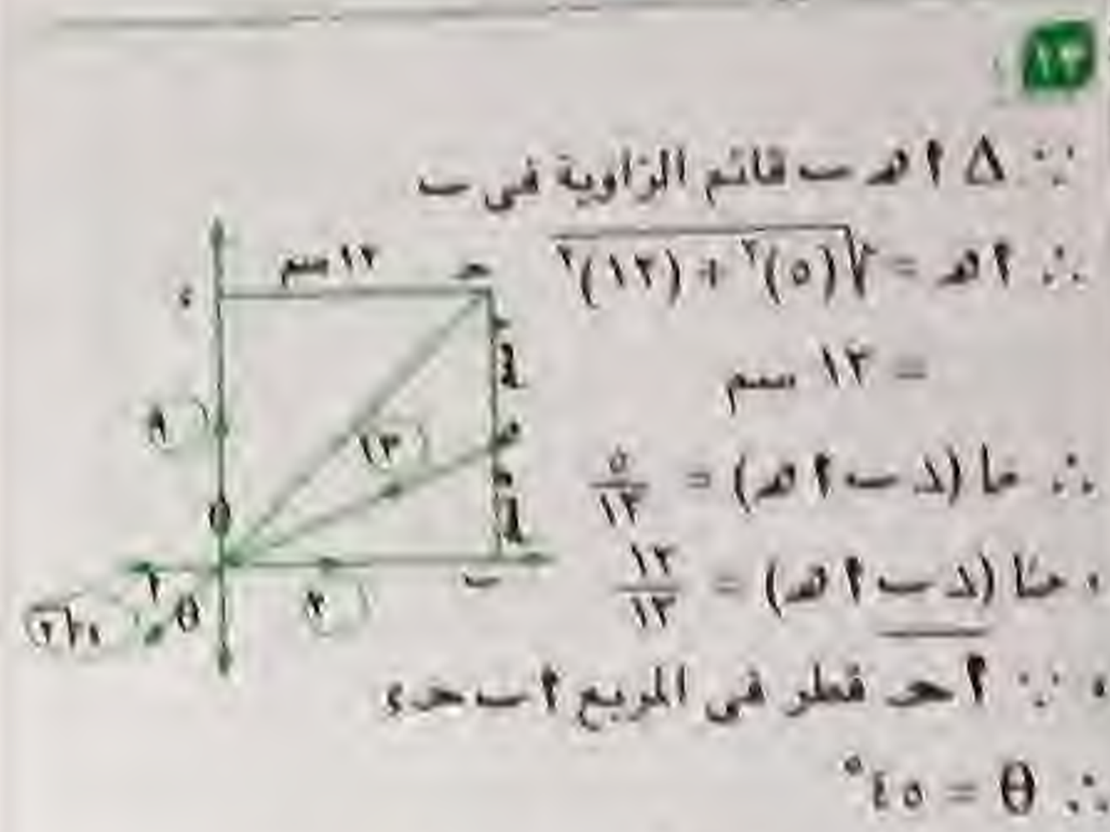
١١ (د) **١٢** (ب)

١٣

$\because \Delta$ أهـب قائم الزاوية في ب

$\therefore$ أهـ $= \sqrt{(٥)^٢ + (١٢)^٢}$

$= ١٣$ سم



$\therefore$ جا (د ب أ هـ) $= \frac{٥}{١٣}$

، جتا (د ب أ هـ) $= \frac{١٢}{١٣}$

، $\because$ أحـ قطر في المربع أ ب حـ د

$\therefore \theta = ٤٥^\circ$

$\therefore$ س $= ٢$ جتا صفر° $+ ١٣$ جتا (د ب أ هـ)

$+ ٩$ جتا $٩٠^\circ + ٤\sqrt{٢}$ جتا ٢٢٥°

$= ٢ \times ١ + ١٣ \times \frac{١٢}{١٣} + ٩ \times$ صفر

$+ ٤\sqrt{٢} \times \frac{-١}{\sqrt{٢}} = ١٠$

، ص $= ٢$ جا صفر° $+ ١٣$ جا (د ب أ هـ)

$+ ٩$ جا $٩٠^\circ + ٤\sqrt{٢}$ جا ٢٢٥°

$= ٢ \times$ صفر $+ ١٣ \times \frac{٥}{١٣} + ٩ \times ١$

$+ ٤\sqrt{٢} \times \frac{-١}{\sqrt{٢}} = ١٠$

$\therefore \overline{\text{ح}} = ١٠\,\overline{\text{س}} + ١٠\,\overline{\text{ص}}$

$\therefore$ ح $= \sqrt{(١٠)^٢ + (١٠)^٢} = ١٠\sqrt{٢}$ ث.كجم

، ظا هـ $= \frac{١٠}{١٠} = ١$

$\therefore$ هـ $= ٤٥^\circ$

١٤ (د) **١٥** (د)

١٦ (د) **١٧** (ب) **١٨** (ب)

١٩ (جـ) **٢٠** (جـ) **٢١** (جـ)

٢٢ (ب) **٢٣** (د) **٢٤** (جـ)

النموذج الثامن

١ (جـ) **٢** (د) **٣** (د)

٤ (ب) **٥** (د)

٦

$\because$ حجم الهرم $= \frac{١}{٣} \times$ مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع

$\therefore ٨\sqrt{٣} = \frac{١}{٣} \times$ مساحة القاعدة $\times ٤$

$\therefore$ مساحة القاعدة $= ٦\sqrt{٣}$ سم^٢

$\therefore \frac{٦}{٤} \times \text{س}^٢$ ظتا $\frac{\pi}{٦} = ٦\sqrt{٣}$

$\therefore \text{س}^٢ = ٤ \quad \therefore$ س $= ٢$

$\therefore$ طول ضلع السداسي $= ٢$ سم

$\therefore$ محيط القاعدة $= ٢ \times ٦ = ١٢$ سم

٧ (جـ) **٨** (أ)

٩ (د) **١٠** (د)

١١



$\because$ س $=$ ق جتا صفر

، ص $=$ ق جا صفر $+ ٨٠$ جتا ٦٠° $+$ أهـ جتا ٦٠°

$= \frac{\sqrt{٣}}{٢} \ldots$

$\therefore \overline{\text{ح}} = \ldots\,\overline{\text{س}} + \ldots\,\overline{\text{ص}}$ (١)

$\because$ ح $= ٤٠$ نيوتن في اتجاه ٦٠° شمال شرق

$\therefore \overline{\text{ح}} = ٤٠$ جتا $٦٠^\circ\,\overline{\text{س}} + ٤٠$ جا $٦٠^\circ\,\overline{\text{ص}}$

$= ٢٠\,\overline{\text{س}} + ٢٠\sqrt{٣}\,\overline{\text{ص}}$ (٢)

من (١) ، (٢)

$\therefore$ ق $= ٣٠$ نيوتن

$\therefore$ أهـ $= ٦٠\sqrt{٣}$ نيوتن

١٢ (د) **١٣** (أ) **١٤** (جـ)

١٥ (د)

١٦

$\therefore \sqrt{ك} - ٤ = ١٣$

ومنها $\sqrt{ك} = ١٧$ ومنها $ك = ٢٨٩$

أو $\sqrt{ك} - ٤ = -١٢$ ومنها $\sqrt{ك} = -٩$ (مرفوض)

$\therefore$ قيم ك هي ٨١ أو ٢٨٩

(١٧) (د) (١٨) (د)

(١٩) (أ) (٢٠) (د) (٢١) (ب)

(٢٢) (د) (٢٣) (ب) (٢٤) (ب)

النموذج التاسع

(١) (جـ) (٢) (جـ) (٣) (ب) (٤) (د)

(٥) (أ) (٦) (جـ) (٧) (د) (٨) (جـ)

(٩)

$\because$ أ حـ = أ ء = ٤ متر

$\therefore$ ق(∠ أ حـ ء) = ٤٥°

$\therefore$ حـ ء = ٤ $\sqrt{٢}$ متر

من △ م حـ هـ :

$\therefore$ م هـ = ١ متر

، ق(∠ هـ حـ م) = ٤٥° ، ق(∠ هـ م حـ) = ٩٠°

$\therefore$ هـ حـ = $\sqrt{٢}$ متر

$\therefore$ ء هـ = ٤ $\sqrt{٢}$ − $\sqrt{٢}$ = ٣ $\sqrt{٢}$ متر

، من △ أ م هـ : أ هـ = $\sqrt{١٠}$ متر

، $\because$ △ أ هـ ء هو مثلث القوى

$\therefore \frac{ش}{\sqrt{١٠}} = \frac{ر}{٣\sqrt{٢}} = \frac{٨}{٤}$

$\therefore$ ش = ٢ $\sqrt{١٠}$ ثقل كجم ، ر = ٦ $\sqrt{٢}$ ثقل كجم

(١٢)

$\because$ طول راسم المخروط

= ١٨ سم.

، $\because$ محيط دائرة قاعدة

المخروط = طول القوس أ ب

= نق × هـ = ١٨ × $\frac{٦٠° \times \pi}{١٨٠°}$ = ٦ π

، ٢ π نقَ = ٦ π $\therefore$ نقَ = ٣ سم

، ع = $\sqrt{ل^٢ - نقَ^٢}$ = $\sqrt{(١٨)^٢ - (٣)^٢}$ = ٣ $\sqrt{٣٥}$

$\therefore$ حجم المخروط

= $\frac{١}{٣}$ π نقَ^{٢} ع

= $\frac{١}{٣}$ π × $(٣)^٢$ × ٣ $\sqrt{٣٥}$

≃ ١٦٧.٢ سم^٣

(١٣) (جـ)

(١٤)

س = ١٠ جتا صفر°

+ ٢٠ جتا ١٢٠°

+ ٣٠ جتا ٢٤٠°

= ١٠ + ٢٠ × $\frac{-١}{٢}$

+ ٣٠ × $\frac{-١}{٢}$ = −١٥

، ص = ١٠ جا صفر° + ٢٠ جا ١٢٠° + ٣٠ جا ٢٤٠°

= صفر + ٢٠ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٣٠ × $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ = −٥ $\sqrt{٣}$

$\therefore$ ح = −١٥ س − ٥ $\sqrt{٣}$ ص

$\therefore$ ح = $\sqrt{(-١٥)^٢ + (-٥\sqrt{٣})^٢}$ = ١٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن

، ظا هـ = $\frac{-٥\sqrt{٣}}{-١٥} = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$ $\therefore$ هـ = ٢١٠°

$\therefore$ خط عمل المحصلة في اتجاه ٣٠° جنوب الغرب.

(٢٣) (ب) (٢٤) (ب)

النموذج العاشر

(١) (د) (٢) (أ) (٣) (جـ)

(٤) (أ) (٥) (أ)

(٦)

الارتفاع الجانبي

= $\sqrt{(١٠\sqrt{٣})^٢ + (١٠)^٢}$

= ٢٠ سم.

المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ (محيط القاعدة)

× الارتفاع الجانبي

= $\frac{١}{٢}$ × (٤ × ٢٠) × ٢٠ = ٨٠٠ سم^٢

، الحجم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × ع

= $\frac{١}{٣}$ × $(٢٠)^٢$ × ١٠ $\sqrt{٣}$ = $\frac{٤٠٠٠\sqrt{٣}}{٣}$ سم^٣

(٧) (ب) (٨) (ب) (٩) (أ)

(١٠) (جـ) (١١) (د)

(١٢)

$\because$ حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ × π $(٢)^٢$ × ١٢ = ١٦ π سم^٣

$\therefore$ حجم الماء المرتفع في الإناء الأسطواني = ١٦ π سم^٣

$\therefore$ ١٦ π = π نق^٢ × ١

$\therefore$ نق^٢ = ١٦ $\therefore$ نق = ٤ سم

$\therefore$ طول قطر قاعدة الإناء = ٤ × ٢ = ٨ سم

إجابات امتحانات الإدارات التعليمية

١ محافظة القاهرة

١ (أ)

٢ (جـ)

الحل :

∵ ح = ٢ ق جتا $\frac{ى}{٢}$ ∴ ٦ = ٢ × ٦ × جتا $\frac{ى}{٢}$

∴ جتا $\frac{ى}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ ∴ $\frac{ى}{٢}$ = ٦٠°

∴ ى = ١٢٠°

٣ (أ)

الحل :

ح = ٢ ق جتا $\frac{ى}{٢}$ ∴ ٦ = ٢ ق جتا $\frac{٩٠°}{٢}$

∴ ٦ = ٢ ق × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∴ ق = ٣ $\sqrt{٢}$ نيوتن

٤ (جـ)

الحل :

ق = ح جتا هـ

∴ ق = ٤ $\sqrt{٢}$ جتا ٤٥° = ٤ نيوتن

٥ (جـ)

الحل :

ق٢ = $\frac{١٠ \text{ جا } ٦٠°}{\text{جا } ١٥٠°}$ = ١٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن

٦ (جـ)

الحل :

ح = ق١ + ق٢

∴ ٢ أ س − ٣ ب ص = ٢ س − ٢ ص + ٤ س

− ٨ ص = ٦ س − ١٠ ص

∴ ٢ أ = ٦ ومنها أ = ٣ ، ٣ ب = ١٠ ومنها ب = $\frac{١٠}{٣}$

∴ أ − ب = ٣ − $\frac{١٠}{٣}$ = $\frac{١}{٣}$ ٦

٧ (د)

الحل :

ق١ + ق٢ + ق٣ = ٠

∴ ٤ س + ٥ ص + أ س − ٧ ص

+ ٣ س + ب ص = ٠

∴ (أ + ٧) س + (ب − ٢) ص = ٠

∴ أ + ٧ = ٠ ومنها أ = − ٧ ، ب − ٢ = ٠

ومنها ب = ٢

∴ أ + ٢ ب = − ٧ + ٢ (٢) = − ٣

٨ (ب)

الحل :

س = ٢ جتا ٠° + ٤ $\sqrt{٣}$ جتا ٣٠° + ٨ جتا ٦٠°

+ ٢ $\sqrt{٣}$ جتا ٩٠° + ٤ جتا ١٢٠° = ١٠

، ص = ٢ جا ٠° + ٤ $\sqrt{٣}$ جا ٣٠° + ٨ جا ٦٠°

+ ٢ $\sqrt{٣}$ جا ٩٠° + ٤ جا ١٢٠° = ١٠ $\sqrt{٣}$

∴ مقدار المحصلة ح = $\sqrt{١٠^٢ + (١٠\sqrt{٣})^٢}$

= ٢٠ ث.كجم

٩ (جـ)

الحل :

∵ س = ١٠ ، ص = ١٠ $\sqrt{٣}$

∴ ظا هـ = $\frac{١٠\sqrt{٣}}{١٠}$ = $\sqrt{٣}$ ∴ هـ = ٦٠°

∴ اتجاه المحصلة يميل على أ ب بزاوية قياسها ٦٠°

١٠ (ب)

الحل :

$\frac{ق}{\text{جا } ١٥٠°}$ = $\frac{٨٠}{\text{جا } ٩٠°}$ ∴ ق = ٤٠ نيوتن

١١ (جـ)

الحل :

$\frac{\text{ش}}{\text{جا } ١٢٠°}$ = $\frac{٨٠}{\text{جا } ٩٠°}$ ∴ ش = ٤٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن

١٢ (جـ)

١٣ (د)

الحل :

من هندسة الشكل

ب حـ = $\sqrt{٤٠^٢ + ٤٠^٢}$ = ٤٠ $\sqrt{٢}$ سم

∴ ء حـ = $\frac{١}{٢}$ ب حـ = ٢٠ $\sqrt{٢}$ سم

، أ ء = $\frac{١}{٢}$ ب حـ = ٢٠ $\sqrt{٢}$ سم

، Δ أ ء حـ مثلث القوى

∴ $\frac{ر}{٢٠\sqrt{٢}}$ = $\frac{٣٠}{٤٠}$ ∴ ر = ١٥ $\sqrt{٢}$ نيوتن

١٤ (أ)

الحل :

$\frac{\text{ش}}{٢٠\sqrt{٢}}$ = $\frac{٣٠}{٤٠}$ ∴ ش = ١٥ $\sqrt{٢}$ نيوتن

١٥ (جـ)

الحل :

$\frac{ق}{\text{جا } ١٥٠°}$ = $\frac{ر}{\text{جا } ٩٠°}$ = $\frac{١٨}{\text{جا } ١٢٠°}$

∴ ق = $\frac{١٨ \times \text{جا } ١٥٠°}{\text{جا } ١٢٠°}$ = ٦ $\sqrt{٣}$ نيوتن

، ر = $\frac{١٨ \times \text{جا } ٩٠°}{\text{جا } ١٢٠°}$ = ١٢ $\sqrt{٣}$ نيوتن

∴ ق + ر = ٦ $\sqrt{٣}$ + ١٢ $\sqrt{٣}$ = ١٨ $\sqrt{٣}$ نيوتن

١٦ (أ)

١٧ (جـ)

١٨ (د)

١٩ (د)

٢٠ (ب)

الحل :

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × ارتفاع الهرم

٢١ (ب)

الحل :

المساحة الكلية = مساحة الوجه الجانبي + ٢ × مساحة القاعدة

٢٢ (ب)

الحل :

٢٣ (د)

٢٤ (ب)

الحل :

المساحة الجانبية للمخروط = π ل نق

٢٥ (ب)

الحل :

المساحة الكلية للمخروط = π نق (ل + نق)

الحل

∴ طول قطر الدائرة = ٦ وحدة طول

29 (أ)

الحل

∵ حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ π نق² ع

∴ نق² = ٢٧   ∴ نق = ٣ سم

∴ مساحة القاعدة = π نق² = π × ٣² = ٩ π سم²

30 (ب)

الحل

(مرفوضة)

الحل

٢٣ (أ)

الحل :

بفرض أن :

طول ضلع القاعدة = ارتفاعه الجانبي = س سم

∴ $\frac{\text{المساحة الجانبية}}{\text{المساحة الكلية}} = \frac{\frac{1}{2} \times 4 \text{ س} \times \text{س}}{\frac{1}{2} \times 4 \text{ س} \times \text{س} + \text{س}^2}$

$= \frac{2 \text{ س}^2}{3 \text{ س}^2} = \frac{2}{3}$

٢٤ (د)

٢٥ (د)

الحل :

$\frac{1}{3} \pi$ نق$^2 \times 3 = 49 \pi$

∴ نق$^2 = 49$ ∴ نق = ٧ سم

∴ طول قوس القطاع = محيط الدائرة التي تمثل قاعدة المخروط = 2π نق $= 2 \pi \times 7 = 14 \pi$ سم

٢٦ (جـ)

٢٧ (ب)

الحل :

$\frac{22}{7}$ نق $\times 25 = 550$

∴ نق = ٧ سم

∴ ع = $\sqrt{25^2 - 7^2} = 24$ سم

∴ حجم المخروط = $\frac{1}{3} \pi$ نق^2 ع

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 49 \times 24$

= ١٢٣٢ سم^3

٢٨ (ب)

٢٩ (جـ)

الحل :

بفرض أن : طول ضلع قاعدة الهرم = س سم

، ارتفاع الهرم الجانبي = ل سم

المساحة الكلية للهرم = مساحة القاعدة + المساحة الجانبية

∴ ٧٠ = مساحة القاعدة + ٤٥

∴ مساحة القاعدة = ٢٥ سم^2

∴ س^2 = ٢٥ ∴ س = ٥ سم

، ∵ المساحة الجانبية

= $\frac{1}{2}$ محيط القاعدة

× الارتفاع الجانبي



∴ ٤٥ = $\frac{1}{2}$ × ٤ × ٥ × ل

∴ ل = ٤,٥ سم

∴ ع = $\sqrt{(4,5)^2 - (2,5)^2} = \sqrt{14}$ سم

٣٠ (د)

الحل :

س^2 − ن^2 ص^2 − ٤٩ = ٠

∴ س^2 + ص^2 = ٤٩ ∴ نق = ٧ وحدة طول

٣ محافظة الإسكندرية

١ (جـ)

الحل :

ح = $\sqrt{5^2 + 3^2 + 2 \times 5 \times 3 \times \text{جتا } 60^\circ} = 7$ نيوتن

٢ (أ)



الحل :

نق = $\sqrt{15^2 - 12^2} = 9$ سم

∴ حجم المخروط = $\frac{1}{3} \times \pi \times 9^2$

$\times 12 = 324 \pi$ سم^3

٣ (د)

الحل :

من هندسة الشكل :

أ د = $\frac{1}{2}$ ب جـ = ١٠ $\sqrt{2}$ ، ب جـ = ١٠ $\sqrt{2}$ سم

أ جـ = $\sqrt{(20\sqrt{2})^2 - (20)^2} = 20$ سم



∴ ... = ١٤ $\sqrt{3}$ نيوتن

٤ (أ)

٥ (ب)

الحل :

ع$_1$ − ع$_2$ = ٣ (١)

، ع$_1$ + ع$_2$ = ١٢ (٢)

بضرب المعادلتين (١) × (٢)

∴ (ع$_1$ − ع$_2$) (ع$_1$ + ع$_2$) = ٣٦

∴ ع$_1^2$ − ع$_2^2$ = ٣٦

٦ (جـ)

الحل :

من هندسة الشكل



أ ب = $\sqrt{(2 \text{ نق})^2 - \text{نق}^2}$

= $\sqrt{3}$ نق وحدة طول

٧ (جـ)

الحل :

ل = − جتا θ ، ك = جا θ ، حـ = − ٨

∴ نق = $\sqrt{\text{ل}^2 + \text{ك}^2 - \text{حـ}}$

= $\sqrt{\text{جتا}^2 \theta + \text{جا}^2 \theta + 8}$

= $\sqrt{1 + 8}$ = ٣ وحدة طول

ل = − جا θ ، ك = جتا θ ، جـ = −٨

∴ نق = $\sqrt{ل^2 + ك^2 - جـ}$

= $\sqrt{جا^2\theta + جتا^2\theta + ٨}$

= $\sqrt{١ + ٨}$ = ٣ وحدة طول

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × ... = ٣٦ سم^3

١٥ (جـ)

الحل :

...

(جـ)

الحل :

بفرض أن : طول ضلع قاعدة الهرم = س سم

، ارتفاع الهرم الجانبي = ل سم

الحل :

من هندسة الشكل :

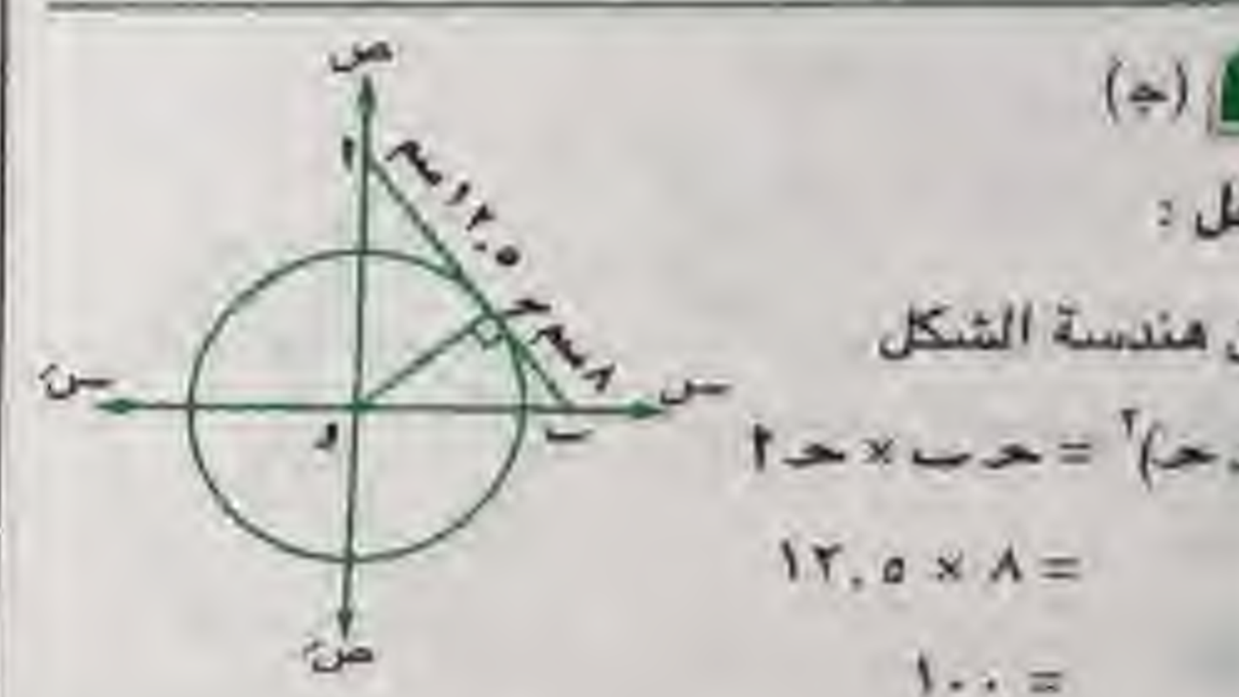
أ م = $\frac{١}{٢}$ ب جـ = ١٠$\sqrt{٢}$ ، م جـ = ١٠$\sqrt{٢}$ سم

٢٠ جـ = $\sqrt{(٢٠\sqrt{٢})^2 - (٢٠)^2}$ = ٢٠ سم

∴ ح = $\sqrt{س^2 + ص^2}$ = $\sqrt{٦٠^2 + ٢٠^2}$ = ١٠ نيوتن

١٦ (جـ)

الحل :



باستخدام قاعدة لامي

∴ $\frac{١٤}{جا ٩٠^\circ} = \frac{٧}{جا (١٨٠^\circ - \theta)}$

∴ $\frac{١٤}{١} = \frac{٧}{جا \theta}$

∴ جا θ = $\frac{٧}{١٤} = \frac{١}{٢}$ ∴ θ = ٣٠°

١٧ (جـ)

الحل :

من هندسة الشكل

(و حـ)^2 = حـ ب × حـ أ

= ٨ × ١٢,٥

= ١٠٠

∴ و حـ = ١٠ سم ∴ نق = ١٠

∴ معادلة الدائرة هي : س^2 + ص^2 = ١٠٠

١٨ (جـ)

١٩ (د)

الحل :

أ ب = $\sqrt{٣٠^2 - ٢٤^2}$ = ١٨ سم

وباستخدام قاعدة مثلث القوى

∴ $\frac{س}{٣٠} = \frac{ص}{٢٤} = \frac{٩٠}{١٨}$

∴ س = $\frac{٣٠ \times ٩٠}{١٨}$ = ١٥٠ ث.جم

، ص = $\frac{٩٠ \times ٢٤}{١٨}$ = ١٢٠ ث.جم

∴ س − ص = ١٥٠ − ١٢٠ = ٣٠ ث.جم

٢٠ (أ)

الحل :

نق = $\sqrt{(-٤ - ٠)^2 + (٣ - ٠)^2}$ = ٥ وحدة طول

∴ معادلة الدائرة هي : (س + ٤)^2 + (ص − ٣)^2 = ٢٥

٢١ (د)

الحل :

حجم الهرم المنتظم الوجوه = $\frac{\sqrt{٢}}{١٢}$ ل^3 = $\frac{\sqrt{٢}}{١٢}$ × ٢١٦

= ١٨$\sqrt{٢}$ سم^3

٢٢ (جـ)

الحل :

$\frac{ق_1 + ق_2}{ق_1 - ق_2} = \frac{٤}{٣}$ ∴ ٤ ق$_1$ − ٤ ق$_2$ = ٣ ق$_1$ + ٣ ق$_2$

∴ ٤ ق$_1$ − ٣ ق$_1$ = ٤ ق$_2$ + ٣ ق$_2$

∴ ق$_1$ = ٧ ق$_2$ ∴ $\frac{ق_1}{ق_2} = \frac{٧}{١}$

٢٣ (أ)

٢٤ (جـ)

الحل :

$\overrightarrow{ح}$ = ٥ $\overrightarrow{س}$ + ٧ $\overrightarrow{س}$ − ٥ $\overrightarrow{ص}$ = ١٢ $\overrightarrow{س}$ − ٥ $\overrightarrow{ص}$

∴ $\|\overrightarrow{ح}\|$ = $\sqrt{١٤٤ + ٢٥}$ = $\sqrt{١٦٩}$ = ١٣ وحدة قوة

٢٥ (ب)

الحل :

ح = ٢ ق جتا $\frac{ى}{٢}$ ∴ ٢ ق جتا ٣٠° = ٢٤

∴ ق = $\frac{٢٤}{٢ جتا ٣٠^\circ}$ = ٨$\sqrt{٣}$ ث.جم

٢٦ (د)

الحل :

ق$_1$ = $\frac{١٢ جا ٣٠^\circ}{جا ١٢٠^\circ}$ = ٤$\sqrt{٣}$ نيوتن

٢٧ (أ)

الحل :

س^2 + ص^2 − ١٦ = ٠ ∴ س^2 + ص^2 = ١٦

∴ المعادلة تمثل معادلة دائرة طول نصف قطرها ٤ وحدة طول

٢٨ (ب)

٢٩ (د)

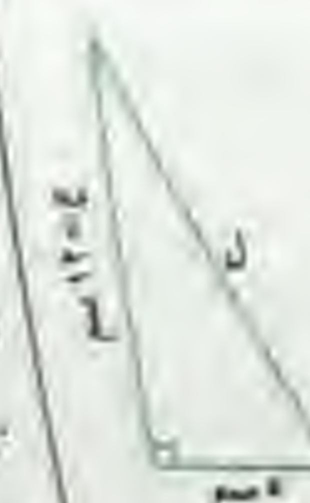
٣٠ (جـ)

٤ محافظة القليوبية

١ (جـ)

٢ (أ)

الحل :



طول ضلع قاعدة الهرم = $\sqrt{١٠٠}$

= ١٠ سم

الإرتفاع الجانبى = $\sqrt{١٢^2 + ٥^2}$

= ١٣ سم

∴ المساحة الجانبية للهرم = $\frac{١}{٢}$ (١٠ × ٤) × ١٣

= ٢٦٠ سم^2

٣ (د)

الحل :

$\overrightarrow{ح}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ + ٤ $\overrightarrow{س}$ + ٨ $\overrightarrow{ص}$ = ٦ $\overrightarrow{س}$ + ٨ $\overrightarrow{ص}$

∴ $\|\overrightarrow{ح}\|$ = $\sqrt{٣٦ + ٦٤}$ = ١٠ وحدة قوة

٤ (أ)

الحل :

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ ($\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٨ ...) = ...

= ٣٢$\sqrt{٣}$ سم^3

∴ القيمة العظمى للمحصلة = ٨$\sqrt{٢}$ + ٤$\sqrt{٢}$

= ١٢$\sqrt{٢}$ نيوتن

٦ (د)

٧ (ب)

الحل :

عندما ى = ٠° ∴ ع = ٦ + ٢ = ٨

، عندما ى = ١٨٠° ∴ ع = ٦ − ٢ = ٤

∵ ى ∈ [٠ ، ١٨٠°] ∴ ع ∈ [٤ ، ٨]

٨ (ب)

الحل :

∵ الدائرة تمس محور السينات ∴ نق = |ك|

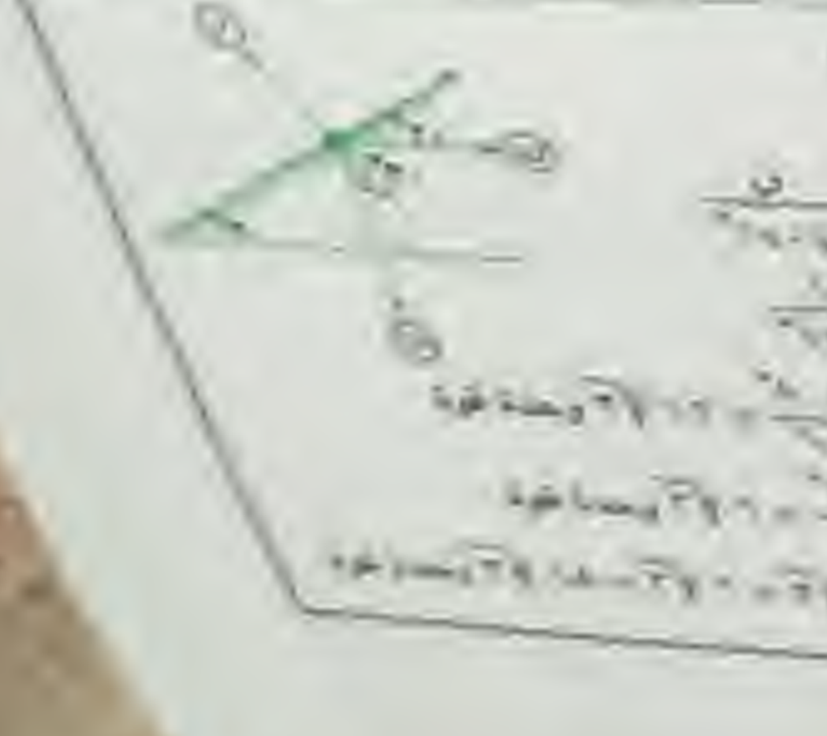
، ∵ ل = ٢ ، ك = −١

∴ نق = |−١| = ١ وحدة طول

∴ جـ = ل^2 + ك^2 − نق^2 = ...

٩ (جـ)

الحل :



...

١٠ (د)

الحل :

نق = $\sqrt{٩}$

= ٣ وحدة طول

، ١ب = $\sqrt{٥^٢ - ٣^٢}$ = ٤ وحدة طول

١١ (ب)

١٢ (جـ)

١٣ (د)

الحل :

س = ٦ $\sqrt{٢}$ جتا ٠° + ٦ $\sqrt{٢}$ جتا ٩٠° + ١٢ جتا ١٣٥° = ٠

، ص = ٦ $\sqrt{٢}$ جا ٠° + ٦ $\sqrt{٢}$ جا ٩٠° + ١٢ جا ١٣٥°

= ١٢ $\sqrt{٢}$ وحدة قوة

∴ ح = ١٢ $\sqrt{٢}$ ص

∴ المحصلة تعمل فى اتجاه الشمال

١٤ (١)

الحل :

مقدار المركبة فى اتجاه ١حـ

= ١٠ جتا ٣٠° = ٥ $\sqrt{٣}$ نيوتن

، مقدار المركبة فى اتجاه ١و

= ١٠ جا ٣٠° = ٥ نيوتن

١٥ (١)

الحل :

الشبكة تمثل مخروط محيط

قاعدته = ١٢ π سم

∴ ٢ π نق = ١٢ π

∴ نق = ٦ سم

، ∵ حجم المخروط = ٩٦ π سم^٣

∴ $\frac{١}{٣}$ × π × ٦^٢ × ع = ٩٦ π

∴ ع = ٨ سم

∴ ل (طول راسم المخروط) = $\sqrt{٦^٢ + ٨^٢}$ = ١٠ سم

∴ المساحة الجانبية للمخروط

= π نق ل = π × ٦ × ١٠ = ٦٠ π سم^٢

١٦ (ب)

الحل :

بفرض أن : ق$_١$ = ٤ ك ، ق$_٢$ = ٣ ك

، ح = $\sqrt{١٣}$ ك من وحدات القوة

، ∵ ح^٢ = ق$_١^٢$ + ق$_٢^٢$ + ٢ ق$_١$ ق$_٢$ جتا ى

∴ ١٣ ك^٢ = ١٦ ك^٢ + ٩ ك^٢ + ٢

× ٤ ك × ٣ ك × جتا ى

∴ − ١٢ = ٢٤ جتا ى ∴ جتا ى = $-\frac{١}{٢}$

∴ ى = ١٢٠°

١٧ (جـ)

الحل :

بقسمة المعادلة على ٢

∴ س^٢ + ص^٢ + ٦ س − ٨ ص = ٠

∴ ل = − ٣ ، ك = ٤

∴ م (مركز الدائرة) = (−٣ ، ٤)

١٨ (د)

الحل :

من هندسة الشكل

م ب = ٢ + ٣ = ٥ سم

، ∵ م ١ = ٣ سم ∴ ١ب = $\sqrt{٥^٢ - ٣^٢}$ = ٤ سم

، Δ م ب ١ مثلث القوى ∴ $\frac{ش}{٥} = \frac{ر}{٣} = \frac{٤٠}{٤}$

∴ ش = ٥٠ نيوتن ، ر = ٣٠ نيوتن

∴ ش + ر = ٥٠ + ٣٠ = ٨٠ نيوتن

١٩ (١)

الحل :

∵ ل = ٢ نق

∴ المساحة الكلية للمخروط = π نق (نق + ٢ نق)

= ٣ π نق^٢ وحدة مساحة

٢٠ (جـ)

الحل :

ب حـ = $\sqrt{٣٠^٢ + ٤٠^٢}$

= ٥٠ سم

، ١ء = $\frac{١}{٢}$ ب حـ = ٢٥ سم

$\frac{ش_١}{جا(٩٠° + ى)} = \frac{ش_٢}{جا(٩٠° + هـ)} = \frac{و}{جا ٩٠°}$

∴ $\frac{ش_١}{جتا ى} = \frac{ش_٢}{جتا هـ} = \frac{و}{١}$ ∴ $\frac{ش_١}{\frac{٤٠}{٥٠}} = \frac{ش_٢}{\frac{٣٠}{٥٠}} = \frac{و}{١}$

∴ ش$_١$: ش$_٢$: و = $\frac{٤}{٥}$: $\frac{٣}{٥}$: ١ بالضرب × ٥

= ٤ : ٣ : ٥

٢١ (جـ)

الحل :

طول ضلع القاعدة = $\frac{٦٤}{٤}$ = ١٦ سم

∴ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × ارتفاع الهرم

= $\frac{١}{٣}$ × (١٦)^٢ × ٣ = ٢٥٦ سم^٣

٢٢ (١)

الحل :

محصلة القوتين = ق$_١$ + ق$_٢$ + ق$_١$ − ق$_٢$ = ٢ ق$_١$

∴ قياس الزاوية بين ق$_١$ ، ٢ ق$_١$ تساوى صفر°

٢٣ (د)

الحل :

نق = $\sqrt{٥^٢ - ٤^٢}$ = ٣ سم

∴ حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^٢ ع

= $\frac{١}{٣}$ π × ٩ × ٤ = ١٢ π سم^٣

٢٤ (ب)

٢٥ (جـ)

٢٦ (د)

الحل :

[illegible]

٢٧ (١)

الحل :

مركز الدائرة [illegible] منتصف ١ب

بفرض ب (س ، ص)

[illegible]

٢٨ (ب)

٢٩ (ب)

٣٠ (د)

الحل :

نق = $\sqrt{١٦}$ = ٤ سم [illegible]

[illegible]

∴ حجم المخروط = ٩٦ π سم³

∴ $\frac{1}{3}$ × π × ٦² × ع = ٩٦ π

∵ Δ م ب أ مثلث القوى

∴ ش = ٥٠ نيوتن ، ى = ٣٠ نيوتن

∴ ش + ى = ٥٠ + ٣٠ = ٨٠ نيوتن

(١٣) (د)

الحل:

نق = $\sqrt{5^2 - 4^2}$ = ٣ سم

∴ حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ π نق² ع

= $\frac{1}{3}$ π × ٩ × ٤ = ١٢ π سم³



(د)

الحل:

نق = $\sqrt{49}$ = ٧ سم ، م (٠ ، ٠)

الدائرة م تقطع محور السينات في أ ، ب

∴ أب قطر في الدائرة

∴ أب = ٢ × ٧ = ١٤ وحدة طول

(١) (ج)

(٢) (د)

الحل:

π نق (نق + ل) = ٢١٦ π

∴ نق (نق + ١٥) = ٢١٦

∴ نق² + ١٥ نق − ٢١٦ = ٠

∴ (نق − ٩) (نق + ٢٤) = ٠

∴ نق = ٩ سم أو نق = −٢٤ (مرفوض)

∴ ع = $\sqrt{15^2 - 9^2}$ = ١٢ سم

∴ حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ π نق² ع = $\frac{1}{3}$ π × ٩² × ١٢

= ٣٢٤ π سم³



(٣) (أ)

الحل:

٥ س + ٣ ص + أ س + ٦ ص

− ١٤ س + ب ص = ٠

∴ (أ − ٩) س + (ب + ٩) ص = ٠

∴ أ − ٩ = ٠ ومنها أ = ٩

، ب + ٩ = ٠ ومنها ب = −٩

∴ أ + ب = ٩ + (−٩) = ٠

(٤) (ج)

(٥) (د)

(٦) (أ)

الحل:

بقسمة حدود المعادلة على ٢

∴ نق = ٣ وحدة طول

(٧) (ب)

الحل:

∵ معادلة الدائرة هي: (س − أ)² + (ص − ب)² = أ²

∴ ل = أ ، ك = ب ، نق = أ

∵ نق = ل

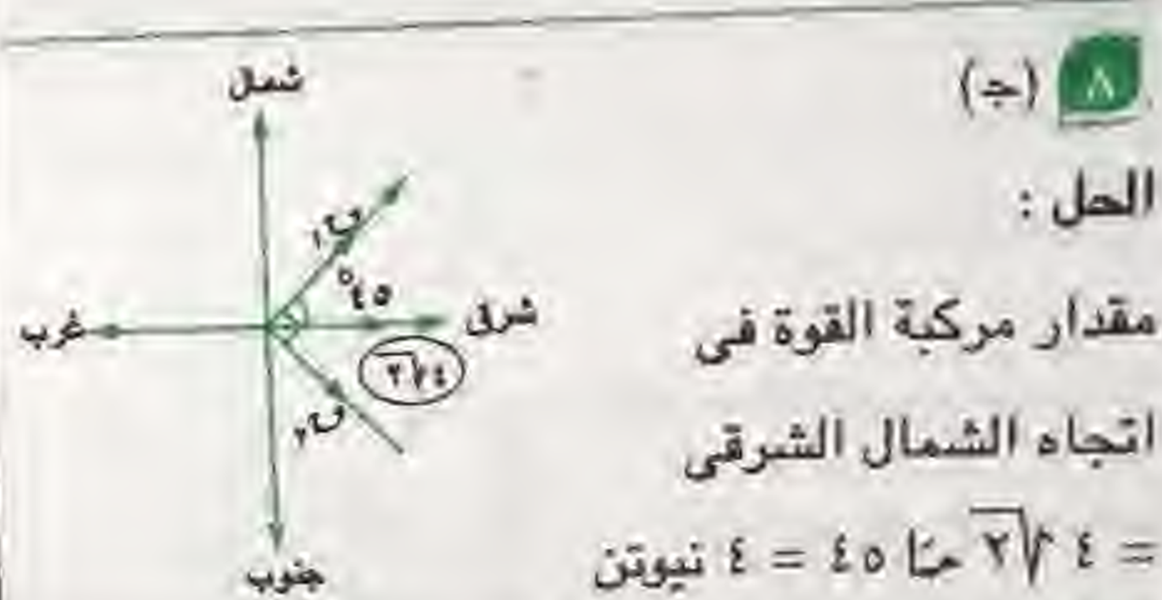
∴ الدائرة تمس محور الصادات

(٨) (ج)

الحل:

مقدار مركبة القوة في اتجاه الشمال الشرقي

= ٤$\sqrt{2}$ جتا ٤٥ = ٤ نيوتن



(٩) (د)

الحل:

∵ المحصلة تنصف الزاوية بين القوتين

∴ القوتان متساويتان في المقدار

∴ ق = ٨ ث.جم

(١٠) (ب)

الحل:

∵ المجموعة متزنة ∴ س = ٠

∴ ٧ − $\frac{1}{2}$ ق − $\frac{1}{2}$ ك = ٠

∴ ق + ك = ١٥ ⟵ (١)

، ص = ٠

∴ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ق − $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ك − $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ = ٠

∴ ق − ك = ٣ ⟵ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢)

∴ ق = ٩ ث.جم ، ك = ٦ ث.جم

∴ (ق ، ك) = (٩ ، ٦)

(١١) (ب)

الحل:

من هندسة الشكل

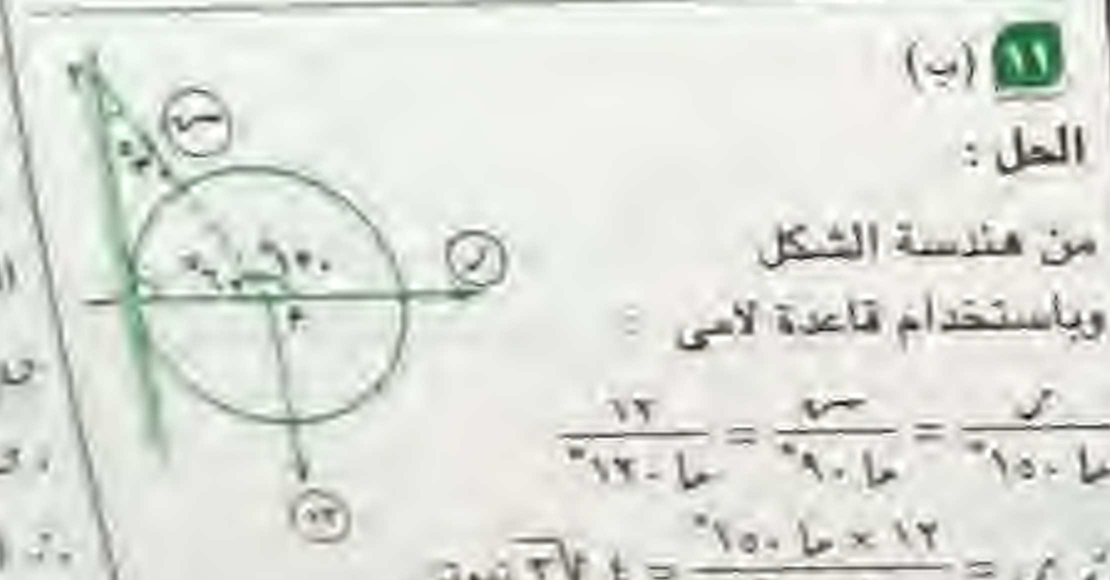
وباستخدام قاعدة لامي

$\frac{ى}{جا ١٥٠°} = \frac{ش}{جا ٩٠°} = \frac{١٢}{جا ١٢٠°}$

∴ ى = $\frac{١٢ × جا ١٥٠°}{جا ١٢٠°}$ = ٤$\sqrt{3}$ نيوتن

، ش = $\frac{١٢ × جا ٩٠°}{جا ١٢٠°}$ = ٨$\sqrt{3}$ نيوتن

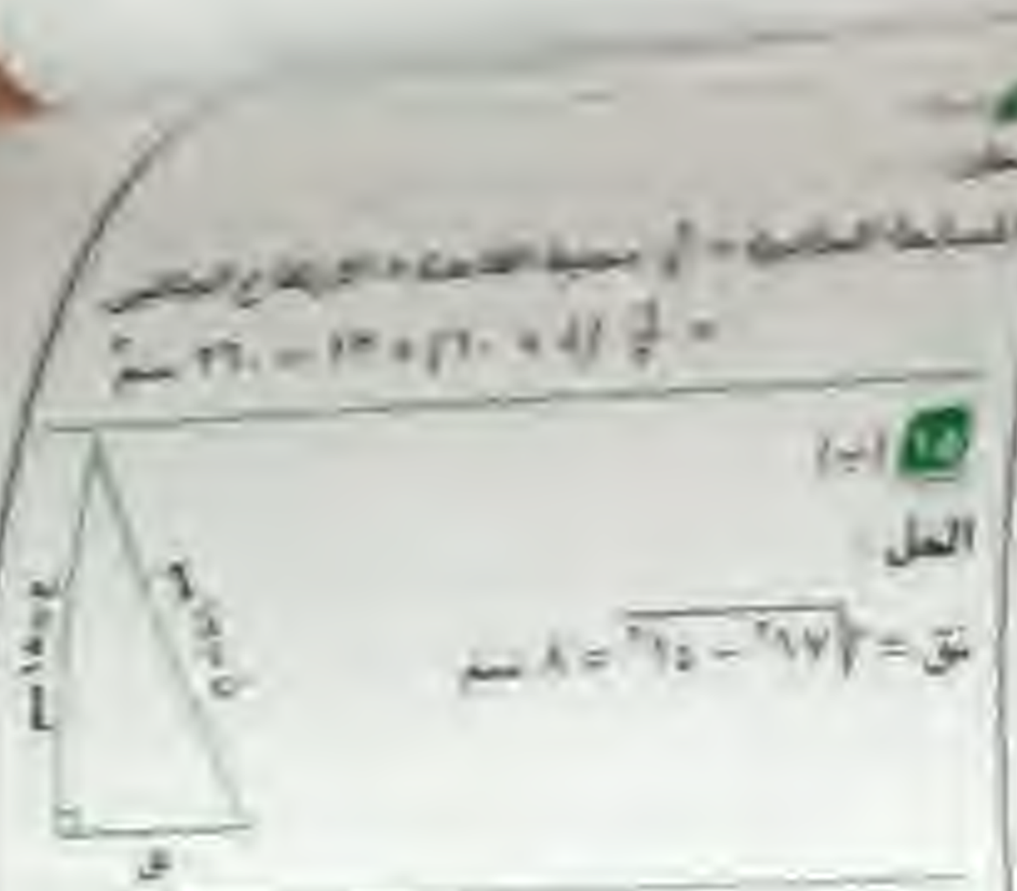
∴ (ش ، ى) = (٨$\sqrt{3}$ ، ٤$\sqrt{3}$)



(١٢) (ب)

الحل:

باستخدام قاعدة لامي



(١٥) (ب)

الحل:

نق = $\sqrt{17^2 - 15^2}$ = ٨ سم

(١٦) (أ)

(١٧) (ج)

الحل:

ع = $\sqrt{12^2 + 5^2}$ = ١٣ نيوتن

(١٨) (أ)

الحل:

(١٩) (ج)

الحل:

٢١ (د)

الحل :

باستخدام قاعدة لامي :

$\frac{ق}{جا ١٥٠°} = \frac{ش}{جا ١٢٠°} = \frac{١٨}{جا ٩٠°}$

$\therefore ق = \frac{١٨ \times جا ١٥٠°}{جا ٩٠°}$

= ٩ نيوتن

، $ش = \frac{١٨ \times جا ١٢٠°}{جا ٩٠°} = ٩\sqrt{٣}$ نيوتن

$\therefore ق + ش = ٩ + ٩\sqrt{٣}$ نيوتن

٢٢ (ب)

الحل :

من هندسة الشكل وباستخدام قاعدة لامي :

$\therefore \frac{ق}{جا ١٢٠°} = \frac{ش}{جا ١٥٠°}$

$\therefore \frac{ق}{ش} = \frac{جا ١٢٠°}{جا ١٥٠°} = \sqrt{٣}$

٢٣ (أ)

الحل :

(م) مركز الدائرة = (٧ ، ٥) ، نق = $\sqrt{١٦}$ = ٤ وحدة طول

∴ أقل بعد بين محور الصادات ونقطة على الدائرة

= ٧ − ٤ = ٣ وحدة طول

٢٤ (ب)

الحل :

[illegible]

٢٥ (أ)

الحل :

$ل = \sqrt{٢٠^٢ + ١٥^٢} = ٢٥$ سم

المساحة الجانبية للمخروط

= π نق ل = π × ١٥ × ٢٥

= ٣٧٥ π سم²

٢٦ (ب)

الحل :

$\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي = ٣٠

∴ $\frac{١}{٢}$ × محيط القاعدة × ٥ = ٣٠

∴ محيط القاعدة = ١٢ سم

٢٧ (أ)

٢٨ (د)

٢٩ (جـ)

الحل :

بفرض أن : $ق_١ > ق_٢$ $\therefore \frac{ق_١ + ق_٢}{ق_١ - ق_٢} = \frac{٧}{٣}$

$\therefore ٧ق_١ - ٧ق_٢ = ٣ق_١ + ٣ق_٢$

$\therefore ٤ق_١ = ١٠ق_٢$ $\therefore \frac{ق_١}{ق_٢} = \frac{١٠}{٤} = \frac{٥}{٢}$

٣٠ (د)

الحل :

من هندسة الشكل

وباستخدام قاعدة لامي :

$\frac{ش_١}{جا هـ} = \frac{ش_٢}{جا هـ} = \frac{٢٠٠}{جا ٩٠°}$

$\therefore \frac{ش_١}{\frac{٨٠}{١٠٠}} = \frac{ش_٢}{\frac{٦٠}{١٠٠}} = \frac{٢٠٠}{١}$

$\therefore ش_١ = ٢٠٠ \times \frac{٨٠}{١٠٠} = ١٦٠$ ث.جم

، $ش_٢ = ٢٠٠ \times \frac{٦٠}{١٠٠} = ١٢٠$ ث.جم

$\therefore ش_١ + ش_٢ = ١٦٠ + ١٢٠ = ٢٨٠$ ث.جم

٦ محافظة المنوفية

١ (جـ)

٢ (ب)

الحل :

$\|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{٣^٢ + ٤^٢} = ٥$

٣ (أ)

٤ (جـ)

الحل :

حجم الجسم الناشئ = حجم المخروط الناتج من دوران Δ أ ب حـ حول $\overleftrightarrow{أ ب}$ − حجم المخروط الناتج من دوران Δ أ ب ء حول $\overleftrightarrow{أ ب}$

$= \frac{١}{٣} \pi \times (ب حـ)^٢ \times أ ب - \frac{١}{٣} \pi (ب ء)^٢ \times أ ب$

$= \frac{١}{٣} \pi \times ٣ (٤ - ١) = ٣ \pi$ سم³

٥ (أ)

الحل :

س = ١ جتا ٠° + ٢ جتا ٦٠° + ٤$\sqrt{٣}$ جتا ١٥٠°

+ ٢$\sqrt{٣}$ جتا ٢٧٠° = ١ + ١ − ٦ + ٠ = −٤

، ص = ١ جا ٠° + ٢ جا ٦٠° + ٤$\sqrt{٣}$ جا ١٥٠°

+ ٣$\sqrt{٣}$ جا ٢٧٠° = ٠ = $\sqrt{٣}$ + ٢$\sqrt{٣}$

− ٣$\sqrt{٣}$ = صفر

$\therefore ح = \sqrt{(-٤)^٢ + ٠^٢} = ٤$ نيوتن

، $\therefore \overrightarrow{ح} = -٤ \overrightarrow{س}$ ∴ $\overrightarrow{ح}$ تعمل في اتجاه $\overrightarrow{سَ}$

$\therefore \overrightarrow{ح} = (٤ ، ١٨٠°)$

٦ (ب)

الحل :

∵ ع = ٣ سم ، ل = ٥ سم

∴ نق = $\sqrt{٥^٢ - ٣^٢}$ = ٤ سم

∴ المساحة الكلية للمخروط = π نق (ل + نق)

= π × ٤ (٥ + ٤)

= ٣٦ π سم²

٧ (ب)

الحل :

حـ = ٤ + ١ − ٩ = −٤

∴ معادلة الدائرة هي :

س² + ص² − ٤ س + ٢ ص − ٤ = ٠

٨ (جـ)

الحل :

$\overrightarrow{ق_٣} = -(\overrightarrow{ق_١} + \overrightarrow{ق_٢}) = -(-١ ، -٣) = (١ ، ٣)$

٩ (جـ)

الحل :

$ظا \theta = \frac{ق_٢ جا هـ}{ق_١ + ق_٢ جتا هـ}$

= [illegible]

∴ θ = ٩٠°

∴ المحصلة عمودية على القوة الأولى

١٠ (أ)

الحل :

[illegible]

∵ (٥ ، ٣) + (٢ ، ٦) + (−١٤ ، ب) = (−١٠ ، −١٠)

∴ (أ − ٩ ، ب + ٩) = (−١٠ ، −١٠)

∴ أ − ٩ = −١٠ ∴ أ = −١

، ب + ٩ = ١٠ ∴ ب = ١

١٩ (ب)

٢٠ (ب)

الحل :

أ حـ = $\sqrt{6^2 + 8^2}$ = ١٠ سم

، حـ ح = $\sqrt{2^2 + 6^2}$ = $2\sqrt{10}$ سم

، ∵ مجموعة القوى متزنة

∴ ص = ٠

∴ ق جا ٠° + ٥ جا هـ − ٦ $\sqrt{10}$ جا ى + ك جا ٩٠° = ٠

∴ ٠ + ٥ × $\frac{6}{10}$ − ٦ $\sqrt{10}$ × $\frac{6}{2\sqrt{10}}$ + ك = ٠

∴ ٣ − ١٨ + ك = ٠ ∴ ك = ١٥

٢١ (د)

الحل :

ب حـ = $\sqrt{3^2 + 4^2}$ = ٥ سم

∆ أ ب حـ مثلث القوى

[illegible]

٢٥ (أ)

الحل :

∵ ل = −٣ ، ك = ٦ ، حـ = ٥

∴ نق = $\sqrt{(-3)^2 + 6^2 - 5}$ = $\sqrt{40}$ = $2\sqrt{10}$ وحدة

∴ نق = $2\sqrt{10}$ × ٥ = $10\sqrt{10}$ سم

∴ مساحة سطح الخماسي المنتظم

= ٥ × ($\frac{1}{2}$ × $(10\sqrt{10})^2$ × جا $\frac{360}{5}$)

= ٢٣٧٨ سم²

٢٦ (ب)

الحل :

$\frac{ق}{جا(180° - هـ)}$ = $\frac{ك}{جا 90}$ = $\frac{8}{جا(90° + هـ)}$

∴ $\frac{ق}{جا هـ}$ = $\frac{ك}{1}$ = $\frac{8}{جتا هـ}$

∴ $\frac{ق}{0.6}$ = $\frac{ك}{1}$ = $\frac{8}{0.8}$

∴ ق = $\frac{8 \times 0.6}{0.8}$ = ٦ ث.جم

∴ ق = ٦ × ٩٨٠ = ٥٨٨٠ داين

٢٧ (أ)

الحل :

[illegible]

حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × ارتفاع الهرم

∴ مساحة القاعدة × ٤ = ٤٨

مساحة القاعدة = ٣٦ سم²

طول ضلع القاعدة = $\sqrt{36}$ = ٦ سم

فيه : م ك = $\sqrt{3^2 + 4^2}$ = ٥ سم

المساحة الجانبية = $\frac{1}{2}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

= $\frac{1}{2}$ × ٦ × ٤ × ٥

= ٦٠ سم²

$\sqrt{17^2 - 15^2}$ = ٨ سم

(ب)

(جـ)

= $\sqrt{2 + 2}$ = ٢ وحدة طول.

ظا θ = $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ = ١ ∴ θ = ٤٥°

∴ أ = (٢ ، ٤٥°)

(د)

الحل :

٧ محافظة النوبة

١ [illegible]

٢ [illegible]

الحل:

[illegible]

٣ [illegible]

٤ [illegible]

٥ [illegible]

٦ [illegible]

الحل:

∵ القوى متزنة

∴ محصلة القوتين ، تساوي في المقدار وتضادها في الاتجاه

[illegible]

٧ [illegible]

الحل:

مركبة القوة في اتجاه [illegible] = ٢٠ جا ٣٠° = ١٠ نيوتن

٨ [illegible]

الحل:

[illegible]

١٠ [illegible]

الحل:

∴ ق يمكن أن تكون ٧ نيوتن

١١ [illegible]

١٢ [illegible]

الحل:

من قاعدة لامي

∴ ق = ٢٥ نيوتن

١٣ [illegible]

الحل:

∴ ق = ١٥ نيوتن

١٤ [illegible]

الحل:

١٥ [illegible]

الحل:

من هندسة الشكل

[illegible]

١٦ [illegible]

الحل:

∵ طول ضلع القاعدة = ٦ سم

∴ طول قطر المربع [illegible]

$= 6\sqrt{2}$ سم

$= 3\sqrt{2}$ سم

$= \sqrt{46}$ سم

١٧ [illegible]

الحل:

١٨ [illegible]

الحل:

المساحة الجانبية = ٢ × مساحة الوجه الواحد

$= 2 \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \text{جا } 60^\circ\right)$

$= 12\sqrt{3}$ سم²

١٩ [illegible]

الحل:

طول راسم المخروط ل = $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ سم

٢٠ [illegible]

الحل:

من هندسة الشكل

وباستخدام قاعدة لامي

[illegible]

٢١ [illegible]

الحل:

م (٢ ، ٢) ، ن (−٣ ، −٣)

$= 6\sqrt{2}$ سم

٢٢ [illegible]

٢٣ [illegible]

الحل:

محيط قاعدة المخروط = π × ٦ = ٦π سم

∴ ٢π نق = ٦π ∴ نق = ٣ سم

٢٤ [illegible]

الحل:

بقسمة حدود المعادلة على ٢

[illegible]

∴ نق = $\sqrt{4 + 1 + 4} = 3$ وحدة طول

٢٥ [illegible]

الحل:

∵ المحصلة تؤثر في محور الصادات

∴ ص = ٠

[illegible]

٨ محافظة بورسعيد

[illegible]

٢٦ (جـ)

الحل :

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × ارتفاع الهرم

= $\frac{١}{٣}$ × $\left(\frac{١}{٢} × ٦ × ٤\right)$ × ٥ = ٢٠ سم^{٣}

٢٧ (جـ)

الحل :

س = ٥ جتا ٠° + ٤ $\sqrt{٢}$ جتا ٤٥° + ٨ جتا ٩٠° = ٩

، ص = ٥ جا ٠° + ٤ $\sqrt{٢}$ جا ٤٥° + ٨ جا ٩٠° = ١٢

∴ $\overline{ح}$ = ٩ $\overline{س}$ + ١٢ $\overline{ص}$

∴ ‖$\overline{ح}$‖ = $\sqrt{٨١ + ١٤٤}$ = ١٥ نيوتن

، ظا θ = $\frac{١٢}{٩}$ = $\frac{٤}{٣}$ ∴ θ = ٥٣ ٨°

∴ $\overline{ح}$ = (١٥ ، ٥٣ ٨°)

٢٨ (د)

الحل :

طول ضلع السداسى المنتظم = طول نصف قطر الدائرة

= ٤ سم

∴ مساحة السداسى المنتظم = $\frac{١}{٤}$ × ٦ × ٤^{٢} × ظتا $\frac{١٨٠°}{٦}$

= ٢٤ $\sqrt{٣}$ سم^{٢}

٢٩ (أ)

الحل :

(٢ $\sqrt{٣}$)^{٢} = ق^{٢} + ٢^{٢} + ٢ × ق × ٢ × جتا ٦٠°

∴ ١٢ = ق^{٢} + ٤ + ٢ ق

∴ ق^{٢} + ٢ ق − ٨ = ٠

∴ (ق + ٤) (ق − ٢) = ٠

∴ ق = −٤ (مرفوضة) أ، ق = ٢ نيوتن

٣٠ (أ)

الحل :

طول قطر الدائرة = ٣ + ٤ = ٧ سم

∴ نق = ٣.٥ سم

∴ محيط الدائرة = ٢ π × ٣.٥ = ٧ × $\frac{٢٢}{٧}$ = ٢٢ سم

٨ محافظة بورسعيد

١ (د)

الحل :

$\overline{ح}$ = ٢ $\overline{س}$ + ٣ $\overline{ص}$ + $\overline{س}$ + $\overline{ص}$

= ٣ $\overline{س}$ + ٤ $\overline{ص}$

∴ ‖$\overline{ح}$‖ = $\sqrt{٣^{٢} + ٤^{٢}}$ = ٥ نيوتن

٢ (أ)

٣ (ب)

٤ (جـ)

الحل :

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × ارتفاع الهرم

∴ ١٢ = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × ٤

∴ مساحة القاعدة = ٩ سم^{٢}

∴ طول ضلع القاعدة = ٣ سم

٥ (د)

الحل :

ق$_{١}$ = $\frac{١٢ \text{ جا } ٣٠°}{\text{جا }(٤٥° + ٣٠°)}$ = ٦ قتا ٧٥°

٦ (أ)

٧ (ب)

الحل :

∵ $\overline{ح}$ ⊥ $\overline{ق_{١}}$ ∴ ق$_{١}$ + ق$_{٢}$ جتا ى = ٠

∴ ٤ + ق جتا ١٢٠° = ٠ ق = ٨ نيوتن

٨ (أ)

الحل :

ل = $\sqrt{٦^{٢} + ٨^{٢}}$ = ١٠ سم

∴ المساحة الجانبية = π نق ل = π × ٦ × ١٠

= ٦٠ π سم^{٢}

٩ (جـ)

الحل :

س = ١٠ $\sqrt{٢}$ جتا ٤٥° − ١٠ جتا ١٢٠° + ١٠ جتا ٢٤٠° − ١٠ $\sqrt{٢}$ جتا ٣١٥° = ١٠

، ص = ١٠ $\sqrt{٢}$ جا ٤٥° − ١٠ جا ١٢٠° − ١٠ جا ٢٤٠° + ١٠ $\sqrt{٢}$ جا ٣١٥° = ٠

∴ $\overline{ح}$ = ١٠ $\overline{س}$

∴ مقدار المحصلة = ١٠ نيوتن

١٠ (د)

١١ (د)

الحل :

أجـ = $\sqrt{٣^{٢} + ٤^{٢}}$ = ٥ سم

Δ أ ب جـ مثلث القوى ∴ $\frac{ق_{١}}{٤}$ = $\frac{ق_{٢}}{٣}$ = $\frac{ق_{٣}}{٥}$

١٢ (جـ)

الحل :

نق = ٥ سم

∴ محيط الدائرة = ٢ π نق = ١٠ π سم

١٣ (جـ)

الحل :

٥ $\overline{س}$ + ٣ $\overline{ص}$ + أ $\overline{س}$ + ٦ $\overline{ص}$

= ١٤ $\overline{س}$ + ب $\overline{ص}$

= (١٠ $\sqrt{٢}$ جتا ١٣٥°) $\overline{س}$ + (١٠ $\sqrt{٢}$ جا ١٣٥°) $\overline{ص}$

∴ (أ − ٩) $\overline{س}$ + (ب + ٩) $\overline{ص}$

= −١٠ $\overline{س}$ + ١٠ $\overline{ص}$

∴ أ − ٩ = −١٠ ∴ أ = −١

، ب + ٩ = ١٠ ∴ ب = ١

∴ أ + ب = −١ + ١ = ٠

١٤ (د)

الحل :

طول حرف الهرم = $\frac{٩}{٣}$ = ٣ سم

المساحة الكلية للهرم المنتظم الوجوه

= مساحة الوجه الواحد × ٤ = $\frac{١}{٢}$ × ٣ × ٣ × جا ٦٠° × ٤ = ٩ $\sqrt{٣}$ سم^{٢}

١٥ (أ)

الحل :

باستخدام قاعدة لامى

$\frac{ق}{\text{جا } ٩٠°}$ = $\frac{\frac{١}{٢} ق}{\text{جا }(١٨٠° − هـ)}$ ∴ $\frac{ق}{١}$ = $\frac{\frac{١}{٢} ق}{\text{جا هـ}}$

∴ جا هـ = $\frac{١}{٢}$ ∴ هـ = ٣٠°

١٦ (د)

الحل :

٢ π نق = ٦ π ∴ نق = ٣ سم

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

∴ ٢٧ π = $\frac{١}{٣}$ × π × ٣^{٢} × ع

ع = ٩ سم

١٧ (د)

الحل :

بفرض أن طول ضلع قاعدة الهرم = ل وحدة طول

$\frac{\text{حجم الهرم قبل أن يتضاعف طول الضلع}}{\text{حجم الهرم بعد أن يتضاعف طول الضلع}}$ = $\frac{\frac{١}{٣} ل^{٢} × ع}{\frac{١}{٣} (٢ ل)^{٢} × ع}$

= $\frac{ل^{٢}}{٤ ل^{٢}}$ = $\frac{١}{٤}$

١٨ (د)

الحل :

س = ١٥ جتا ٠° − ٥ $\sqrt{٣}$ جتا ٣٠° − ٥ $\sqrt{٣}$ جتا ٩٠°

+ ١٥ جتا ١٢٠° = ٠

، ص = ١٥ جا ٠° − ٥ √٣ جا ٣٠° − ٥ √٣ جا ٩٠°
+ ١٥ جا ١٢٠° = ٠

∴ ح = صفر نيوتن

١٩ (ب)

٢٠ (أ)

الحل :

المساحة الكلية للمخروط = π نق (ل + نق)

∴ ٩٦ π = π نق (١٠ + نق)

∴ نق^2 + ١٠ نق − ٩٦ = ٠

∴ (نق − ٦) (نق + ١٦) = ٠

∴ نق = ٦ سم أ، نق = −١٦ (مرفوضة)

٢١ (د)

٢٢ (ب)

٢٣ (ب)

الحل :

$\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع = ٨ √٣

∴ $\frac{1}{3}$ ($\frac{1}{4}$ × ٦ × س^2 × ظتا $\frac{\pi}{6}$) × ٤ = ٨ √٣

∴ س^2 = ٤ ∴ س = ٢

∴ محيط القاعدة = ٢ × ٦ = ١٢ سم

٢٤ (جـ)

شمال
غرب
شرق
جنوب
٣٠°
٣√٥
ق٢
ق١

الحل :

مقدار المركبة

فى اتجاه الشرق

ق١ = ٥ √٣ جا ٣٠°

= $\frac{5}{2}$ √٣ نيوتن

٢٥ (أ)

الحل :

نق = ٤ وحدة طول ، م = (−٤ ، ٤)

∴ حـ = ١٦ + ١٦ − ١٦ = ١٦

∴ معادلة الدائرة هى

س^2 + ص^2 + ٨ س − ٨ ص + ١٦ = ٠

٢٦ (جـ)

٢ ق جتا ٤٥° = ٨

∴ ق = $\frac{٤}{\text{جتا } 45°}$ = ٤ √٢ نيوتن

٢٧ (جـ)

الحل :

$\frac{1}{3}$ × ٤ × ع = ١٢ ∴ ع = ٩ سم

٢٨ (ب)

٢٩ (ب)

الحل :

باستخدام قاعدة لامى :

∴ $\frac{\text{ق}}{\text{جا } 150°}$ = $\frac{\text{ك}}{\text{جا } 90°}$ = $\frac{6}{\text{جا } 120°}$

∴ ق = $\frac{6 \times \text{جا } 150°}{\text{جا } 120°}$ = ٢ √٣ ث.كجم

، ك = $\frac{6 \times \text{جا } 90°}{\text{جا } 120°}$ = ٤ √٣ ث.كجم

∴ ك + ق = ٢ √٣ + ٤ √٣ = ٦ √٣ ث.كجم

٣٠ (جـ)

٩ محافظة كفر الشيخ

١ (جـ)

الحل :

ح = ٢ س + ٢ ص + س + ص

= ٣ س + ٤ ص

∴ ‖ح‖ = √(٣^2 + ٤^2) = ٥ وحدة قوة

٢ (د)

٣ (أ)

الحل :

٢ ق جتا $\frac{90°}{2}$ = ٦ ∴ ٢ ق × $\frac{1}{\sqrt{2}}$ = ٦

∴ ق = ٣ √٢

٤ (ب)

٥ (جـ)

٦ (د)

الحل :

طول ضلع القاعدة = $\frac{36}{4}$ = ٩ سم

∴ حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{1}{3}$ × (٩)^2 × ١٠ = ٢٧٠ سم^3

٧ (د)

الحل :

ق١ = $\frac{\text{١٢ جا } 30°}{\text{جا } (45° + 30°)}$ = ٦ قتا ٧٥°

٨ (جـ)

الحل :

نق = √٢٥ = ٥ وحدة طول

∴ محيط الدائرة = ٢ π × ٥ = ١٠ π وحدة طول

٩ (جـ)

الحل :

ق = √(٨^2 + ١٥^2) = ١٧ نيوتن

١٠ (أ)

الحل :

مساحة الوجه الواحد = $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ سم^2

∴ $\frac{1}{2}$ ل^2 × جا ٦٠° = $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

∴ $\frac{1}{2}$ ل^2 × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

∴ ل^2 = ٩ ∴ ل = ٣ سم

١١ (أ)

١٢ (ب)

١٣ (د)

١٤ (أ)

ع
ل = ٢٥
نق = ٧ سم

الحل :

ع = √((٢٥)^2 − (٧)^2) = ٢٤ سم

حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ π نق^2 ع

= $\frac{1}{3}$ π × ٤٩ × ٢٤

= ٣٩٢ π سم^3 = ٣٩٢ × $\frac{22}{7}$

= ١٢٣٢ سم^3

١٥ (أ)

الحل :

|٨ − ١٣| ≤ ح ≤ ٨ + ١٣ ∴ ٥ ≤ ح ≤ ٢١

∴ القيمتان العظمى والصغرى على الترتيب ٢١ ، ٥ نيوتن

١٦ (جـ)

ع = ٨ سم
ل
نق = ٦ سم

الحل :

ل = √(٦^2 + ٨^2) = ١٠ سم

∴ المساحة الجانبية للمخروط

= π نق ل = π × ٦ × ١٠

= ٦٠ π سم^2

١٧ (أ)

١٨ (ب)

الحل :

∵ الدائرة تمس محور السينات

∴ نق = |٣| = ٣ وحدة

∴ معادلة الدائرة هى (س − [illegible])^2 + (ص − ٣)^2 = ٩

∴ معادلة الدائرة هى : (س − ٤)^2 + (ص − ٣)^2 = ٩

١٩ (أ)

الحل :

٥ ق + ٣ ق = ٤٠ ∴ ق = ٥

∴ القوتان ٢٥ ، ١٥ نيوتن

∴ القيمة الصغرى للمحصلة = ٢٥ − ١٥ = ١٠ نيوتن

٢٠ (ب)

الحل :

π نق (ل + نق) = ٦١٦ π ∴ نق (٣٠ + نق) = ٦١٦

∴ نق^2 + ٣٠ نق − ٦١٦ = ٠

∴ (نق − ١٤) (نق + ٤٤) = ٠

∴ نق = ١٤ سم.

أو نق = −٤٤ (مرفوض)

٢١ (أ)

الحل :

٥ $\overline{س}$ + ٣ $\overline{ص}$ + أ $\overline{س}$ + ٦ $\overline{ص}$

− ١٤ $\overline{س}$ + ب $\overline{ص}$

= (١٠ $\sqrt{2}$ جتا ١٣٥°) $\overline{س}$ + (١٠ $\sqrt{2}$ جا ١٣٥°) $\overline{ص}$

∴ (أ − ٩) $\overline{س}$ + (ب + ٩) $\overline{ص}$

= − ١٠ $\overline{س}$ + ١٠ $\overline{ص}$

∴ أ − ٩ = −١٠ ∴ أ = −١

، ب + ٩ = ١٠ ∴ ب = ١

∴ (أ ، ب) = (−١ ، ١)

٢٢ (جـ)

الحل :



٢ π نق = ٨٨

∴ ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × نق = ٨٨

∴ نق = ١٤ سم

∴ ل = $\sqrt{١٤^2 + ٢٠^2}$ = ٢ $\sqrt{١٤٩}$ سم

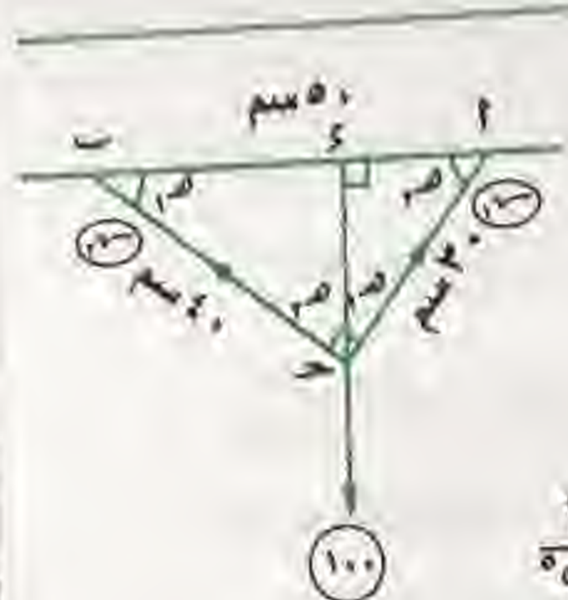
∴ المساحة الجانبية = π نق ل

= $\frac{٢٢}{٧}$ × ١٤ × ٢ $\sqrt{١٤٩}$

≃ ١٠٧٤ سم^2

٢٣ (د)

الحل :



من هندسة الشكل

وباستخدام قاعدة لامى :

∴ $\frac{ش_1}{جا هـ_2} = \frac{ش_2}{جا هـ_1} = \frac{١٠٠}{جا ٩٠°}$

∴ $\frac{ش_1}{\frac{٤٠}{٥٠}} = \frac{ش_2}{\frac{٣٠}{٥٠}} = \frac{١٠٠}{١}$

∴ ش$_1$ = ١٠٠ × $\frac{٤٠}{٥٠}$ = ٨٠ نيوتن

، ش$_2$ = ١٠٠ × $\frac{٣٠}{٥٠}$ = ٦٠ نيوتن

∴ ش$_1$ + ش$_2$ = ١٤٠ نيوتن

٢٤ (ب)

الحل :

∵ مركز الدائرة م = (٦ ، −٣)

، نق = $\sqrt{٣٦ + ٩ - ٢٠}$ = ٥ وحدة طول

∴ صورة مركز الدائرة بانتقال (س + ٢ ، ص − ٢)

هى م = (٨ ، −٥)

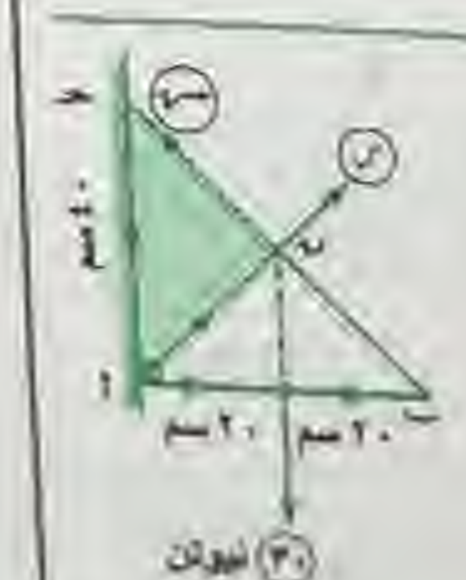
، معادلة الدائرة الناتجة من الانتقال هى :

(س − ٨)^2 + (ص + ٥)^2 = ٢٥

٢٥ (جـ)

٢٦ (د)

الحل :



من هندسة الشكل :

ب جـ = ٤٠ $\sqrt{2}$ سم

∴ ء جـ = ٢٠ $\sqrt{2}$ سم

، أ ء = ٢٠ $\sqrt{2}$ سم

∆ أ ء جـ هو مثلث القوى

∴ $\frac{ق}{٢٠\sqrt{2}} = \frac{ش}{٢٠\sqrt{2}} = \frac{٣٠}{٤٠}$

∴ ق = ش = $\frac{٢٠\sqrt{2} \times ٣٠}{٤٠}$ = ١٥ $\sqrt{2}$ نيوتن

٢٧ (أ)

الحل :

$\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع = ٤٨٠

∴ $\frac{1}{3}$ × (١٢)^2 × ع = ٤٨٠ ∴ ع = ١٠ سم

٢٨ (جـ)

٢٩ (د)

٣٠ (جـ)

الحل :

٧ − ٣ < ق < ٧ + ٣ ∴ ٤ < ق < ١٠

∴ ق يمكن أن تكون ٥

١٠ محافظة الأقصر

١ (ب)

٢ (ب)

الحل :



∴ ع = $\sqrt{(٢ ق)^2 - ق^2}$

= $\sqrt{٣}$ ق وحدة قوة

٣ (د)

الحل :

٤ $\overline{س}$ + ٥ $\overline{ص}$ + أ $\overline{س}$ − ٧ $\overline{ص}$

+ ٣ $\overline{س}$ + ب $\overline{ص}$ = $\overline{0}$

∴ (أ + ٧) $\overline{س}$ + (ب − ٢) $\overline{ص}$ = $\overline{0}$

∴ أ + ٧ = ٠ ∴ أ = −٧

، ب − ٢ = ٠ ∴ ب = ٢

∴ أ + ٢ ب = −٧ + ٤ = −٣

٤ (د)

الحل :



ب جـ = $\sqrt{(٦٠)^2 + (٤٥)^2}$

= ٧٥ سم

وبتطبيق قاعدة لامى

$\frac{ش_1}{جا هـ_1} = \frac{ش_2}{جا هـ_2} = \frac{١٥٠}{جا ٩٠°}$

∴ $\frac{ش_1}{\frac{٤٥}{٧٥}} = \frac{ش_2}{\frac{٦٠}{٧٥}} = \frac{١٥٠}{١}$

∴ ش$_1$ = ١٥٠ × $\frac{٤٥}{٧٥}$ = ٩٠ ث جم

، ش$_2$ = ١٥٠ × $\frac{٦٠}{٧٥}$ = ١٢٠ ث جم

∴ ش$_2$ − ش$_1$ = ١٢٠ − ٩٠ = ٣٠ ث جم

٥ (جـ)

٦ (د)

الحل :

أ ب = $\sqrt{٣٠^2 - ٢٤^2}$ = ١٨ سم

∆ أ ب جـ مثلث القوى

∴ $\frac{ش}{٣٠} = \frac{ق}{٢٤} = \frac{٩٠}{١٨}$

∴ ش = $\frac{٩٠ \times ٣٠}{١٨}$ = ١٥٠ ث جم

، ق = $\frac{٩٠ \times ٢٤}{١٨}$ = ١٢٠ ث جم

∴ ش − ق = ١٥٠ − ١٢٠ = ٣٠ ث جم

٧ (أ)

الحل :



∵ ∆ جـ م ب قائم

ق (∠ جـ م ب)

= ٩٠°

∴ ب جـ = $\sqrt{٣٠^2 + ٤٠^2}$ = ٥٠ سم

∴ س = ٣٥ جتا ٠° + ١٠ $\sqrt{٢}$ جتا ٤٥°

+ ق جتا ٩٠° + ٢٥ جتا (٩٠° + هـ)

= ٣٥ + ١٠ + ٠ − ٢٥ جا هـ

= ٤٥ − ٢٥ × $\frac{٣٠}{٥٠}$ = ٣٠

، ص = ٣٥ جا ٠° + ١٠ $\sqrt{٢}$ جا ٤٥°

+ ق جا ٩٠° + ٢٥ جا (٩٠ + هـ)

= ٠ + ١٠ + ق + ٢٥ جتا هـ

= ١٠ + ق + ٢٥ × $\frac{٤٠}{٥٠}$ = ٣٠ + ق

∴ $\sqrt{(٣٠)^٢ + (٣٠ + ق)^٢}$ = ٥٠

∴ $(٣٠ + ق)^٢$ = ١٦٠٠

∴ ٣٠ + ق = ٤٠ ومنها ق = ١٠ ث.جم

أ، ٣٠ + ق = − ٤٠ ∴ ق = − ٧٠ (مرفوض)

٨ (ب)

الحل :

ح = $\sqrt{١٦ + ق^٢ + ٢ × ٤ × ق × جتا ١٢٠°}$

= $\sqrt{١٦ + ق^٢ − ٤ ق}$

= $\sqrt{ق^٢ − ٤ ق + ١٦}$

عندما : ق = ١

∴ ح = $\sqrt{١ − ٤ + ١٦}$ = $\sqrt{١٣}$ وحدة قوة

عندما : ق = ٢

∴ ح = $\sqrt{٤ − ٨ + ١٦}$ = $\sqrt{١٢}$ وحدة قوة

عندما : ق = ٣

∴ ح = $\sqrt{٩ − ١٢ + ١٦}$ = $\sqrt{١٣}$ وحدة قوة

عندما ق = ٤

∴ ح = $\sqrt{١٦ − ١٦ + ١٦}$ = ٤

∴ المحصلة أصغر ما يمكن عندما ق = ٢

٩ (د)

١٠ (جـ)

الحل :

بتطبيق قاعدة لامى :

∴ $\frac{ق}{جا ١٥٠°} = \frac{١٠٠}{جا ١٢٠°}$

∴ ق = $\frac{١٠٠ × جا ١٥٠°}{جا ١٢٠°} = \frac{١٠٠}{\sqrt{٣}}$ نيوتن

١١ (ب)

الحل :

$\frac{ح_١}{ح_٢} = \frac{\sqrt{ق^٢ + ٣ ق^٢}}{\sqrt{ق^٢ + ٣ ق^٢ + ٢ × ق × \sqrt{٣} ق × جتا ١٥٠°}}$

$= \frac{\sqrt{٤ ق^٢}}{\sqrt{٤ ق^٢ − ٣ ق^٢}} = \frac{٢ ق}{ق} = ٢$

∴ $ح_١ = ٢ ح_٢$

١٢ (جـ)

الحل :

ح = ٢ $\overline{ص}$

، س = ق جتا ٠° + ٦ جتا ٩٠°

+ ٤ $\sqrt{٢}$ جتا ١٣٥°

+ ٥ $\sqrt{٢}$ جتا ٢٢٥° + ك جتا ٢٧٠°

= ق + ٠ − ٤ − ٥ + ٠ = ق − ٩

، ص = ق جا ٠° + ٦ جا ٩٠° + ٤ $\sqrt{٢}$ جا ١٣٥°

+ ٥ $\sqrt{٢}$ جا ٢٢٥° + ك جا ٢٧٠°

= ٠ + ٦ + ٤ − ٥ − ك = ٥ − ك

∴ ح = (ق − ٩) $\overline{س}$ + (٥ − ك) $\overline{ص}$

∴ ق − ٩ = ٠ ، ومنها ق = ٩ نيوتن

، ٥ − ك = ٢ ومنها

ك = ٣ نيوتن

∴ ق − ك = ٩ − ٣ = ٦ نيوتن

١٣ (جـ)

الحل :

$(٢ ق − ٥)^٢ + (ق + ٢)^٢ = (٣ \sqrt{٥})^٢$

∴ ٤ ق² − ٢٠ ق + ٢٥ + ق² + ٤ ق + ٤ − ٤٥ = ٠

∴ ٥ ق² − ١٦ ق − ١٦ = ٠

∴ (ق − ٤) (٥ ق + ٤) = ٠

∴ ق = ٤ نيوتن أو ق = $\frac{−٤}{٥}$ (مرفوضة)

١٤ (ب)

الحل :

Δ م أ حـ هو مثلث القوى :

∴ $\frac{\frac{١}{٢} و}{م حـ} = \frac{و}{أ حـ}$

∴ $\frac{أ حـ}{م حـ}$ = ٢

∴ أ حـ = ٢ م حـ

، ∵ م منتصف $\overline{ب حـ}$ ∴ ب حـ = أ حـ

∴ ق (∠ب أ حـ) = ٤٥°

١٥ (جـ)

الحل :

من هندسة الشكل

وبتطبيق قاعدة لامى :

∴ $\frac{ش_١}{جا (١٨٠° − هـ)}$

$= \frac{ش_٢}{جا ٩٠°} = \frac{و}{جا (٩٠° + هـ)}$

∴ $\frac{ش_١}{جا هـ} = \frac{ش_٢}{١} = \frac{و}{جتا هـ}$

∴ $\frac{ش_١}{\frac{٤}{٥}} = \frac{ش_٢}{١} = \frac{و}{\frac{٣}{٥}}$

∴ $ش_١ = \frac{\frac{٤}{٥} × و}{\frac{٣}{٥}} = \frac{٤}{٣}$ و

، $ش_٢ = \frac{و}{\frac{٣}{٥}} = \frac{٥}{٣}$ و

∴ $ش_١ + ش_٢ = \frac{٤}{٣}$ و + $\frac{٥}{٣}$ و = ٣ و ث كجم

١٦ (أ)

١٧ (د)

الحل :

طول ضلع القاعدة = $\frac{٣٦}{٤}$ = ٩ سم

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × ارتفاع الهرم

= $\frac{١}{٣}$ × ٩² × ١٠ = ٢٧٠ سم³

١٨ (ب)

الحل :

نق = $\sqrt{٢٦^٢ − ٢٤^٢}$ = ١٠ سم

∴ مساحة القاعدة = π نق²

= π × ١٠²

= ١٠٠ π سم²

١٩ (ب)

الحل :

حجم نصف الكرة = $\frac{١}{٢} × \frac{٤}{٣}$ π نق³

= $\frac{٢}{٣}$ π نق³ وحدة حجم

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق² ع

∴ $\frac{١}{٣}$ π نق² ع = $\frac{٢}{٣}$ π نق³

∴ ع = ٢ نق

٢٠ (أ)

الحل :

ل = ٢ ، ك = ب ، نق = $\sqrt{ب^٢}$ = |ب|

، ∵ نق = |ك| ∴ الدائرة تمس محور السينات

٢٨ (أ)

٢٩ (جـ)

الحل

٢١ (د)

الحل :

∵ حجم المخروط = $\frac{1}{3}\pi$ نق^{2} ع

∴ $\frac{1}{3}\pi$ نق^{2} × ٣ = ٤٩ π ∴ نق = ٧ سم

∴ طول قوس القطاع = محيط الدائرة التى تمثل قاعدة المخروط = ٢ π × ٧ = ١٤ π سم

٢٢ (أ)



الحل :

نق = $\frac{1}{3}\sqrt{ل^{2} - \left(\frac{1}{2} ل\right)^{2}}$

= $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ل

$\frac{\text{حجم الهرم الثلاثى المنتظم}}{\text{حجم أكبر مخروط يمكن وضعه داخل الهرم}}$

= $\frac{\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} ل^{2} \times ع}{\frac{1}{3} \times \pi \, نق^{2} \times ع}$ = $\frac{\frac{\sqrt{3}}{4} ل^{2}}{\pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{6} ل\right)^{2}}$ = $\frac{\frac{\sqrt{3}}{4} ل^{2}}{\pi \times \frac{3}{36} ل^{2}}$

= $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$

٢٣ (ب)

الحل :

طول الحرف = $\frac{18}{6}$ = ٣ سم

حجم الهرم الثلاثى المنتظم الوجوه

= $\frac{\sqrt{2}}{12}$ ل^{3} = $\frac{\sqrt{2}}{12}$ × ٢٧ = $\frac{9\sqrt{2}}{4}$ سم^{3}

٢٤ (د)

الحل :

نق = $\frac{|3 \times 1 + 4 \times 2 + 9|}{\sqrt{9 + 16}}$ = $\frac{20}{5}$ = ٤ وحدة طول

، ل = −١ ، ك = −٢ ∴ حـ = ١ + ٤ − ١٦ = −١١

معادلة الدائرة هى

س^{2} + ص^{2} − ٢ س − ٤ ص − ١١ = ٠

٢٥ (ب)

الحل :

د$_1$: (س + ٢)^{2} + ص^{2} = ١

∴ م$_1$ = (−٢ ، ٠) ، نق$_1$ = ١ وحدة طول

د$_2$: س^{2} + ص^{2} − ٢ س − ٨ ص − ١٩ = ٠

∴ م$_2$ = (١ ، ٤) ، حـ = −١٩

∴ نق$_2$ = $\sqrt{1 + 16 + 19}$ = ٦ وحدة طول

∵ م$_1$ م$_2$ = $\sqrt{(-2 - 1)^{2} + (0 - 4)^{2}}$ = ٥ وحدة

∴ م$_1$ م$_2$ = نق$_2$ − نق$_1$

∴ الدائرتان متماستان من الداخل

٢٦ (جـ)



الحل :

حجم الجسم الناتج

= ٢ حجم مخروط ارتفاعه $\frac{1}{2}$ ل

وطول نصف قطر قاعدته $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ل

= ٢ × $\left(\frac{1}{3}\pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} ل\right)^{2}\right)$ × $\frac{1}{2}$ ل

= $\frac{1}{4}\pi$ ل^{3} وحدة حجم

٢٧ (أ)



الحل :

مساحة المعين أ ب حـ ء

= ٢ × مساحة Δ أ ب ء

= ٢ × $\frac{\sqrt{3}}{4}$ × ٦^{2}

= ١٨ $\sqrt{3}$ سم^{2}

∴ حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ × ١٨ $\sqrt{3}$ × ١٢ = ٧٢ $\sqrt{3}$ سم^{3}

٢٨ (أ)

الحل :

$\frac{1}{3}$ مساحة الشكل السداسى × ارتفاع الهرم

= حجم الهرم

∴ $\frac{1}{3}$ × $\left(\frac{1}{4} \times 6 \times س^{2} \text{ ظتا } \frac{180^\circ}{6}\right)$ × ٤ = ٨ $\sqrt{3}$

∴ ٢ س^{2} × $\sqrt{3}$ = ٨ $\sqrt{3}$

∴ س^{2} = ٤

∴ س = ٢ سم ويرفض السالب

∴ محيط القاعدة = ٢ × ٦ = ١٢ سم

٢٩ (جـ)

الحل :

معادلة الدائرة هى : س^{2} + ص^{2} = ١٦

∴ نق = $\sqrt{16}$ = ٤ وحدة طول

∴ مساحة سطح المضلع = $\frac{16}{2}$ × ٤^{2} × جا $\left(\frac{360}{16}\right)$

= ٤٨ وحدة مربعة

٣٠ (د)



الحل :

من هندسة الشكل

أ ب = $\sqrt{4\, نق^{2} - نق^{2}}$

= $\sqrt{3}$ نق وحدة طول

النموذج الأول



امتحان إلكترونى ١

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ مخروط قائم طول راسمه يساوى طول قطر قاعدته فإن مساحته الكلية ....

أ) ٤ π نق^{٢} ب) ٣ π نق^{٢}

جـ) ٣ π نق^{٣} د) ٤ π نق^{٣}

٢ إذا كانت : أ ، ب ، حـ ثلاث نقط تعين مستوى فإن ....

أ) أب = ب حـ = أ حـ ب) أب + ب حـ = أ حـ

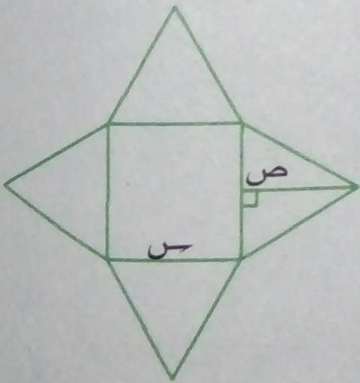
جـ) أب + ب حـ < أ حـ د) أب + ب حـ > أ حـ

٣ قوتان متساويتان فى المقدار محصلتهما ٣ نيوتن وقياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{٣}$ فإن مقدار كل منهما يساوى .... نيوتن.

أ) $\sqrt{٣}$ ب) ٣ جـ) $\frac{٣}{٢}$ د) ٣ $\sqrt{٣}$

٤ الشكل المقابل يمثل شبكة هرم رباعى منتظم ارتفاعه (ع)

فإن العلاقة بين س ، ص ، ع هى ....



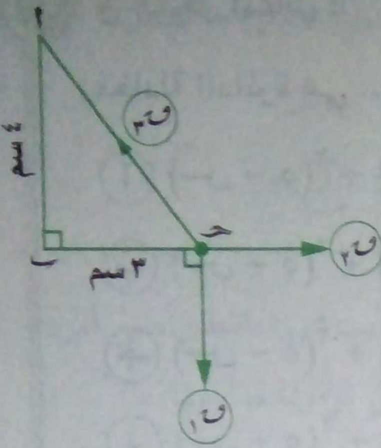
أ) س^{٢} + ص^{٢} = ع^{٢}

ب) س^{٢} + ع^{٢} = ص^{٢}

جـ) $\left(\frac{س}{٢}\right)^{٢}$ + ع^{٢} = ص^{٢}

د) $\left(\frac{س}{٢}\right)^{٢}$ + ص^{٢} = ع^{٢}

٥ إذا كان الشكل المقابل يوضح اتزان جسم تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية فى نقطة مقاديرها $ق_١$ ، $ق_٢$ ، $ق_٣$ نيوتن وأضلاع المثلث القائم توازى خطوط عمل هذه القوى وفى ترتيب دورى واحد فإن : $ق_١$: $ق_٢$: $ق_٣$ = ...



(أ) ٣ : ٤ : ٥ (ب) ٣ : ٥ : ٤

(جـ) ٤ : ٥ : ٣ (د) ٤ : ٣ : ٥

---

٦ أ ب حـ ء هـ و شكل سداسى منتظم ، أثرت القوى ٢ ، ٤ $\sqrt{٣}$ ، ٨ ، ٢ $\sqrt{٣}$ ، ٤ ث.كجم فى الاتجاهات $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أحـ}$ ، $\overleftarrow{أء}$ ، $\overleftarrow{أهـ}$ ، $\overleftarrow{أو}$ على الترتيب.

أوجد المحصلة مقدارًا واتجاهًا.

---

٧ هرم رباعى منتظم حجمه ٤٠٠ سم^٣ وارتفاعه ١٢ سم فإن مساحته الجانبية = ... سم^٢

(أ) ٢٤٠ (ب) ٢٦٠ (جـ) ٣٠٠ (د) ٣٦٠

---

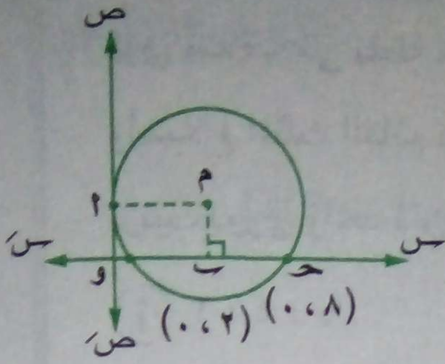
٨ مخروط دائرى قائم مساحة قاعدته ٣٦ π سم^٢ ، وطول راسمه ١٠ سم.

أوجد :

(١) مساحته الجانبية. (٢) مساحته الكلية.

(٣) حجمه.

٩ في الشكل المقابل :



معادلة الدائرة هي ....

(أ) $(س - ٥)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ٢٥$

(ب) $(س + ٥)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ٣٦$

(جـ) $(س - ٥)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ٣٦$

(د) $(س + ٥)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ٢٥$

---

١٠ قوتان مقداراهما ٦ ، ق ث.كجم تؤثران في نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٣٥°

إذا كان خط عمل المحصلة يميل بزاوية قياسها ٤٥° على خط عمل القوة التي مقدارها ق

فإن مقدار المحصلة = ... ث.كجم

(أ) ٦ (ب) $٦\sqrt{٢}$ (جـ) $٦\sqrt{٣}$ (د) ١٠

---

١١ وضع جسم وزنه (و) نيوتن على مستوى يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ الجسم في حالة توازن بتأثير قوة مقدارها ٣٦ نيوتن تعمل في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى. احسب مقدار وزن الجسم ورد فعل المستوى.

---

١٢ إذا كانت : $\overleftarrow{ح}$ هي محصلة القوتين $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ وكانت $\overleftarrow{ح'}$ هي محصلة القوتين $\overleftarrow{ق_١}$ ، $-\overleftarrow{ق_٢}$

فإن : ....

(أ) $\overleftarrow{ح} + \overleftarrow{ح'} = ٢\,\overleftarrow{ق_١}$ (ب) $\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{ح'} + ٢\,\overleftarrow{ق_٢}$

(جـ) $ح^٢ + ح'^٢ = ٢\,(ق_١^٢ + ق_٢^٢)$ (د) كل ما سبق.

---

١٣ أوجد معادلة الدائرة التي هي صورة الدائرة :

$س^٢ + ص^٢ - ١٢\,س + ٦\,ص + ٢٠ =$ صفر بالانتقال (س + ٢ ، ص - ٢)

١٤ قوة مقدارها $5\sqrt{3}$ نيوتن تؤثر فى اتجاه ٣٠° شرق الشمال حُللت إلى مركبتين متعامدتان فإن مقدار المركبة فى اتجاه الشرق = ... نيوتن.

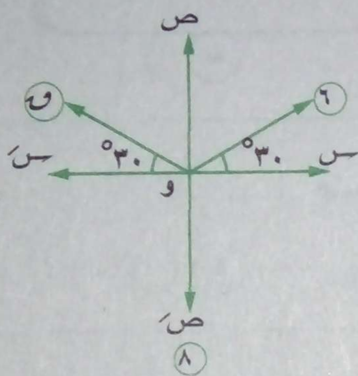
(أ) ٥ (ب) $7\frac{1}{2}$ (جـ) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ (د) ١٥

١٥ $\overline{أب}$ قضيب منتظم وزنه ٢٠ ث.كجم متصل طرفه أ بمفصل مثبت فى حائط رأسى أثرت عليه قوة أفقية ق عند ب فاتزن القضيب وهو يميل على الرأسى بزاوية قياسها ٣٠° أوجد مقدار كل من القوة ورد الفعل.

١٦ إذا كانت محصلة القوى الموضحة بالشكل المقابل

بوحدة النيوتن تؤثر فى محور ص

فإن : ق = ... نيوتن.



(أ) ٨ (ب) ٦

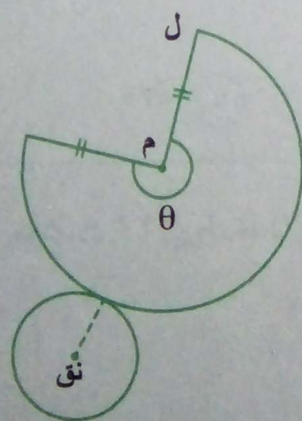
(جـ) ١٤ (د) ٢

١٧ مكعب من الشمع طول حرفه ٢٠ سم صُهر وحُوّل إلى مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٢١ سم أوجد طول نصف قطر قاعدة المخروط إذا علم أن ١٢ ٪ من الشمع فقد أثناء عمليتى الصهر والتحويل. $\left(\pi \simeq \frac{22}{7}\right)$

١٨ الشكل المقابل يمثل شبكة مخروط حيث أن

قياس الزاوية المركزية للقطاع الدائرى = θ

حيث $180° < \theta < 360°$ فإن : ....



(أ) ل > ٢ نق (ب) ل = نق

(جـ) ل = ٢ نق (د) ل < ٢ نق

١٩ أى مجموعات القوى الآتية لا يمكن أن تكون متزنه ؟

(أ) ١٠ نيوتن ، ١٠ نيوتن ، ٥ نيوتن. (ب) ٤ نيوتن ، ٦ نيوتن ، ٨ نيوتن.

(جـ) ١١ نيوتن ، ٧ نيوتن ، ٨ نيوتن. (د) ٨ نيوتن ، ٤ نيوتن ، ١٤ نيوتن.

٢٠ إذا كانت المعادلة $\begin{pmatrix} \text{س} & \text{ص} & ٢٥ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ -٤ \end{pmatrix} = \square$ تمثل معادلة دائرة فإن طول قطرها = ... وحدة طولية.

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ١٠٠ (د) ٢٠٠

النموذج الثانى



امتحان إلكترونى ٢

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ أى ٣ نقاط ليست على استقامة واحدة تعين ....

(أ) مستوى واحدًا. (ب) مستويين. (جـ) ٣ مستويات. (د) ٤ مستويات.

---

٢ إذا كانت القوتان ٦ ، ٨ نيوتن متعامدتين فإن جيب زاوية ميل المحصلة على القوة الأولى يساوى ....

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

---

٣ مركز الدائرة : $س^٢ + ص^٢ - ٦ س + ٨ ص = ٠$ هو النقطة ....

(أ) (٣ ، −٤) (ب) (−٤ ، ٣) (جـ) (−٣ ، ٤) (د) (−٣ ، −٤)

---

٤ ثلاث قوى متساوية فى المقدار ومتلاقية فى نقطة ومتزنة فإن قياس الزاوية بين أى قوتين هى ....

(أ) ٦٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٥٠°

---

٥ حجم مخروط قائم محيط قاعدته ٤٤ سم وارتفاعه ١٥ سم = ... $سم^٣$

$(\pi \simeq \frac{٢٢}{٧})$

(أ) ٧٧ (ب) ١٠٥ (جـ) ١١٠ (د) ٧٧٠

---

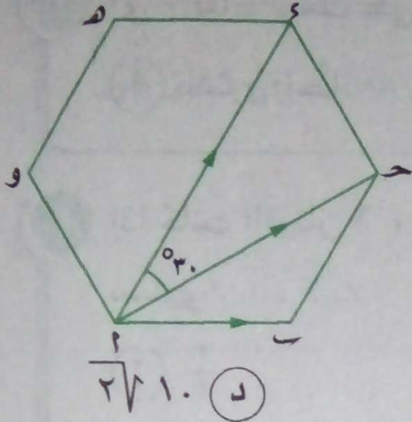
٦ قوتان متساويتان فى المقدار ومتلاقيتان فى نقطة ومقدار محصلتهما يساوى ١٢ ث.كجم وإذا عكس اتجاه إحداهما فإن مقدار المحصلة يساوى ٦ ث.كجم

أوجد مقدار كل من القوتين.

٧ قوى مستوية مقاديرها ٢ ق ، ٣ ق ، ٤ ق ث.جم تؤثر فى نقطة ، فى اتجاهات موازية لأضلاع مثلث متساوى الأضلاع فى ترتيب دورى واحد.

أوجد محصلة القوى مقدارًا واتجاهًا.

٨ أ ب حـ ء هـ و شكل سداسى منتظم اثرت قوة مقدارها ٢٠ نيوتن فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أء}}$ حُللت هذه القوة إلى مركبتين فى الاتجاهين $\overleftarrow{\text{أحـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أو}}$ فإن مركبة هذه القوة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أو}}$ تساوى .... نيوتن.



(أ) ١٠   (ب) ١٠ $\sqrt{3}$ (جـ) ٢٠   (د) ١٠ $\sqrt{2}$

٩ أوجد معادلة الدائرة التى مركزها (٢ ، −٣) وتمس المستقيم الذى معادلته :

٣ س − ٤ ص + ٢ = ٠

١٠ إذا تضاعف طول ضلع قاعدة هرم رباعى منتظم فإن حجمه ....

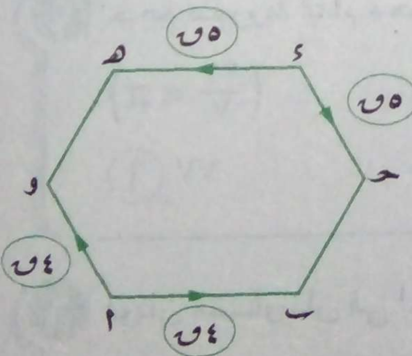
(أ) يتضاعف.   (ب) يتضاعف ثلاث مرات.

(جـ) يتضاعف أربع مرات.   (د) لا يتغير.

١١ فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء هـ و شكل سداسى منتظم

فإن محصلة القوى تكون فى اتجاه ....



(أ) $\overleftarrow{\text{أء}}$ (ب) $\overleftarrow{\text{ءأ}}$

(جـ) $\overleftarrow{\text{أحـ}}$ (د) $\overleftarrow{\text{هـأ}}$

١٢ هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ٤٠ سم وارتفاعه الجانبى ٢٥ سم.

أوجد :

(١) ارتفاع الهرم. (٢) المساحة الجانبية.

(٣) المساحة الكلية. (٤) حجم الهرم.

---

١٣ إذا كانت : $\overleftarrow{ق_1} = ٥\,\overleftarrow{س} - ٣\,\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_2} = -٧\,\overleftarrow{س} + ٢\,\overleftarrow{ص}$

، $\overleftarrow{ق_3} = ٢\,\overleftarrow{س} + \overleftarrow{ص}$ فإن : $\overleftarrow{ح}$ = ...

(أ) $٧\,\overleftarrow{س} - ٢\,\overleftarrow{ص}$ (ب) $٤\,\overleftarrow{س} - ٤\,\overleftarrow{ص}$

(جـ) $-١٤\,\overleftarrow{س} + ٤\,\overleftarrow{ص}$ (د) $\overleftarrow{صفر}$

---

١٤ أزيحت كرة بندول وزنها ٦٠٠ داين حتى صار الخيط يصنع زاوية قياسها ٣٠° مع الرأسى تحت تأثير قوة على الكرة فى اتجاه عمودى على الخيط.

أوجد مقدار القوة والشد فى الخيط.

---

١٥ قوتان ق ، ق تؤثران فى نقطة مادية ومحصلتهما ق فإن قياس الزاوية بين القوتان = ...

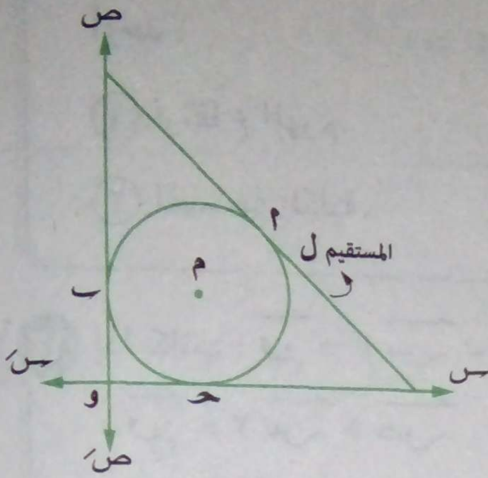
(أ) ٦٠° (ب) ٤٥° (جـ) ١٢٠° (د) ١٣٥°

---

١٦ طويت قطعة من الورق المقوى على شكل قطاع دائرى طول نصف قطر دائرته ٣٦ سم وقياس زاويته ٢١٠° لتصنع مخروطًا دائريًا قائمًا.

أوجد ارتفاع المخروط.

(١٧) فى الشكل المقابل :



إذا كان معادلة المستقيم ل

هى $\frac{س}{٨} + \frac{ص}{٦} = ١$

فإن معادلة الدائرة هى ....

(أ) $(س - ٢)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٤$

(ب) $(س - ٢)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ١٦$

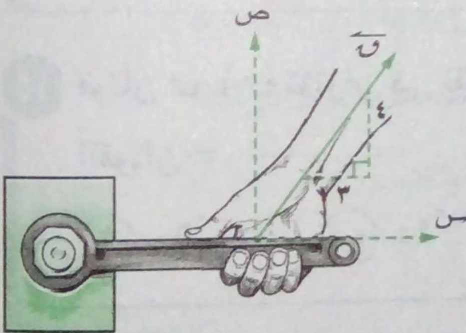
(جـ) $(س + ٢)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٤$

(د) $(س + ٢)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ١٦$

(١٨) النسبة بين حجم هرم ثلاثى منتظم وحجم أكبر مخروط يمكن وضعه بداخل الهرم يساوى ....

(أ) $\frac{٣\sqrt{٣}}{\pi}$ (ب) $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢\pi}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{\pi}$ (د) $\frac{٣\sqrt{٣}}{٤\pi}$

(١٩) فى الشكل المقابل :



إذا كانت المركبة الصادية للقوة $(\overleftarrow{ق})$

لشخص يستخدم مفتاح للربط هى ٦٠ نيوتن.

فإن المركبة السينية للقوة $\overleftarrow{ق}$

تساوى .... نيوتن.

(أ) ٣٠ (ب) ٤٥

(جـ) ٦٠ (د) ٧٥

النموذج الثالث



امتحان إلكترونى ٣

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ٥ ، ٣ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٦٠°
فإن مقدار محصلتهما ح يساوى .... نيوتن.

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٨

٢ مخروط دائرى قائم ارتفاعه ١٢ سم وطول راسمه ١٥ سم يكون حجمه .... سم^3

(أ) ٣٢٤ π (ب) ٧١٥ π (جـ) ٣٢ π (د) ١٨٠ π

٣ القيمة الصغرى لمحصلة قوتين مقداراهما ٥ ، ٩ نيوتن ومتلاقيتان فى نقطة
تساوى .... نيوتن.

(أ) صفر (ب) ٩ (جـ) ٤ (د) ٥

٤ أقل عدد من المستويات التى تحدد مجسمًا هو ....

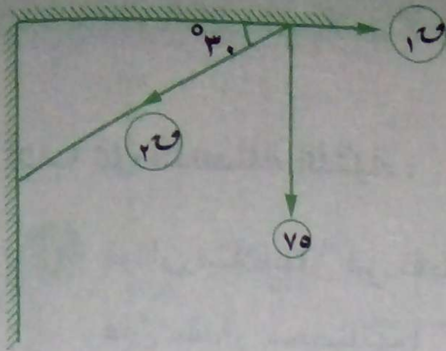
(أ) ٣ مستويات. (ب) ٤ مستويات.

(جـ) مستويان. (د) ٥ مستويات.

٥ علق ثقل مقداره ٢٠٠ ث.جم بخيطين طولاهما ٦٠ سم ، ٨٠ سم من نقطتين على خط
أفقى واحد البعد بينهما ١٠٠ سم. **أوجد مقدار الشد فى كل من الخيطين.**

٦ احسب حجم هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٨ سم وارتفاعه الجانبى ١٥ سم

٧ في الشكل المقابل :



حُللت القوة الرأسية ٧٥ نيوتن

إلى مركبتين إحداهما أفقية ق١ والأخرى ق٢

فإن : ق٢ = ... نيوتن

(أ) ٧٥ (ب) ٧٥ $\sqrt{٣}$

(جـ) ١٥٠ (د) ١٥٠ $\sqrt{٣}$

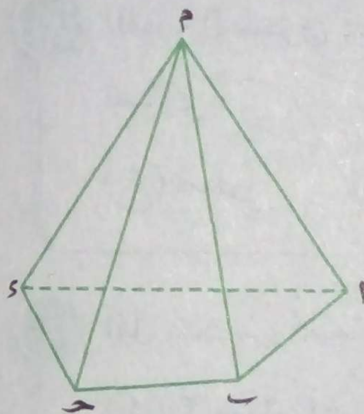
---

٨ قوتان مقداراهما ٦ ، ١٢ نيوتن تؤثران في نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٢٠°

أوجد مقدار محصلتهما وقياس الزاوية التي تصنعها مع القوة الأولى.

---

٩ في الشكل المقابل :



المستوى أ ب ء ∩ المستوى م جـ ء = ...

(أ) $\overleftrightarrow{\text{أ م}}$ (ب) $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$

(جـ) {ء} (د) $\overleftrightarrow{\text{م جـ}}$

---

١٠ أثرت القوى ٨ ، ٤ $\sqrt{٣}$ ، ٦ $\sqrt{٣}$ ، ١٤ نيوتن في نقطة مادية وكان قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية ٣٠° وبين الثانية والثالثة ١٢٠° وبين الثالثة والرابعة ٩٠° مرتبة في اتجاه دوري واحد. **أوجد محصلة هذه القوى مقدارًا واتجاهًا.**

---

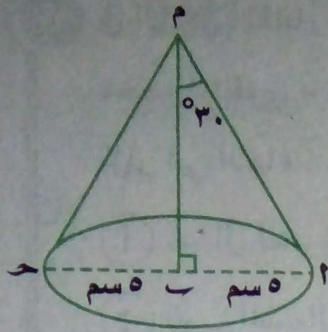
١١ شكل سداسي منتظم مركزه الهندسي نقطة الأصل ومساحته ٣ $\sqrt{٣}$ سم^{٢}

فإن معادلة الدائرة التي تمر برؤوسه هي ....

(أ) س^{٢} + ص^{٢} = ٢ (ب) س^{٢} + ص^{٢} = ٤

(جـ) س^{٢} + ص^{٢} = ٦ (د) س^{٢} + ص^{٢} = ٨

١٢ في الشكل المقابل :



مخروط دائرى قائم فيه :

ق (∠ أ م ب) = ٣٠°

، طول نصف قطر القاعدة = ٥ سم

فإن مساحته الكلية = ... سم^2

(أ) ٥٠ π (ب) ٧٥ π (جـ) ١٠٠ π (د) ١٢٥ π

١٣ قوتان ٦ ، ٢,٥ نيوتن ومحصلتهما تساوى ٦,٥ نيوتن فإن قياس الزاوية بين القوتين تكون ....

(أ) حادة. (ب) منفرجة. (جـ) قائمة. (د) مستقيمة.

١٤ وضع جسم وزنه ١٠٠ نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ فى حالة توازن بواسطة قوة أفقية. أوجد مقدار القوة ورد فعل المستوى على الجسم.

١٥ هرم ثلاثى منتظم الوجوه إذا كان مجموع أطوال أحرفه = ٣٦ سم

فإن ارتفاع الهرم = ... سم

(أ) $\sqrt{٦}$ (ب) ٢ $\sqrt{٦}$ (جـ) ٦ (د) ٤

١٦ أثبت أن الدائرتين : س^2 + ص^2 − ٢ س + ٦ ص + ١ = ٠

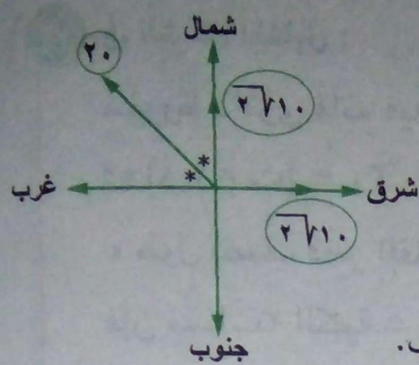
، ٤ س^2 + ٤ ص^2 − ٨ س + ٢٤ ص + ١٥ = ٠ متحدتان المركز

، أوجد طول نصف قطر كل منهما.

١٧ في الشكل المقابل :

محصلة القوى ١٠ $\sqrt{٢}$ ، ١٠ $\sqrt{٢}$ ، ٢٠ نيوتن

تؤثر في اتجاه ....



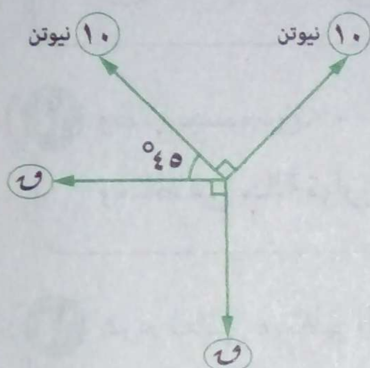
(أ) شمال الشرق. (ب) الشمال.

(جـ) غرب الشمال. (د) غرب الجنوب.

١٨ إذا كان حجم نصف كرة طول نصف قطرها نق يساوى حجم مخروط طول نصف قطر قاعدته (نق) وارتفاعه (ع) فإن : ....

(أ) ع = $\frac{٢}{٣}$ نق (ب) ع = ٢ نق (جـ) ع = ٢ نق^{٢} (د) ع = ٤ نق

١٩ شرط اتزان مجموعة القوى المقابلة ....



(أ) ق = ١٠ نيوتن.

(ب) ق = ١٠ $\sqrt{٢}$ نيوتن.

(جـ) ق = ٥ $\sqrt{٢}$ نيوتن.

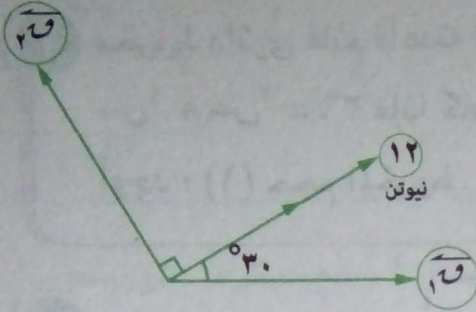
(د) المجموعة لا يمكن أن تتزن.



امتحان إلكترونى ٤

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ فى الشكل المقابل :



حللت القوة التى مقدارها ١٢ نيوتن إلى مركبتين $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ تصنعان معها زاويتين قياساهما ٣٠° ، ٩٠°

فإن : $ق_٢$ = ... نيوتن.

(أ) ١٠ (ب) ١٠ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٦ $\sqrt{٣}$ (د) ٤ $\sqrt{٣}$

٢ هرم رباعى منتظم ارتفاعه ٩ سم ، حجمه ٣٠٠ سم^٣ يكون طول ضلع قاعدته يساوى .... سم.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ١٥ (د) ٢٠

٣ قوتان متعامدتان مقداراهما ١٢ نيوتن ، ٥ نيوتن تؤثران فى نقطة فإن مقدار محصلتهما .... نيوتن.

(أ) ٥ (ب) ١٢ (جـ) ١٣ (د) ١٧

٤ أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم. أخذت نقطة هـ على $\overline{أ ء}$ بحيث أ هـ = ٦ سم ، أثرت القوة التى مقاديرها ق ، ٥ ، ك ، ٦ $\sqrt{١٠}$ نيوتن فى الاتجاهات $\overrightarrow{حـ ب}$ ، $\overrightarrow{حـ أ}$ ، $\overrightarrow{حـ ء}$ ، $\overrightarrow{هـ حـ}$ على الترتيب فإذا كانت مجموعة القوى متزنة.

أوجد قيمة كل من : ق ، ك

٥ جميع الحالات الآتية تعين مستوى ما عدا ....

(أ) مستقيمًا ونقطة لا تنتمى إليه. (ب) مستقيمين متوازيين مختلفين.

(جـ) مستقيمين متقاطعين. (د) مستقيمين متخالفين.

٦ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه : أ ب = ٣ سم ، ب جـ = ٤ سم

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المثلث أ ب جـ دورة كاملة حول $\overleftrightarrow{ب جـ}$

٧ مخروط دائرى قائم قاعدته أفقية تستند على مستوى الإحداثيات ومعادلتها

$س^٢ + ص^٢ = ٣٦$ فإذا كان ارتفاع المخروط ٨ وحدات طول.

أوجد : (١) حجم المخروط. (٢) مساحته الكلية.

٨ المعادلة $\left(س \quad ص \quad ٨\right) \begin{pmatrix} س \\ ص \\ -٢ \end{pmatrix} = \square$ تمثل دائرة طول قطرها = ... وحدة طولية.

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

٩ قوتان مقداراهما ٤ ، ق نيوتن تؤثران فى نقطة مادية قياس الزاوية بينهما ١٢٠°

فإذا كانت المحصلة عمودية على القوة الأولى فإن مقدار المحصلة = ... نيوتن.

(أ) $٤\sqrt{٢}$ (ب) $٤\sqrt{٣}$ (جـ) ٤ (د) $٤\sqrt{٥}$

١٠ علق جسم وزنه (و) نيوتن بواسطة خيطين خفيفين يميلان على الرأسى بزاويتين

قياساهما $هـ^\circ$ ، ٣٠° فاتزن الجسم عندما كان مقدار الشد فى الخيط الأول ١٢ نيوتن

والخيط الثانى $١٢\sqrt{٣}$ نيوتن.

أوجد : (١) $هـ^\circ$ (٢) مقدار الوزن (و)

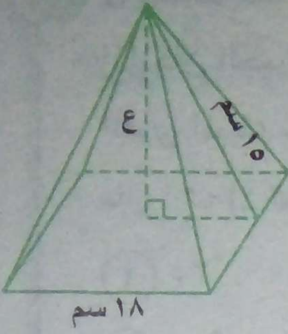
١١ إذا كان $\overline{ق_١}$ ، $\overline{ق_٢}$ قوتين فإن قياس الزاوية بين القوة $\overline{ق_١}$

ومحصلة القوتين $(\overline{ق_١} + \overline{ق_٢})$ ، $(\overline{ق_١} - \overline{ق_٢})$ تساوى ....

(أ) صفر (ب) $ظا^{-١}\left(\frac{ق_١}{ق_٢}\right)$ (جـ) $ظا^{-١}\left(\frac{ق_٢}{ق_١}\right)$ (د) $ظا^{-١}\left(\frac{ق_١ - ق_٢}{ق_١ + ق_٢}\right)$

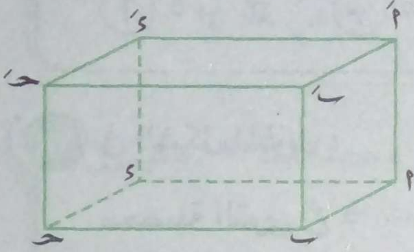
١٢ **فى الشكل المقابل :**

احسب حجم الهرم الرباعى المنتظم
الذى طول ضلع قاعدته ١٨ سم
، وارتفاعه الجانبى ١٥ سم



١٣ أوجد معادلة الدائرة المارة بالنقطتين (١ ، ٣) ، (٢ ، −٤) ويقع مركزها على محور السينات.

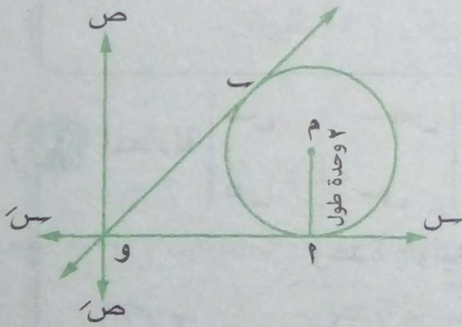
١٤ **فى الشكل المقابل :**



المستوى ٢ ٢َ بَ ∩ المستوى ٢َ حـ حـَ = ...

أ) $\overleftrightarrow{\text{٢٢َ}}$
ب) $\overleftrightarrow{\text{ب بَ}}$
جـ) $\overleftrightarrow{\text{حـ حـَ}}$
د) $\overleftrightarrow{\text{٢َ حـ}}$

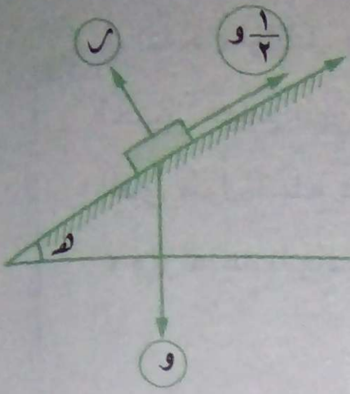
١٥ **فى الشكل المقابل :**



إذا كان : و ب = ٥ وحدة طول

فإن معادلة الدائرة م ....

أ) $(س - ٢)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ٢٥$
ب) $(س - ٢)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ٤$
جـ) $(س - ٥)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ٢٥$
د) $(س - ٥)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ٤$



١٦ **فى الشكل المقابل :**

إذا كان الجسم متزن تحت تأثير القوى المبينه بالشكل

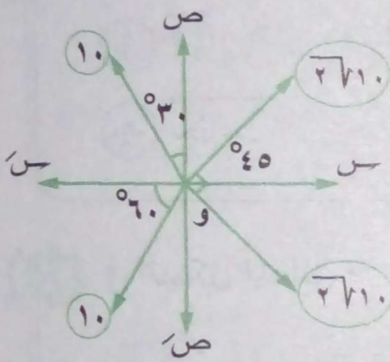
فإن : ق (د هـ) = ...

(أ) ٣٠°
(ب) ٦٠°
(جـ) ٤٥°
(د) ١٥°

١٧ مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ٥ سم ومساحته الكلية ٩٠ π سم^2

فإن حجمه = ... سم^2

(أ) ١٠٥ π
(ب) ٩٥ π
(جـ) ١٠٠ π
(د) ١٢٠ π



١٨ **فى الشكل المقابل :**

محصلة القوى ح = ... نيوتن.

(أ) ٢٠
(ب) ١٠ $\sqrt{2}$
(جـ) ١٠
(د) صفر

١٩ المعادلة $\begin{vmatrix} س & -ص \\ ص & س \end{vmatrix}$ = ٣٦ تمثل معادلة دائرة طول نصف قطرها

= .... وحدة طوليه.

(أ) ٣
(ب) ٦
(جـ) ٩
(د) ١٨

النموذج الخامس



امتحان إلكترونى ٥

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ يكون المستقيمان متخالفين إذا كانا ....

(أ) غير متوازيين.
(ب) غير متقاطعين.
(جـ) غير منطبقين.
(د) لا يجمعهما مستوى واحد.

---

٢ المساحة الجانبية لمخروط قائم طول نصف قطر قاعدته ٦ سم ، ارتفاعه ٨ سم تساوى .... سم^2

(أ) ٦٠ π
(ب) ٢٨ π
(جـ) ١٠ π
(د) ٤٨ π

---

٣ قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ٥ ث ، ٢ ث ومقدار محصلتهما ٧ ث فيكون قياس الزاوية بينهما ....

(أ) 180°
(ب) 60°
(جـ) 20°
(د) صفر°

---

٤ إذا كانت $\overleftarrow{ق}$ تتزن مع قوتين متعامدتين مقداراهما ٨ نيوتن ، ١٥ نيوتن فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٧
(ب) ١٧
(جـ) ٢٣
(د) $7\sqrt{2}$

---

٥ إذا كان : $\overleftarrow{ق_1} = 5\,\overleftarrow{س} + 3\,\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_2} = أ\,\overleftarrow{س} + 6\,\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_3} = -14\,\overleftarrow{س} + ب\,\overleftarrow{ص}$ ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة وكانت المحصلة $\overleftarrow{ح} = (10\sqrt{2}\ ،\ \frac{3}{4}\pi)$ فإن : أ + ب = ...

(أ) -١
(ب) ١
(جـ) صفر
(د) ١٤

٦ مخروط دائرى قائم مساحته الكلية 96π سم^2 وطول راسمه ١٠ سم

أوجد طول نصف قطر قاعدته ثم أوجد حجمه.

٧ كرة منتظمة ملساء طول نصف قطرها ١٠ سم ووزنها ٣٠ ث.جم علقت من نقطة على سطحها بأحد طرفى خيط خفيف طوله ١٠ سم مثبت طرفه الآخر على حائط رأسى أملس.

أوجد فى وضع التوازن الشد فى الخيط ورد فعل الحائط.

٨ أثبت أن المساحة الكلية للهرم الثلاثى المنتظم الوجوه الذى طول حرفه ل سم تساوى $\sqrt{3}$ ل^2 سم^2

٩ هرم رباعى منتظم مساحة أى وجه من أوجهه الجانبية تساوى مساحة قاعدته فإذا كان طول ضلع قاعدة الهرم = ٦ سم فإن حجم الهرم = ... سم^3

(أ) ٣٦ (ب) ٦ $\sqrt{3}$ (جـ) ٣٦ $\sqrt{15}$ (د) ٢١٦ $\sqrt{15}$

١٠ أ ب حـ ء مربع طول ضلعه = ١٠ سم ، هـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، أثرت القوى ٢ ، ٧ $\sqrt{5}$ ، ٤ $\sqrt{2}$ ، ٤ نيوتن فى الاتجاهات $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ هـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$ على الترتيب.

أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

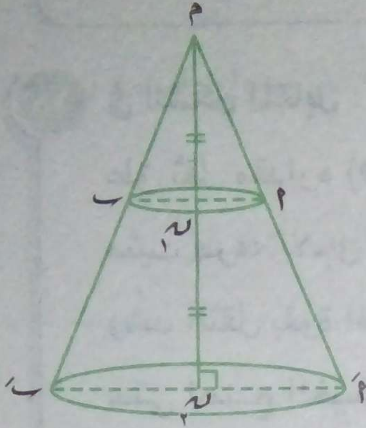
١١ قوتان مقداراهما ق ، ق $\sqrt{3}$ نيوتن متلاقيان فى نقطة وكانت محصلتهما = ح$_1$ عندما كانت قياس الزاوية بينهما ٩٠° ثم أصبحت محصلتهما = ح$_2$ عندما كانت قياس الزاوية بينهما ١٥٠° فإن : ....

(أ) ح$_1$ = ح$_2$ (ب) ح$_1$ = ٢ ح$_2$ (جـ) ح$_1$ = $\frac{3}{5}$ ح$_2$ (د) ح$_1$ = $\frac{1}{2}$ ح$_2$

١٢ اكتب الصورة العامة لمعادلة دائرة قطرها $\overline{\text{أ ب}}$ حيث : أ (٢ ، ٣) ، ب (-٤ ، ٩)

١٣ قوتان $ق_1$ ، $ق_2$ القيمة العظمى لمحصلتهما ٢٥ نيوتن والقيمة الصغرى لمحصلتهما ١٣ نيوتن. أوجد $ق_1$ ، $ق_2$ علمًا بأن $ق_1 > ق_2$

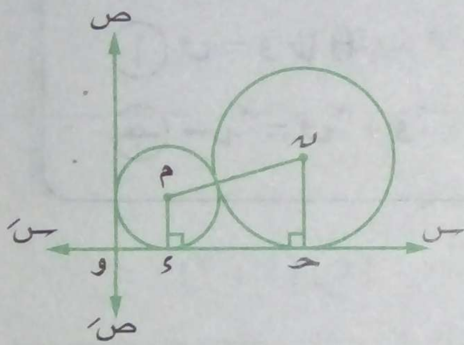
١٤ فى الشكل المقابل :



النسبة بين المساحة الجانبية للمخروط م أ ب
إلى مساحة الجانبية للمخروط م أَ بَ تساوى ....

(أ) ١ : ٢ (ب) ١ : ٤
(جـ) ١ : ٦ (د) ١ : ٨

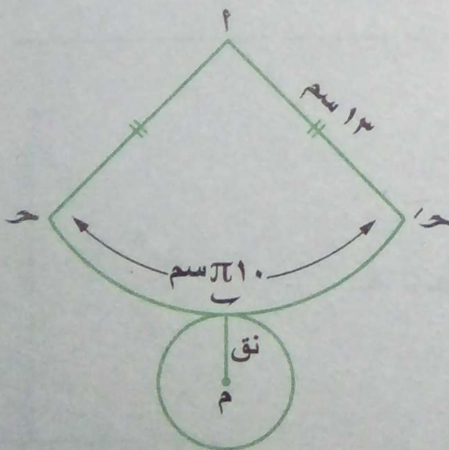
١٥ فى الشكل المقابل :



م ، ن دائرتان متماستان من الخارج
معادلتيهما $(س - ٢)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ٤$
، $(س - أ)^٢ + (ص - ب)^٢ = ٦٤$
فإن : قيمة أ + ب = ...

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١٨ (د) ٢٨

١٦ الشبكة التى أمامك تصف مجسم
، حجمه = ... سم^٣^

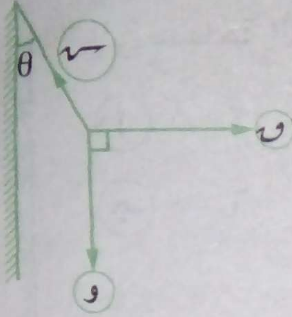


(أ) ٢٥ π (ب) ٥٠ π
(جـ) ٧٥ π (د) ١٠٠ π

(١٧) قوة مقدارها ٤٠ نيوتن تؤثر رأسيًا لأعلى تم تحليلها إلى مركبتين إحداهما أفقية ومقدارها ٢٠ نيوتن فإن مقدار المركبة الثانية = ...

(أ) ٢٠ (ب) ٢٠ $\sqrt{٢}$ (جـ) ١٠ (د) ٢٠ $\sqrt{٥}$

(١٨) **فى الشكل المقابل :**



علق ثقل مقداره (و) نيوتن فى طرف خيط مثبت طرفه الاخر فى حائط رأسى وشُد الثقل بقوة افقية مقدارها ق نيوتن حتى اصبح الخيط مائلًا على الحائط بزاوية قياسها θ أى الجمل الآتية غير صحيح فى وضع الاتزان ....

(أ) ق = و طا θ

(ب) $\overrightarrow{و} + \overrightarrow{ق} + \overrightarrow{ش} = \overrightarrow{صفر}$

(جـ) $ش^{٢} = ق^{٢} + و^{٢}$

(د) ش = ق + و

النموذج السادس



امتحان إلكترونى ٦

أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) المساحة الجانبية للمخروط القائم الذى طول نصف قطر قاعدته نق وطول راسمه ل تساوى ....

(أ) ٢ π ل نق (ب) ٢ π ل نق^٢ (جـ) π ل نق (د) π ل نق^٢

(٢) أى قوتين مما يأتى لا يمكن أن تكون مقدار محصلتها ٤ نيوتن ....

(أ) ٢ نيوتن ، ٤ نيوتن. (ب) ٣ نيوتن ، ٣ نيوتن.

(جـ) ٢ نيوتن ، ٦ نيوتن. (د) ٣ نيوتن ، ٨ نيوتن.

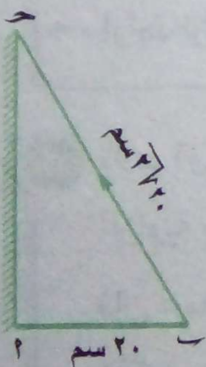
(٣) النقطة التى تقع على الدائرة (س − ٢)^٢ + ص^٢ = ١٣ هى ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٣ ، −٢) (جـ) (٢ ، ٥) (د) (٤ ، ٣)

(٤) عدد المستويات التى تحمل أوجه الهرم الخماسى هو ....

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ١٠ (د) عدد لا نهائى.

(٥) أ ب قضيب منتظم طوله ٢٠ سم ووزنه ٣٠ نيوتن متصل بمفصل مثبت في حائط رأسى عند أ والطرف ب مربوط بخيط خفيف طوله ٢٠ √٢ سم مثبت طرفه الآخر عند حـ على الحائط أعلى أ فإذا اتزن القضيب أفقيًا فإن رد فعل المفصل على القضيب ....



(أ) فى اتجاه ب أ (ب) خط عمله يبعد عن الحائط مسافة ١٠ سم

(جـ) ينصف ب حـ (د) مقداره ١٥ نيوتن.

٦ علق ثقل مقداره ٣٤٠ ث.جم بواسطة خيطين طولاهما ١٦ سم ، ٣٠ سم من نقطتين فى خط أفقى واحد البعد بينهما ٣٤ سم. أوجد مقدار الشد فى كل من الخيطين.

٧ الصورة العامة لمعادلة الدائرة التى مركزها (٥ ، -٤) وتمس محور السينات هى ....

(أ) $س^٢ + ص^٢ - ١٠ س + ٨ ص + ٢٥ = ٠$

(ب) $س^٢ + ص^٢ - ٥ س + ٤ ص = ٠$

(جـ) $س^٢ + ص^٢ - ١٠ س + ٨ ص = ٢٥$

(د) $س^٢ + ص^٢ + ١٠ س - ٨ ص + ٢٥ = ٠$

٨ قضيب منتظم طوله ١٠٠ سم ووزنه ١٥٠ ث.جم عُلِّق من طرفيه تعليقًا حرًا بواسطة خيطين ، ثُبت طرفاهما فى نقطة واحدة ، فإذا كان طولا الخيطين : ٨٠ سم ، ٦٠ سم فأوجد مقدار الشد فى كل منهما.

٩ إذا كانت $\overleftarrow{ح}$ محصلة القوتين $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ وكانت $\overleftarrow{ح} \perp \overleftarrow{ق_١}$ وكانت $ح = \frac{١}{٢} ق_٢$ فإن قياس الزاوية بين القوتين $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ هى ....

(أ) $٩٠°$ (ب) $١٢٠°$ (جـ) $١٣٥°$ (د) $١٥٠°$

١٠ هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٨ سم فإذا كان حجمه ١٢٩٦ $سم^٣$ أوجد ارتفاعه الجانبى ومساحته الجانبية.

١١ ثلاث قوى مقاديرها ٦٠ ، ق ، ك نيوتن متزنة وملاقية فى نقطة ، فإذا كان قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية $١٢٠°$ وبين الثانية والثالثة $٩٠°$

فإن : مقدار ك = ... نيوتن.

(أ) $٣٠\sqrt{٣}$ (ب) $٣٠\sqrt{٢}$ (جـ) ٣٠ (د) ٦٠

١٢ مخروط قائم حجمه ٢٧ π سم^٣ ومحيط قاعدته ٦ π سم. أوجد ارتفاعه.

١٣ النسبة بين المساحة الجانبية للهرم الثلاثى المنتظم الوجوه إلى مساحته الكلية = ... : ....

(أ) ١ : ٣ (ب) ١ : ٤ (جـ) ٣ : ٤ (د) ١ : ٢

١٤ ا ب حـ ء هـ و شكل سداسى منتظم. تؤثر القوى التى مقاديرها ٢ ، ٤ $\sqrt{٣}$ ، ٨ ، ٢ $\sqrt{٣}$ ، ٤ ث.كجم فى نقطة ا فى الاتجاهات $\overleftarrow{اب}$ ، $\overleftarrow{احـ}$ ، $\overleftarrow{اء}$ ، $\overleftarrow{اهـ}$ ، $\overleftarrow{او}$ على الترتيب. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

١٥ طول القطعة المماسة المرسومة للدائرة س^٢ + ص^٢ = نق^٢ من النقطة (٠ ، ٢ نق) هو ....

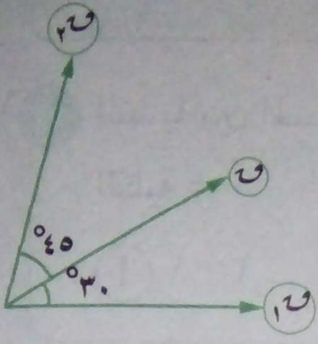
(أ) نق (ب) ٢ نق (جـ) $\sqrt{٣}$ نق (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ نق

١٦ ا ب حـ مثلث متساوى الساقين : ا ب = ا حـ = ١٠ سم ، ب حـ = ١٢ سم دار دورة كاملة حول قاعدته $\overline{ب حـ}$ احسب حجم الجسم الناشئ من الدوران.

١٧ ا ب حـ ء أَ بَ حـَ ءَ مكعب طول حرفه ٢٠ سم وضع بداخله مخروط دائرى قائم بحيث رأس المخروط هو مركز القاعدة أَ بَ حـَ ءَ وقاعدة المخروط تمس أضلاع القاعدة ا ب حـ ء فإن النسبة بين حجم المخروط والمكعب = ...

(أ) $\frac{\pi}{١٢}$ (ب) $\frac{\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{١٢}{\pi}$

(١٨) **في الشكل المقابل :**



القوة $\overrightarrow{ق}$ هي محصلة القوتين $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$

فإن : $\frac{ق_١ + ق_٢}{ق}$ = ...

(أ) جا ٣٠° + جا ٤٥°

(ب) $\frac{\text{جا } ٧٥° + \text{جا } ٣٠°}{\text{جا } ٧٥°}$

(جـ) $\frac{\text{جا } ٤٥° + \text{جا } ٣٠°}{\text{جا } ٧٥°}$

(د) $\frac{\text{جا } ٧٥°}{\text{جا } ٣٠°} + \frac{\text{جا } ٧٥°}{\text{جا } ٤٥°}$

---

(١٩) قوتان متلاقيتان في نقطة مقداراهما $ق_١$ ، $ق_٢$ حيث ٠ ≤ $ق_١$ ≤ ١٣ ، ٨ ≤ $ق_٢$ ≤ ١٧

وقياس الزاوية بينهما ١٨٠° ومقدار محصلتهما ح فإن : ....

(أ) ٣ ≤ ح ≤ ٤

(ب) ٠ ≤ ح ≤ ٤

(جـ) ٠ ≤ ح ≤ ١٧

(د) ٥ ≤ ح ≤ ١٧

---

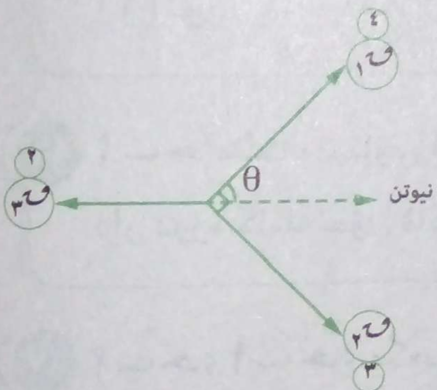
(٢٠) الشكل المقابل يمثل ثلاث قوى

$\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ ، $\overrightarrow{ق_٣}$ مقاديرها ٤ ، ٣ ، ٢ نيوتن

على الترتيب فإذا كانت : جا θ = $\frac{٣}{٥}$

فإن مقدار محصلة هذه القوى

يساوى .... نيوتن.



(أ) ١

(ب) ٢

(جـ) ٣

(د) ٥

النموذج السابع



امتحان إلكترونى ٧

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ إذا بلغت محصلة قوتين تؤثران فى نقطة قيمتها العظمى فإن قياس الزاوية بين خطى عملهما يساوى ....

(أ) ١٨٠° (ب) ١٢٠° (جـ) صفر° (د) ٦٠°

٢ هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٠ سم وارتفاعه الجانبى ١٣ سم تكون مساحته الجانبية .... $سم^٢$

(أ) ٢٦٠ (ب) ٣٦٠ (جـ) ١٣٠ (د) ٥٢٠

٣ مركز الدائرة $س^٢ + ص^٢ - ٦ س + ٨ ص = ٠$ هو النقطة ....

(أ) (٣ ، −٤) (ب) (٤ ، −٣) (جـ) (−٣ ، ٤) (د) (−٤ ، ٣)

٤ إذا كانت $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ ، $\overleftarrow{ق_٣}$ ثلاث قوى مقدرة بالنيوتن متزنة ومتلاقية فى نقطة واحدة وكانت : $\overleftarrow{ق_١} = ٢ \overleftarrow{س} - ٣ \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٢} = ٣ \overleftarrow{س} + ٥ \overleftarrow{ص}$

فإن : $\|\overleftarrow{ق_٣}\|$ = ... نيوتن.

(أ) $٥ \overleftarrow{س} + ٢ \overleftarrow{ص}$ (ب) $-٥ \overleftarrow{س} - ٢ \overleftarrow{ص}$

(جـ) $\sqrt{٢٩}$ (د) $\sqrt{٣٤}$

٥ وضع جسم وزنه (و) نيوتن على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ الجسم فى حالة توازن بتأثير قوة مقدارها ٣٦ نيوتن تعمل فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى. **احسب مقدار وزن الجسم ومقدار رد فعل المستوى.**

٦ الصورة العامة لمعادلة الدائرة التى مركزها م (−٢ ، ٥) وتمر بالنقطة (٣ ، ٢) هى ....

(أ) $س^٢ + ص^٢ - ٤ س + ١٠ ص - ٥ = ٠$

(ب) $س^٢ + ص^٢ + ٤ س - ١٠ ص - ٥ = ٠$

(جـ) $س^٢ + ص^٢ + ٢ س - ٥ ص - ٥ = ٠$

(د) $س^٢ + ص^٢ + ٤ س - ١٠ ص - ٢٥ = ٠$

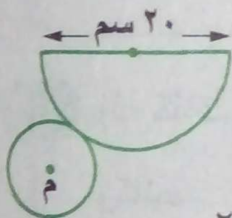
٧ إذا كان المستقيم ل // المستوى س ، أ ∈ س فإن : ل ∩ س = ...

(أ) ∅ (ب) ل (جـ) {أ} (د) س

٨ هرم رباعى منتظم مساحته الجانبية ٢٤٠ $سم^٢$ وارتفاعه الجانبى ١٢ سم ....

أوجد : (١) ارتفاع الهرم. (٢) حجم الهرم.

٩ إذا طوينا هذه الشبكة لتصبح مخروطًا



فإن نصف قطر قاعدته = ...

(أ) ١٠ سم (ب) ٨ سم (جـ) ٥ سم (د) ٢,٥ سم

١٠ كرة معدنية وزنها ٤٠٠ ث.كجم يؤثر فى مركزها ، موضوعة بين مستويين أملسين أحدهما رأسى والآخر يميل على الرأسى بزاوية قياسها °٦٠

أوجد رد فعل كل من المستويين.

١١ حجم مخروط قائم طول راسمه = ١٥ سم ، مساحته الكلية = ٢١٦ π $سم^٢$ يساوى .... $سم^٣$

(أ) ٢٠٥ π (ب) ٣٢٠ π (جـ) ٣٨٠ π (د) ٣٢٤ π

١٢ إذا كانت $ح$ هى محصلة قوتين $ق_١$ ، $ق_٢$ حيث : $ق_٢ > ق_١$ فأى من الشروط الآتية تكفى لجعل $ح \perp ق_١$ ....

(أ) $ح^٢ = ق_١^٢ + ق_٢^٢$ (ب) $ح^٢ = ق_٢^٢ - ق_١^٢$

(جـ) $\overleftarrow{ق_١} \perp \overleftarrow{ق_٢}$ (د) جميع ما سبق.

١٣ أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ١٢ سم ، هـ $\in \overline{ب حـ}$ بحيث ب هـ = ٥ سم أثرت قوى مقاديرها ٢ ، ١٣ ، $٤\sqrt{٢}$ ، ٩ ث.جم فى الاتجاهات $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{أ هـ}$ ، $\overleftarrow{حـ أ}$ ، $\overleftarrow{أ ء}$ على الترتيب ، عيِّن محصلة هذه القوى.

١٤ إذا كانت : $س^٢ + ص^٢ + ٢ (جتا \theta) س - ٢ (جا \theta) ص - ٨ = ٠$ تمثل معادلة دائرة فإن : نق = ... وحدة طول.

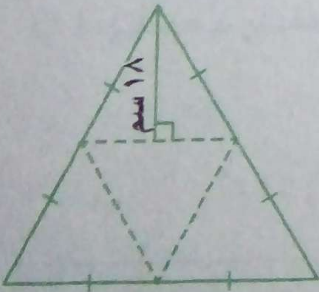
(أ) $\sqrt{٢}$ (ب) $٢\sqrt{٢}$ (جـ) ٣ (د) ٨

١٥ أربع قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة مقاديرها $ق_١$ ، $٦\sqrt{٢}$ ، $٨\sqrt{٢}$ ، $ق_٢$ ثقل جرام والقوة الأولى فى اتجاه الشرق والثانية فى اتجاه الشمال الشرقى والثالثة فى اتجاه الشمال الغربى والرابعة تؤثر فى اتجاه الجنوب فإذا كانت محصلة هذه القوى تساوى ٧ ثقل جرام وتؤثر فى اتجاه الشرق. **فأوجد :** $ق_١$ ، $ق_٢$

١٦ عند طى الشبكة التى أمامك

ما هو الجسم الناتج ؟

وأوجد مساحته الكلية وحجمه



١٧ $\overrightarrow{}$ أ ب حـ ء هـ شكل خماسى منتظم أثرت قوة مقدارها ٢٠ نيوتن فى اتجاه $\overrightarrow{\text{أحـ}}$

ثم حُللت هذه القوة فى اتجاهين $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{أهـ}}$ فإن مقدار مركبة القوة فى اتجاه $\overrightarrow{\text{أب}}$

تساوى .... نيوتن.

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٢٠ $\sqrt{٣}$ (د) ١٢,٤

١٨ مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ١٥ سم وارتفاعه ٢٠ سم فإن مساحته

الجانبية = ... سم^{٢}

(أ) ٦٠٠ π (ب) ٣٧٥ π (جـ) ١٨٧٥ π (د) ٥٦٢٥ π

النموذج الثامن



امتحان إلكترونى ٨

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ قوتان مقداراهما ٨ ، ق ث.جم وقياس الزاوية بينهما ∈]٠ ، π[، ومحصلتهما تنصف الزاوية بينهما فإن : ق = ... ث.جم.

(أ) ٢ $\sqrt{2}$ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٦

٢ حجم هرم رباعى منتظم محيط قاعدته ٣٦ سم وارتفاعه ١٠ سم يساوى .... سم^3

(أ) ٨١٠ (ب) ١٨٠ (جـ) ٣٦٠ (د) ٢٧٠

٣ محيط الدائرة التى معادلتها : س^2 + ص^2 = ٨ هو ....

(أ) ٨ π (ب) ٦٤ π (جـ) ٢ $\sqrt{2}$ π (د) ٤ $\sqrt{2}$ π

٤ إذا اتزنت ثلاث قوى متلاقية فى نقطة فإن مقدار كل قوة يتناسب مع .... الزاوية المحصورة بين القوتين الأخريين.

(أ) جيب تمام (ب) جيب (جـ) ظل (د) ظل تمام

٥ قوتان متساويتان فى المقدار ومقدار كل منهما ق نيوتن فإذا كان مقدار محصلتهما ق نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما = ...

(أ) صفر (ب) ٣٠° (جـ) ٦٠° (د) ١٢٠°

٦ هرم سداسى منتظم حجمه ٨ $\sqrt{3}$ سم^3 وارتفاعه ٤ سم أوجد محيط قاعدته.

٧ قوة مقدارها $١٠\sqrt{٢}$ ثقل. جرام تعمل فى اتجاه الجنوب الشرقى تم تحليلها إلى مركبتين متعامدين فإن مقدار مركبة القوة فى اتجاه الجنوب = ... ثقل. جرام.

(أ) $١٠\sqrt{٣}$ (ب) $١٠\sqrt{٢}$ (جـ) ١٠ (د) ٥

٨ الصورة العامة لمعادلة الدائرة التى مركزها (٢ ، -١) وطول نصف قطرها ٣ سم هى ....

(أ) $س^٢ + ص^٢ - ٤ س + ٢ ص - ٤ = ٠$

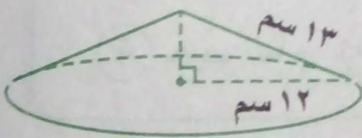
(ب) $س^٢ + ص^٢ - ٢ س + ص - ٤ = ٠$

(جـ) $س^٢ + ص^٢ + ٤ س - ٢ ص - ٤ = ٠$

(د) $س^٢ + ص^٢ - ٤ س + ٢ ص - ١٦ = ٠$

٩ جسم وزنه ٢٤ نيوتن معلق فى أحد طرفى خيط طوله ١٣٠ سم وطرفه الآخر مثبت فى نقطة من حائط رأسى ، أثرت على الجسم قوة أفقية ق ، أوجد مقدار ق والشد فى الخيط عندما يكون الجسم على بعد ٥٠ سم من الحائط.

١٠ الزاوية المركزية للقطاع الذى إذا طويناه أصبح المخروط الموضح تكون ....



(أ) حادة. (ب) منفرجة.

(جـ) مستقيمة. (د) منعكسة.

١١ أثرت قوى مقاديرها ق ، ٨٠ ، ك ، ٥٠ ، $٨٠\sqrt{٣}$ ث.كجم فى نقطة مادية فى اتجاهات الشرق ، ٣٠° شرق الشمال ، الشمال ، الغرب ، الجنوب على الترتيب.

أوجد قيمتى ق ، ك إذا كانت محصلة القوى = ٤٠ ث.كجم فى اتجاه ٦٠° شمال الشرق.

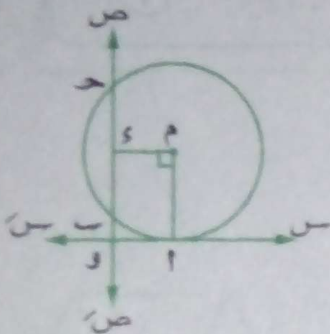
١٢ عدد المستويات التى تمر بنقطتين معلومتين هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائى.

١٣ مخروط دائرى قائم طول راسمه ١٧ سم وارتفاعه ١٥ سم

أوجد مساحته الكلية ثم أوجد حجمه.

١٤ فى الشكل المقابل :



دائرة م تمس محور السينات عند أ

و ب = ٢ وحدة طول ، ب حـ = ٦ وحدة طول

فإن معادلة الدائرة م هى ....

(أ) $(س + ٤)^٢ + (ص + ٥)^٢ = ١٦$ (ب) $(س - ٤)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ٢٥$

(جـ) $(س - ٤)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ١٦$ (د) $(س + ٤)^٢ + (ص + ٥)^٢ = ٢٥$

١٥ وضع جسم وزنه ٦ ث.كجم على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠°

وحفظ فى حالة توازن بواسطة قوة أفقية.

أوجد كلًا من مقدار القوة الأفقية ورد فعل المستوى على الجسم.

١٦ أوجد قيم ك التى تجعل الدائرتين :

$د_١ : (س + ٢)^٢ + (ص + ١١)^٢ = ك$ ، $د_٢ : (س - ٣)^٢ + (ص - ١)^٢ = ١٦$

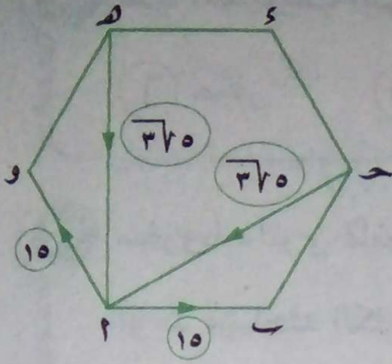
متماستين.

١٧ إذا كانت محصلة قوتين متعامدتين تميل على القوة الكبرى بزاوية قياسها θ فأى القيم

الأتية تصلح قيمة لـ θ ؟ ....

(أ) ٩٠° (ب) ٧٠° (جـ) ٤٥° (د) ١٠°

18 في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم

أثرت القوى ١٥ ، ٥ √٣ ، ٥ √٣ ، ١٥ على الترتيب

في الأضلاع $\overrightarrow{أ ب}$ ، $\overrightarrow{حـ أ}$ ، $\overrightarrow{هـ أ}$ ، $\overrightarrow{أ و}$

فإن المحصلة ح = ... نيوتن.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢٥ (د) صفر

النموذج التاسع



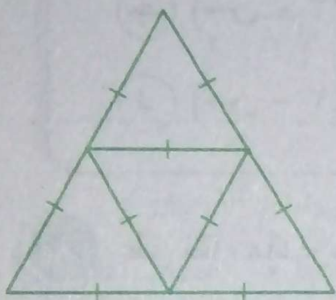
امتحان إلكترونى ٩

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ قوتان متعامدتان مقداراهما ٢ ق − ٥ ، ق + ٢ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية ، مقدار محصلتهما يساوى ٣ $\sqrt{٥}$ نيوتن فإن : ق = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

٢ أى المجسمات يعبر عن الشبكة المقابلة : ....



(أ) هرم رباعى.

(ب) هرم باعى منتظم.

(جـ) هرم ثلاثى منتظم الوجوه.

(د) غير ذلك.

٣ مخروط دائرى قائم حجمه ١٠٠ سم^{٣} فإن حجمه عندما يتضاعف ارتفاعه يساوى .... سم^{٣}

(أ) ١٠٠ (ب) ٢٠٠ (جـ) ٤٠٠ (د) ٨٠٠

٤ وضع جسم وزنه ١٨ ثقل كجم على مستوٍ مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ومنع من الانزلاق بتأثير قوة قدرها (ق) تميل على اتجاه خط أكبر ميل للمستوى إلى أعلى بزاوية قياسها ٣٠° **فأوجد مقدار هذه القوة ورد فعل المستوى على الجسم.**

٥ قوة مقدارها ٤ $\sqrt{٢}$ تعمل فى اتجاه الشرق تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مركبتها فى اتجاه الشمال الشرقى تساوى .... نيوتن.

(أ) ٤ (ب) ٤ $\sqrt{٢}$ (جـ) ٨ (د) ٨ $\sqrt{٢}$

٦ هرم رباعى منتظم محيط قاعدته ٤٠ سم وارتفاعه ١٢ سم

فإن مساحته السطحية = ... سم^{٢}

أ) ٢٠٠ ب) ٢٤٠ جـ) ٢٦٠ د) ٣٢٠

٧ معادلة الدائرة التى يمسها المستقيم س + ص = ٢ ومركزها (٣ ، ٥) هى ....

أ) (س − ٣)^{٢} + (ص − ٥)^{٢} = ٣ $\sqrt{٢}$

ب) (س + ٣)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = ١٨

جـ) (س − ٣)^{٢} + (ص − ٥)^{٢} = ١٢

د) (س − ٣)^{٢} + (ص − ٥)^{٢} = ١٨

٨ علق ثقل مقداره ١٦ نيوتن فى أحد طرفى خيط خفيف والطرف الآخر مثبت فى نقطة من حائط رأسى ، أزيح الثقل بقوة فى اتجاه عمودى على الخيط حتى أصبح الخيط فى وضع التوازن يميل على الحائط بزاوية قياسها ٣٠°

أوجد مقدار كل من القوة والشد فى الخيط.

٩ $\overline{أ ب}$ قضيب منتظم طوله ٦ أمتار ووزنه ٨ ث.كجم يتصل طرفه أ بحائط رأسى بواسطة مفصل ، حفظ القضيب فى وضع أفقى بربطه من إحدى نقطة حـ حيث : أ حـ = ٤ أمتار بأحد طرفى خيط ثم ثبت الطرف الثانى للخيط فى نقطة ء على الحائط الرأسى فوق أ وعلى بعد ٤ أمتار منها. **احسب مقدار الشد فى الخيط ورد فعل المفصل.**

١٠ اكتب معادلة الدائرة التى تمس محور السينات عند النقطة (−٢ ، ٠) وتقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات وترًا طوله ٤ $\sqrt{٣}$ وحدة طول.

١١ قوتان متساويتان فى المقدار محصلتهما ٢٤ نيوتن وتميل على القوة الأولى بزاوية قياسها ٣٠° فإن مقدار أى من هاتين القوتين = ... نيوتن.

(أ) ٨ (ب) ٨ $\sqrt{3}$ (جـ) ٨ $\sqrt{2}$ (د) ١٢

١٢ قطاع دائرى م أ ب طول نصف قطر دائرته ١٨ سم وقياس زاويته المركزية ٦٠° طوى ولصق نصفا قطره ليكون أكبر مساحة جانبية لمخروط قائم. **أوجد حجم هذا المخروط.**

١٣ النسبة بين طول حرف الهرم الثلاثى المنتظم الوجوه وارتفاعه = ... : ....

(أ) $\sqrt{2}$: $\sqrt{3}$ (ب) $\sqrt{3}$: ٢ (جـ) $\sqrt{6}$: ٢ (د) $\sqrt{3}$: ٣

١٤ ثلاث قوى مقاديرها ١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ نيوتن تؤثر فى نقطة مادية ، الأولى نحو الشرق ، الثانية تصنع زاوية قياسها ٣٠° غرب الشمال والثالثة تصنع زاوية قياسها ٦٠° جنوب الغرب. **أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.**

١٥ مخروط دائرى قائم مساحة قاعدته ٢٥ π سم^2 وطول راسمه ١٣ سم فإن مساحته الجانبية = ... سم^2

(أ) ٥٠ π (ب) ٦٥ π (جـ) ٩٠ π (د) ١٠٠ π

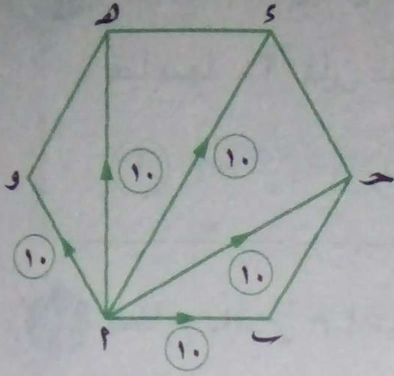
١٦ قوتان مقداراهما ق ، ٢ ق نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وكانت المحصلة عمودية على إحداهما فإن قياس الزاوية بين القوتين = ...

(أ) ٦٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٣٥°

١٧ النقطة التى تقع على الدائرة : (س − ٢)^2 + ص^2 = ١٣ هى ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٣ ، −٢) (جـ) (٢ ، ٥) (د) (٤ ، ٣)

١٨ أثرت خمس قوى متساوية فى المقدار ومقدار كل منها ١٠ نيوتن فى أحد رؤوس سداسى منتظم وفى اتجاهات الرؤوس الأخرى للسداسى كما بالشكل المقابل



فإن محصلة هذه القوى = ... نيوتن

(أ) ٥٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٣٠ $\sqrt{3}$ (د) (٢٠ + ١٠ $\sqrt{3}$)

النموذج العاشر



امتحان إلكترونى ١٠

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ النقطة التى تقع على الدائرة $س^2 + (ص - ٥)^2 = ٢٠$ هى ....

(أ) (٢ ، ٣)   (ب) (٣ ، -٢)   (جـ) (٢ ، ٥)   (د) (٤ ، ٣)

٢ قوتان ٣ ، ٤ نيوتن محصلتهما ٧ نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما هو ....

(أ) صفر°   (ب) ٦٠°   (جـ) ١٨٠°   (د) ٩٠°

٣ إذا كانت : $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ ، $\overleftarrow{ق_3}$ ثلاث قوى متلاقية فى نقطة ومتزنة

فإن مقدار محصلة $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ = ...

(أ) $ق_1$ (ب) $ق_1 + ق_2$ (جـ) $ق_3$ (د) صفر

٤ قوتان مقداراهما ٨ ، ق نيوتن تؤثران فى نقطة مادية ، إذا كان قياس الزاوية بينهما ١٢٠° ومحصلتهما ق $\sqrt{٣}$ نيوتن   فإن : ق = ... نيوتن

(أ) ٤   (ب) ٤ $\sqrt{٢}$ (جـ) ٤ $\sqrt{٣}$ (د) ٨

٥ مخروط دائرى قائم طول راسمه ١٧ سم وارتفاعه ١٥ سم

فإن مساحته الكلية = ... $سم^2$

(أ) ٢٠٠ π   (ب) ١٣٦ π   (جـ) ٣٢٠ π   (د) ٤٠٠ π

٦ هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ٢٠ سم وارتفاعه ١٠ $\sqrt{٣}$ سم

أوجد : (١) المساحة الجانبية للهرم.   (٢) حجم الهرم.

(٧) إذا كانت (و) هى نقطة الأصل لنظام إحداثى متعامد فى المستوى وكانت $\overleftarrow{ق}$ = (٨ ث.كجم ، ١٣٥°) قوة تؤثر فى نقطة و فإن مركبة القوة $\overleftarrow{ق}$ فى اتجاه محور الصادات تساوى ....

(أ) $-٤\sqrt{٢}$ (ب) $٤\sqrt{٢}$ (جـ) $٤\sqrt{٣}$ (د) ٤

(٨) أ ب جـ د هـ و سداسى منتظم. أثرت قوى مقاديرها ٨ ، $٦\sqrt{٣}$ ، ٥ ، ٤ ، $٣\sqrt{٣}$ نيوتن فى $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أجـ}$ ، $\overleftarrow{أد}$ ، $\overleftarrow{أهـ}$ على الترتيب. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

(٩) علق ثقل مقداره ٣٢ نيوتن فى طرف خيط طوله ١٠ سم وثبت الطرف الآخر للخيط فى حائط رأسى ثم شد الثقل بقوة أفقية أبعدته عن الحائط فاتزن عندما كان الثقل يبعد عن الحائط مسافة ٦ سم. أوجد مقدار القوة والشد فى الخيط.

(١٠) وضع جسم وزنه ١٨ نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ومنع من الانزلاق بتأثير قوة أفقية قدرها ق نيوتن.

أوجد مقدار هذه القوة ورد فعل المستوى على الجسم.

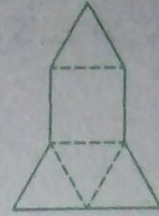
(١١) معادلة الدائرة التى مركزها (-٤ ، ٣) وتمر بنقطة الأصل هى ....

(أ) $(س + ٤)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ٥$ (ب) $(س - ٤)^٢ + (ص + ٣)^٢ = ٢٥$

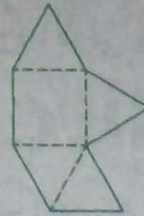
(جـ) $(س + ٤)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ٦٢٥$ (د) $(س + ٤)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ٢٥$

(١٢) إناء أسطوانى الشكل به ماء ، غمر فيه جسم معدنى على شكل مخروط قائم ، ارتفاعه ١٢ سم وطول نصف قطر قاعدته ٢ سم غمرًا كاملًا ، فارتفع سطح الماء فى الإناء بمقدار ١ سم أوجد طول قطر قاعدة الإناء.

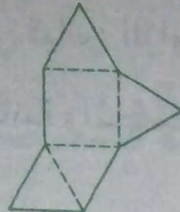
١٣ أى الشبكات التالية لا تصنع هرمًا رباعيًا منتظمًا عند طيها ....



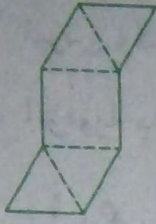
(أ)



(ب)



(جـ)



(د)

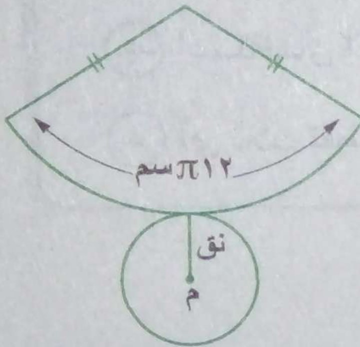
١٤ خمس قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة مقاديرها ١٢ ، ٩ ، ٥ $\sqrt{٣}$ ، ٧ $\sqrt{٢}$

، ٧ ث.كجم تعمل فى اتجاهات الشرق ، الشمال ، الشمال الغربى

، الجنوب الغربى ، الجنوب على الترتيب. أثبت أن المجموعة متزنة.

١٥ الشبكة التى أمامك تصف مجسمًا حجمه ٩٦ π سم^٣

فإن مساحته الكلية = ... سم^٢



(أ) ٩٦ π (ب) ٤٨ π

(جـ) ٣٢ π (د) ١٦ π

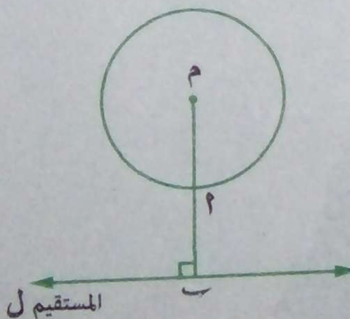
١٦ فى الشكل المقابل :

إذا كانت معادلة الدائرة هى

س^٢ + ص^٢ − ٦ س + ٤ ص − ١٢ = ٠

، $\overline{مب}$ ⊥ المستقيم ل حيث ل : ٣ س − ٤ ص + ٢٣ = ٠

، $\overline{مب}$ يقطع الدائرة فى أ



فإن : طول $\overline{أب}$ = ... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٨ (د) ١٢

(١٧) قوتان مقدارهما ق ، ق $\sqrt{3}$ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية ومقدار محصلتهما ق نيوتن وكانت $هـ_1$ هى قياس الزاوية بين القوة الأولى والمحصلة وكانت $هـ_2$ قياس الزاوية بين القوة الثانية والمحصلة فإن : ....

(أ) $هـ_1 = هـ_2$

(ب) $هـ_1 = \frac{1}{2} هـ_2$

(جـ) $هـ_1 = 3 هـ_2$

(د) $هـ_1 = 4 هـ_2$

(١٨) أى الجمل الآتية غير صحيحة ....

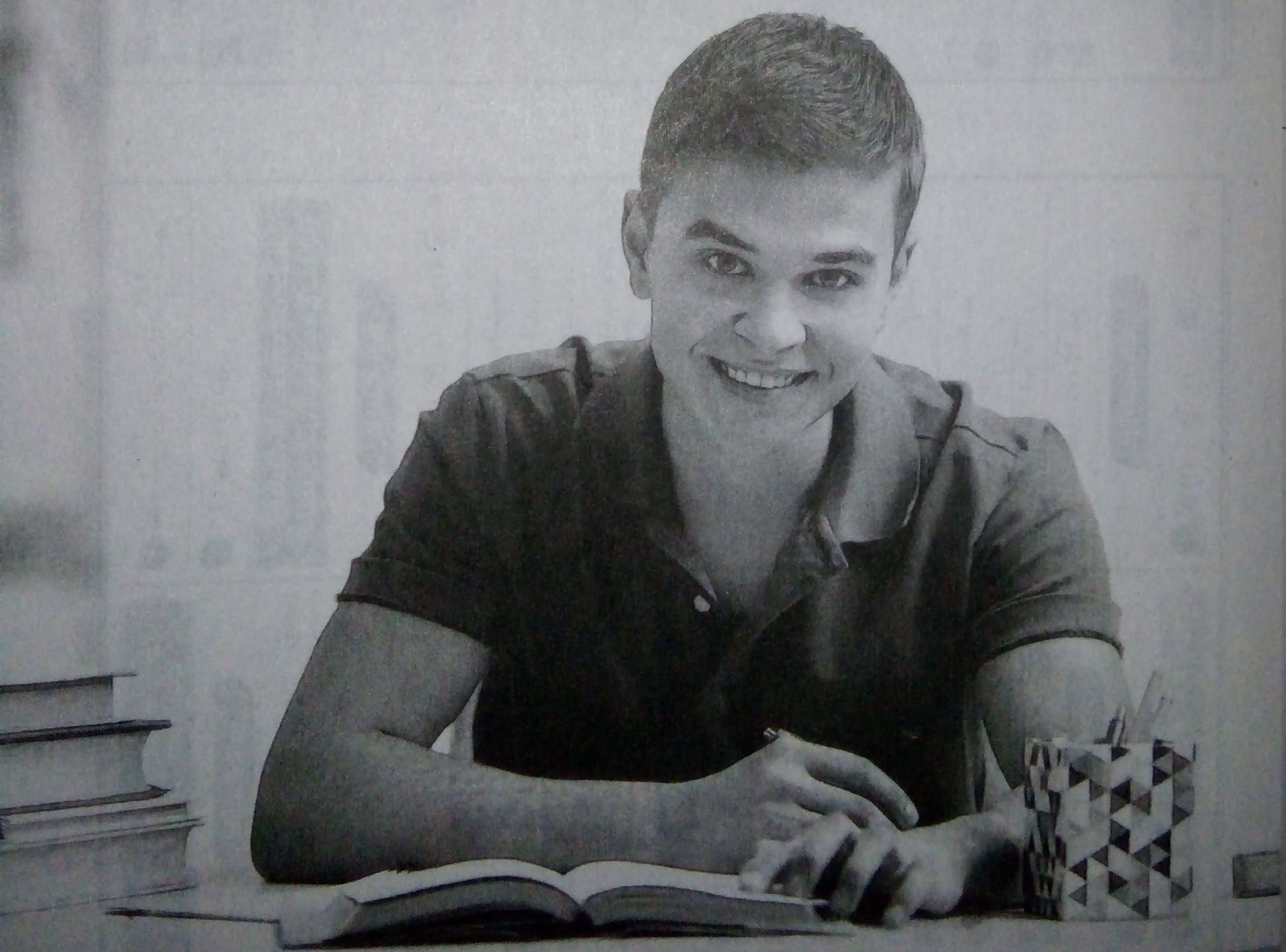
(أ) أى مستقيمين مختلفين ومتوازيين يعينان مستويًا.

(ب) كل مستقيمين مختلفين متقاطعين يشتركان فى نقطة واحدة.

(جـ) المستقيمان المتخالفان لا يجمعهما مستوى واحد.

(د) أى ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة يمر بها مستوى واحد على الأقل.

الإجابات



إرشادات اختبار الكتاب المدرسى

١

(١) (أ) (٢) (د) (٣) (د) (٤) (ب)

٢

(أ) أ = −١ ، ب = ١

(ب) $١٠٠\sqrt{٣}$ ث.جم ، $١٠٠\sqrt{٣}$ ث.جم

٣

(أ) $س^٢ + ص^٢ - ٤س + ٢ص - ٤ = ٠$

(ب) $\frac{٢٠\sqrt{٣}}{٣}$ ، $\frac{١٠\sqrt{٣}}{٣}$ ث.جم

٤

(أ) ٢٢٫٩٥٩ سم

(ب) ١٢٠ ث.جم ، ٩٠ ث.جم

٥

(أ) $ع = \sqrt{٦٥١}$ نيوتن ، هـ ≃ ٩َ ٤٠°

(ب) $١٥\sqrt{٢}$ ، $١٥\sqrt{٢}$ نيوتين.

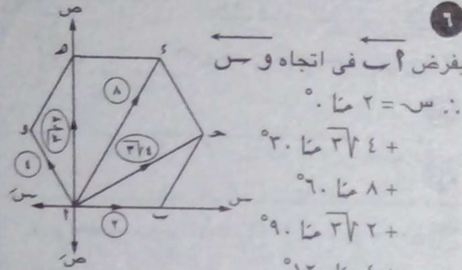
إجابات نماذج الامتحانات النهائية

النموذج الأول

١ (ب) **٢** (جـ) **٣** (أ)

٤ (جـ) **٥** (د)

٦



بفرض $\overleftarrow{أب}$ فى اتجاه $\overleftarrow{وس}$

∴ س = ٢ جتا ٠°

+ $٤\sqrt{٣}$ جتا ٣٠°

+ ٨ جتا ٦٠°

+ $٢\sqrt{٣}$ جتا ٩٠°

+ ٤ جتا ١٢٠°

$= ٢ \times ١ + ٤\sqrt{٣} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + ٨ \times \frac{١}{٢} + ٢\sqrt{٣}$

$\times$ صفر + ٤ × $\frac{-١}{٢}$ = ١٠

، ص = ٢ جا ٠° + $٤\sqrt{٣}$ جا ٣٠° + ٨ جا ٦٠°

+ $٢\sqrt{٣}$ جا ٩٠° + ٤ جا ١٢٠° = ٢ × صفر

+ $٤\sqrt{٣} \times \frac{١}{٢} + ٨ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + ٢\sqrt{٣} \times ١$

+ ٤ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = $١٠\sqrt{٣}$

∴ $\overleftarrow{ح} = ١٠\,\overleftarrow{س} + ١٠\sqrt{٣}\,\overleftarrow{ص}$

∴ $ح = \sqrt{(١٠)^٢ + (١٠\sqrt{٣})^٢}$ = ٢٠ ثقل.كجم.

، ظا هـ = $\frac{١٠\sqrt{٣}}{١٠} = \sqrt{٣}$ ∴ هـ = ٦٠°

∴ مقدار المحصلة = ٢٠ ثقل.كجم وتعمل زاوية

قياسها ٦٠° مع $\overleftarrow{وس}$

٧ (ب)

٨

(١) ∵ مساحة القاعدة = π نق^٢

∴ ٣٦ π = π نق^٢ ∴ نق = ٦ سم

، ∵ المساحة الجانبية = π نق ل

= π × ٦ × ١٠

= ٦٠ π سم^٢

(٢) المساحة الكلية = π نق (ل + نق)

= π × ٦ × (١٠ + ٦)

= ٩٦ π سم^٢

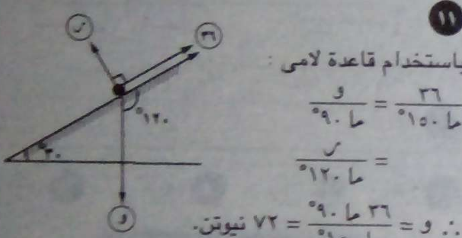
، $ع = \sqrt{(١٠)^٢ - (٦)^٢}$ = ٨ سم

(٣) الحجم = $\frac{١}{٣}$ π نق^٢ ع = $\frac{١}{٣}$ × π × (٦)^٢ × ٨

= ٩٦ π سم^٣

٩ (أ) **١٠** (أ)

١١



باستخدام قاعدة لامى :

$\frac{٣٦}{جا ١٥٠°} = \frac{و}{جا ٩٠°}$

$= \frac{ر}{جا ١٢٠°}$

∴ و = $\frac{٣٦ جا ٩٠°}{جا ١٥٠°}$ = ٧٢ نيوتن.

، ر = $\frac{٣٦ جا ١٢٠°}{جا ١٥٠°}$ = $٣٦\sqrt{٣}$ نيوتن.

١٢ (د)

١٣

$س^٢ + ص^٢ - ١٢س + ٦ص + ٢٠ = ٠$

∴ ل = −٦ ، ك = ٣ ، جـ = ٢٠

∴ مركز الدائرة هو (٦ ، −٣)

، نق = $\sqrt{ل^٢ + ك^٢ - جـ} = \sqrt{٣٦ + ٩ - ٢٠}$

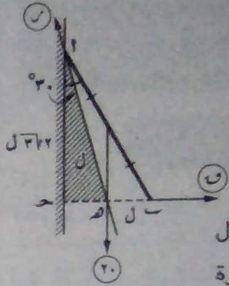
= ٥ وحدة طولية.

∴ مركز الدائرة المطلوبة (٨ ، −٥) وطول نصف قطرها = ٥

∴ المعادلة المطلوبة هى $(س - ٨)^٢ + (ص + ٥)^٢ = ٢٥$

١٤ (جـ)

(١٥)



بفرض أن : أب = ٤ ل

∴ حب = ٢ ل

∴ حـ هـ = ل

∴ أهـ = $٢\sqrt{٣}$ ل

في Δ أحـ هـ : أهـ = $\sqrt{١٣}$ ل

، ∵ Δ أحـ هـ هو مثلث القوة

∴ $\frac{٢٠}{٢\sqrt{٣}\ ل} = \frac{ق}{ل} = \frac{ر}{\sqrt{١٣}\ ل}$

∴ ق = $\frac{١٠\sqrt{٣}}{٣}$ ثقل.كجم.

، ر = $\frac{١٠\sqrt{٣٩}}{٣}$ ثقل.كجم.

(١٦) ب

(١٧)

∵ حجم الشمع = حجم المكعب = $(٢٠)^٣$ = ٨٠٠٠ سم^٣

، ∵ ١٢٪ من الشمع فقد أثناء عمليتي الصهر والتحويل.

∴ حجم المخروط = ٨٨٪ × ٨٠٠٠ = $\frac{٨٨}{١٠٠}$ × ٨٠٠٠

= ٧٠٤٠ سم^٣

، ∵ حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^٢ ع

∴ $\frac{١}{٣} \times \frac{٢٢}{٧}$ × نق^٢ × ٢١ = ٧٠٤٠

∴ نق^٢ = ٣٢٠ ∴ نق = $٨\sqrt{٥}$ سم

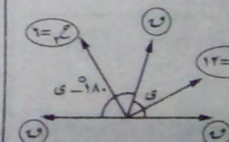
(١٨) أ **(١٩)** د **(٢٠)** ب

النموذج الثاني

(١) أ **(٢)** ب **(٣)** أ

(٤) ب **(٥)** د

(٦)



ح$_١$ = ٢ ق جتا $\frac{ى}{٢}$ = ١٢

∴ ق جتا $\frac{ى}{٢}$ = ٦ (١)

، ح$_٢$ = ٢ ق جتا $\left(\frac{١٨٠ - ى}{٢}\right)$ = ٦

∴ ق جا $\frac{ى}{٢}$ = ٣ (٢)

بتربيع المعادلتين وجمعهما :

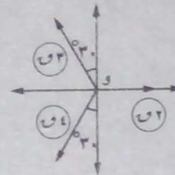
∴ ق^٢ جتا^٢ $\frac{ى}{٢}$ + ق^٢ جا^٢ $\frac{ى}{٢}$ = $٦^٢ + ٣^٢$

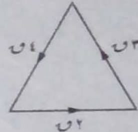
∴ ق^٢ $\left(جتا^٢ \frac{ى}{٢} + جا^٢ \frac{ى}{٢}\right)$ = ٤٥

∴ ق^٢ = ٤٥

∴ ق = $\sqrt{٤٥} = ٣\sqrt{٥}$ ثقل.كجم.

(٧)





بفرض و $\overleftarrow{س}$ في اتجاه القوة الأولى.

س = ٢ ق جتا صفر° + ٣ ق جتا ١٢٠° + ٤ ق جتا ٢٤٠°

= ٢ ق × ١ + ٣ ق × $\frac{-١}{٢}$ + ٤ ق × $-\frac{١}{٢}$

= $\frac{-٣}{٢}$ ق

، ص = ٢ ق جا صفر° + ٣ ق جا ١٢٠° + ٤ ق جا ٢٤٠°

= ٢ ق × صفر + ٣ ق × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٤ ق × $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$

= $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ ق

∴ $\overleftarrow{ح}$ = $\frac{-٣}{٢}$ ق $\overleftarrow{س}$ − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ق $\overleftarrow{ص}$

∴ ح = $\sqrt{\left(\frac{-٣}{٢}ق\right)^٢ + \left(\frac{-\sqrt{٣}}{٢}ق\right)^٢}$ = $\sqrt{٣}$ ق نيوتن.

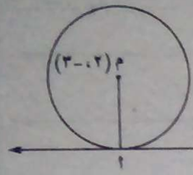
، ظا هـ = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{٢}{-٣} = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$

، ∵ س < ٠ ، ص < ٠ ∴ هـ = ٢١٠°

∴ مقدار المحصلة = $\sqrt{٣}$ ق ث جم وتعمل في اتجاه يصنع زاوية قياسها ٢١٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

(٨) أ

(٩)



∵ $\overline{مأ} \perp \overline{أب}$

∴ م أ = $\frac{|٣ \times ٢ - ٤ \times -٣ + ٢|}{\sqrt{٣^٢ + ٤^٢}}$

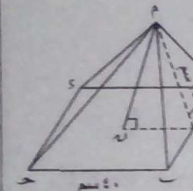
= ٤

∴ نق = ٤

∴ معادلة الدائرة هي $(س - ٢)^٢ + (ص + ٣)^٢ = ١٦$

(١٠) جـ **(١١)** ب

(١٢)



(١) في Δ م ن هـ :

م ن = $\sqrt{(٢٥)^٢ - (٢٠)^٢}$

= ١٥ سم

∴ الارتفاع = ١٥ سم

(٢) المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ × محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي = $\frac{١}{٢}$ × (٤ × ٤٠ × ٢٥)

= ٢٠٠٠ سم^٢

(٣) المساحة الكلية = ٢٠٠٠ + $(٤٠)^٢$ = ٣٦٠٠ سم^٢

(٤) الحجم = $\frac{١}{٣}$ × $(٤٠)^٢$ × ١٥ = ٨٠٠٠ سم^٣

(١٣) د

(١٤)

من الشكل وباستخدام قاعدة لامي :

$\frac{٦٠٠}{جا ٩٠°} = \frac{ق}{جا ١٥٠°} = \frac{ش}{جا ١٢٠°}$

∴ $\frac{٦٠٠}{١} = \frac{ق}{\frac{١}{٢}} = \frac{ش}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}$

∴ ق = ٣٠٠ داين

، ش = $٣٠٠\sqrt{٣}$ داين

(١٥) جـ

(١٦)

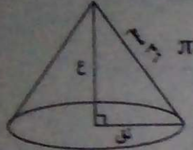


طول القوس $\overset{\frown}{أب}$

= م ب × $θ^ء$

= ٣٦ × $\frac{٢١٠}{١٨٠}$ π

= ٤٢ π سم



∵ محيط قاعدة المخروط = ٤٢ π

∴ ٢ π نق = ٤٢ π

∴ نق = ٢١

∴ ع = $\sqrt{(٣٦)^٢ - (٢١)^٢}$

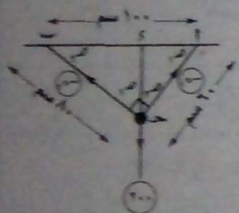
= $٣\sqrt{٩٥}$ سم = ٢٩,٢ سم

(١٧) أ **(١٨)** أ **(١٩)** ب

النموذج الثالث

(١) جـ **(٢)** أ **(٣)** جـ **(٤)** ب

(٥)



∵ $(٦٠)^٢ + (٨٠)^٢ = (١٠٠)^٢$

∴ Δ أحـ ب قائم الزاوية في حـ

، باستخدام قاعدة لامي :

$\frac{٢٠٠}{جا ٩٠°} = \frac{ش_١}{جا هـ_١} = \frac{ش_٢}{جا هـ_٢}$

، ∵ جا هـ$_١$ = $\frac{ب حـ}{أب} = \frac{٨٠}{١٠٠} = \frac{٤}{٥}$

، جا هـ$_٢$ = $\frac{أحـ}{أب} = \frac{٦٠}{١٠٠} = \frac{٣}{٥}$

∴ $\frac{٢٠٠}{١} = \frac{ش_١}{\frac{٤}{٥}} = \frac{ش_٢}{\frac{٣}{٥}}$

∴ ش$_١$ = ٢٠٠ × $\frac{٤}{٥}$ = ١٦٠ ث جم

، ش$_٢$ = ٢٠٠ × $\frac{٣}{٥}$ = ١٢٠ ث جم.

6

من الشكل:

ع = √((١٥)² − (٩)²)

= ١٢ سم

∴ حجم الهرم = ⅓ مساحة القاعدة × ع

= ⅓ × (١٨)² × ١٢ = ١٢٩٦ سم³

7 (جـ)

8

ح = √(ق₁² + ق₂² + ٢ ق₁ ق₂ جتا ى)

= √((٦)² + (١٢)² + ٢ × ٦ × ١٢ × جتا ١٢٠°)

= ٦ √٣ نيوتن

∴ ظا هـ = (ق₂ جا ى) / (ق₁ + ق₂ جتا ى) = (١٢ جا ١٢٠°) / (٦ + ١٢ جتا ١٢٠°)

= ٦√٣ / صفر

∴ هـ = ٩٠° (مع القوة الأولى)

9 (ب)

10

بفرض أن:

و س هو اتجاه القوة الأولى

س = ٨ جتا صفر°

+ ٤ √٣ جتا ٣٠°

+ ٦ √٣ جتا ١٥٠°

+ ١٤ جتا ٢٤٠°

= ٨ × ١ + ٤ √٣ × √٣/٢ + ٦ √٣ × (−√٣/٢)

+ ١٤ × (−½) = −٢

، ص = ٨ جا صفر + ٤ √٣ جا ٣٠° + ٦ √٣ جا ١٥٠°

+ ١٤ جا ٢٤٠° = ٨ × صفر + ٤ √٣ × ½

+ ٦ √٣ × ½ + ١٤ × (−√٣/٢) = −٢ √٣

∴ ح = −٢ س − ٢ √٣ ص

∴ ح = √((−٢)² + (−٢ √٣)²) = ٤ نيوتن

، ظا هـ = −٢√٣ / −٢ = √٣

، ∵ س < ٠ ، ص < ٠ ∴ هـ = ٢٤٠°

∴ مقدار المحصلة = ٤ نيوتن وتصنع زاوية قياسها ٢٤٠° مع و س

11 (أ) **12** (ب) **13** (جـ)

14

∵ القوى متزنة

∴ ١٠٠ / جا ١٢٠° = ق / جا ٩٠°

= ر / جا ١٥٠°

∴ ق = (١٠٠ √٣) / ٣ نيوتن

، ر = (٢٠٠ √٣) / ٣ نيوتن

15 (ب)

16

∵ مركز الدائرة الأولى م (١ ، −٣)

، الدائرة الثانية:

س² + ص² − ٢ س + ٦ ص + ١٥/٤ = ٠

∴ مركز الدائرة الثانية م = (١ ، −٣)

∴ الدائرتان لهما نفس المركز

∴ الدائرتان متحدتان المركز

نق₁ = √((١)² + (−٣)² − ١) = ٣ وحدة طول

نق₂ = √((١)² + (−٣)² − ١٥/٤) = ٢٫٥ وحدة طول

17 (ب) **18** (ب) **19** (د)

النموذج الرابع

1 (د) **2** (ب) **3** (جـ)

4

من هندسة الشكل

جـ ء = ٢ √١٠ سم

∵ القوى متزنة

∴ س = صفر

، ص = صفر

∴ ق جا صفر + ٥ جتا هـ − ٦ √١٠ جتا ى

+ ك جتا ٩٠° = صفر

∴ ق + ٥ × ⅘ − ٦ √١٠ × ٢/(٢ √١٠) + ك × صفر

= صفر

∴ ق = ٢ نيوتن

، ق جا صفر + ٥ جا هـ − ٦ √١٠ جا ى + ك جا ٩٠°

= صفر

∴ صفر + ٥ × ⅗ − ٦ √١٠ × ٦/(٢ √١٠) + ك × ١

= صفر

∴ ك = ١٥ نيوتن

5 (د)

6

الحجم = ⅓ × مساحة القاعدة × ع

= ⅓ × π (٣)² × ٤

= ١٢ π سم³

7

طول نصف قطر قاعدة المخروط = ٦ وحدات

، ارتفاعه = ٨ وحدات

∴ حجم المخروط = ⅓ × π (٦)² × ٨

= ٩٦ π وحدة مكعبة

، طول الراسم = √((٦)² + (٨)²) = ١٠ وحدات

∴ المساحة الكلية = π نق (ل + نق)

= π × ٦ (١٠ + ٦)

= ٩٦ π وحدة مربعة

8 (د) **9** (ب)

10

باستخدام قاعدة لامي

و / جا (هـ + ٣٠°) = ١٢ / جا ٦٠°

= ١٢ √٣ / (جا (٦٠° − هـ))

∴ جا هـ = (١٢ √٣ × جا ٦٠°) / ١٢ = √٣/٢ ∴ هـ = ٦٠°

∴ و = (١٢ جا (٦٠° + ٣٠°)) / جا ٦٠° = ٢٤ نيوتن

11 (أ)

12

من الشكل ع = √((١٥)² − (٩)²) = ١٢ سم

∴ حجم الهرم = ⅓ مساحة القاعدة × ع

= ⅓ × (١٨)² × ١٢ = ١٢٩٦ سم³

13

بفرض أن المركز (س ، ٠) ∈ محور السينات

∴ المركز يقع على أبعاد متساوية من (١ ، ٣) ، (٣ ، −١)

∴ √((س − ١)² + (٠ − ٣)²)

= √((س − ٣)² + (٠ − (−١))²)

∴ س² − ٢ س + ١ + ٩ = س² − ٦ س + ٩ + ١

∴ س² − ٢ س + ١٠ = س² − ٦ س + ١٠

∴ ٤ س = ٢٠ ∴ س = ٥

∴ المركز = (٥ ، ٠)

∴ نق = √((٥ − ١)² + (٠ − ٣)²) = ٥

∴ معادلة الدائرة هي (س − ٥)² + ص² = ٢٥

١٤ (أ) ١٥ (د) ١٦ (أ)

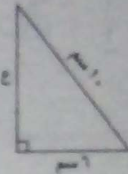
١٧ (جـ) ١٨ (جـ) ١٩ (ب)

النموذج الخامس

١ (د) ٢ (أ) ٣ (د)

٤ (ب) ٥ (جـ)

٦



∵ المساحة الكلية

$= \pi$ نق (ل + نق)

∴ ٩٦ π = π × نق × (١٠ + نق)

∴ ٩٦ = نق × (١٠ + نق)

∴ $نق^2$ + ١٠ نق − ٩٦ = ٠

∴ نق = −١٦ (مرفوض) أ، نق = ٦ سم

∴ ع = $\sqrt{(١٠)^2 - (٦)^2}$ = ٨ سم

∴ حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π $(٦)^2$ × ٨ = ٩٦ π $سم^3$

٧

من الشكل :

Δ أ ب جـ يمثل مثلث القوى

، أ ب = $\sqrt{(٢٠)^2 - (١٠)^2}$

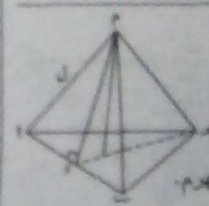
= ١٠ $\sqrt{٣}$

∴ $\frac{٣٠}{١٠\sqrt{٣}} = \frac{ر}{١٠} = \frac{ش}{٢٠}$

∴ ش = $\frac{٣٠ \times ٢٠}{١٠\sqrt{٣}}$ = ٢٠ $\sqrt{٣}$ ث كجم

، ر = $\frac{٣٠ \times ١٠}{١٠\sqrt{٣}}$ = ١٠ $\sqrt{٣}$ ث كجم

٨



م أ ب مثلث متساوي الأضلاع

ارتفاعه م و = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ل

، ∵ م و هو الارتفاع الجانبي للهرم

∴ المساحة الكلية للهرم = مساحة الوجه الواحد × ٤

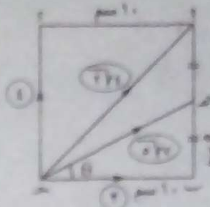
= $\frac{١}{٢}$ × ل × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ل × ٤

= $\sqrt{٣}$ $ل^2$ $سم^2$

---

٩ (جـ)

١٠



اعتبر $\overrightarrow{جـ ب}$ ، $\overrightarrow{جـ و}$

هو المحوران و س ، و ص

∴ س = ٢ جتا صفر°

+ ٧ $\sqrt{٥}$ جتا θ

+ ٤ $\sqrt{٢}$ جتا ٤٥° + ٤ جتا ٩٠°

= ٢ + ٧ $\sqrt{٥}$ × $\frac{١٠}{٥\sqrt{٥}}$ + ٤ $\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

+ صفر = ٣٠ نيوتن

، ص = ٢ جا صفر + ٧ $\sqrt{٥}$ جا θ + ٤ $\sqrt{٢}$ جا ٤٥°

+ ٤ جا ٩٠° = صفر + ٧ $\sqrt{٥}$ × $\frac{٥}{٥\sqrt{٥}}$ + ٤ $\sqrt{٢}$

× $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٤ = ١٥ نيوتن

∴ ح = $\sqrt{(٣٠)^2 + (١٥)^2}$ = ٢٥ نيوتن

، ظا هـ = $\frac{ص}{س} = \frac{١٥}{٢٠} = \frac{٣}{٤}$

∴ θ = ٣٦° ٥٢َ مع القوى الأولى

---

١١ (ب)

١٢

مركز الدائرة هو نقطة منتصف $\overline{أ ب}$

∴ م = $\left(\frac{٢ + (-٤)}{٢} ، \frac{٣ + ٩}{٢}\right)$ = (−١ ، ٦)

، طول قطر الدائرة = $\sqrt{(٢ - (-٤))^2 + (٣ - ٩)^2}$

= ٦ $\sqrt{٢}$

∴ $(س + ١)^2 + (ص - ٦)^2 = (٣\sqrt{٢})^2$

∴ $س^2$ + ٢ س + ١ + $ص^2$ − ١٢ ص + ٣٦ = ١٨

∴ الصورة العامة لمعادلة الدائرة هي :

$س^2$ + $ص^2$ + ٢ س − ١٢ ص + ١٩ = ٠

١٣

∵ $ش_1$ + $ش_2$ = ٢٥ نيوتن (١)

∴ $ش_1$ − $ش_2$ = ١٣ نيوتن (٢)

بجمع المعادلتين (١) ، (٢) :

∴ ٢ $ش_1$ = ٣٨ ∴ $ش_1$ = ١٩ نيوتن

، من (١) : ∴ $ش_2$ = ٦ نيوتن

---

١٤ (ب) ١٥ (جـ) ١٦ (د)

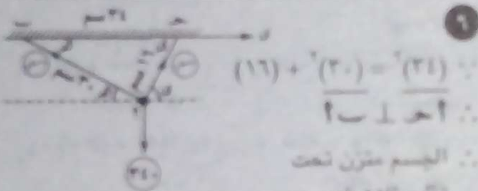
١٧ (د) ١٨ (د)

النموذج السادس

١ (جـ) ٢ (د) ٣ (د)

٤ (ب) ٥ (جـ)

٦



∵ $(٣٤)^2 = (٣٠)^2 + (١٦)$

∴ $\overline{أ جـ} \perp \overline{ب أ}$

∴ الجسم متزن تحت تأثير ثلاث قوى

∴ $\frac{٣٤٠}{جا ٩٠°} = \frac{ش_1}{جا (٩٠° + هـ)} = \frac{ش_2}{جا (٩٠° + ى)}$

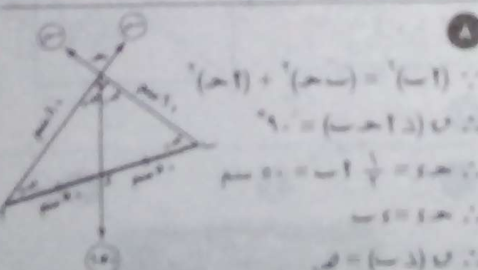
∴ $ش_1$ = $\frac{٣٤٠ \times جتا هـ}{جا ٩٠°}$ = $\frac{٣٤٠ \times \frac{٣٠}{٣٤}}{١}$ = ٣٠٠ ث كجم

∴ $ش_2$ = $\frac{٣٤٠ \times جتا ى}{جا ٩٠°}$ = $\frac{٣٤٠ \times \frac{١٦}{٣٤}}{١}$ = ١٦٠ ث كجم

---

٧ (أ)

٨



∵ $(أ ب)^2 = (ب جـ)^2 + (أ جـ)^2$

∴ ق (∠ أ جـ ب) = ٩٠°

∴ جـ و = $\frac{١}{٢}$ أ ب = ٥٠ سم

∴ جـ و = و ب

∴ ق (∠ ب) = $هـ_2$

، جـ و = أ و ∴ ق (∠ أ) = $هـ_1$

∴ $\frac{ش_1}{جا (٩٠° + هـ_1)} = \frac{ش_2}{جا (٩٠° + هـ_2)} = \frac{١٥٠}{جا ٩٠°}$

∴ $\frac{ش_1}{جتا هـ_1} = \frac{ش_2}{جتا هـ_2} = \frac{١٥٠}{١}$

∴ $\frac{ش_1}{\frac{٦}{١٠}} = \frac{ش_2}{\frac{٨}{١٠}} = \frac{١٥٠}{١}$

∴ $ش_1$ = ٩٠ ث كجم ، $ش_2$ = ١٢٠ ث كجم

---

٩ (د)

١٠



∵ حجم الهرم = ١٢٩٦

∴ $\frac{١}{٣}$ × $(١٨)^2$ × ع = ١٢٩٦

∴ ع = ١٢ سم

∴ الارتفاع الجانبي = $\sqrt{(١٢)^2 + (٩)^2}$ = ١٥ سم

∴ المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة

× الارتفاع الجانبي = $\frac{١}{٢}$ × (٤ × ١٨) × ١٥

= ٥٤٠ $سم^2$

---

١١ (أ)

١٢

∵ محيط القاعدة = ٦ π

∴ ٢ π نق = ٦ π

∴ نق = ٣ سم

∵ حجم المخروط = ٢٧ π

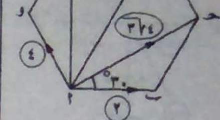
∴ $\frac{١}{٣}$ × π $(٣)^2$ × ع = ٢٧ π

∴ ع = ٩ سم

---

١٣ (جـ)

١٤



باعتبار الاتجاه و س هو أ ب

∴ س = ٢ جتا صفر° + ٤ √٣ جتا ٣٠° + ٨ جتا ٢٤٠° + ٢ √٣ جتا ٩٠° + ٤ جتا ١٢٠°

= ٢ + ٦ − ٤ + صفر − ٢ = ٢ ث.كجم.

، ص = ٢ جا صفر° + ٤ √٣ جا ٣٠° + ٨ جا ٢٤٠° + ٢ √٣ جا ٩٠° + ٤ جا ١٢٠°

= صفر + ٢ √٣ − ٤ √٣ + ٢ √٣ + ٢ √٣

= ٢ √٣ ث.كجم.

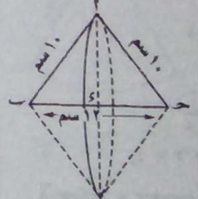
∴ ح = √((٢)² + (٢ √٣)²) = ٤ ث.كجم.

، ظا هـ = ٢ √٣ / ٢ = √٣ ∴ هـ = ٦٠°

∴ مقدار المحصلة = ٤ ث.كجم فى اتجاه أ ء

١٥ (جـ)

١٦



الجسم الناشئ من الدوران حول ب حـ عبارة عن مخروطين لهما نفس القاعدة ومتطابقان

∴ أ ء = √((١٠)² − (٦)²) = ٨ سم

∴ حجم الجسم الناتج = ٢ (١/٣ π نق² ع)

= ٢ × ١/٣ × π × (٨)² × ٦

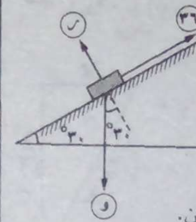
= ٢٥٦ π سم³

١٧ (أ) **١٨** (جـ) **١٩** (جـ) **٢٠** (جـ)

النموذج السابع

١ (جـ) **٢** (أ) **٣** (أ) **٤** (ب)

٥



∵ الجسم متزن تحت تأثير ثلاث قوى

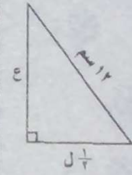
∴ و / جا ٩٠° = ر / جا ١٢٠° = ٣٦ / جا ١٥٠°

∴ و = (٣٦ × جا ٩٠°) / جا ١٥٠° = ٧٢ نيوتن.

، ر = (٣٦ × جا ١٢٠°) / جا ١٥٠° = ٣٦ √٣ نيوتن.

٦ (ب) **٧** (أ)

٨



∵ المساحة الجانبية = ٢٤٠

∴ ١/٢ (محيط القاعدة) × الارتفاع الجانبى = ٢٤٠

وبفرض طول ضلع القاعدة = ل سم

∴ ١/٢ × ٤ ل × ١٢ = ٢٤٠

∴ ل = ١٠ سم

∴ ع = √((١٢)² − (٥)²) = √١١٩ سم

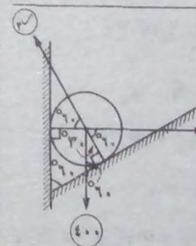
، حجم الهرم = ١/٣ × مساحة القاعدة × ع

= ١/٣ × (١٠)² × √١١٩

= ١٠٠/٣ √١١٩ ≃ ٣٦٣,٦ سم³

٩ (جـ)

١٠



∵ المستويان أملسان

∴ كلاً من ر١ ، ر٢ عمودى على مستويهما ويمران بمركز الكرة وبتطبيق قاعدة لامى

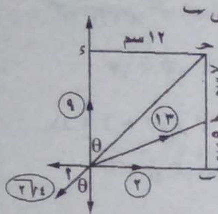
∴ ر١ / جا ١٥٠° = ر٢ / جا ٩٠° = ٤٠٠ / جا ١٢٠°

∴ ر١ = (٤٠٠ × جا ١٥٠°) / جا ١٢٠° = ٤٠٠ √٣ / ٣ ث.كجم.

∴ ر٢ = (٤٠٠ × جا ٩٠°) / جا ١٢٠° = ٨٠٠ √٣ / ٣ ث.كجم.

١١ (د) **١٢** (ب)

١٣



∵ Δ أ هـ ب قائم الزاوية فى ب

∴ أ هـ = √((٥)² + (١٢)²) = ١٣ سم

∴ جا (∡ب أ هـ) = ٥/١٣

، جتا (∡ب أ هـ) = ١٢/١٣

، ∵ أ حـ قطر فى المربع أ ب حـ ء

∴ θ = ٤٥°

∴ س = ٢ جتا صفر° + ١٣ جتا (∡ب أ هـ) + ٩ جتا ٩٠° + ٤ √٢ جتا ٢٢٥°

= ٢ × ١ + ١٣ × ١٢/١٣ + ٩ × صفر + ٤ √٢ × (−١/√٢) = ١٠

، ص = ٢ جا صفر° + ١٣ جا (∡ب أ هـ) + ٩ جا ٩٠° + ٤ √٢ جا ٢٢٥°

= ٢ × صفر + ١٣ × ٥/١٣ + ٩ × ١ + ٤ √٢ × (−١/√٢) = ١٠

∴ ح = ١٠ س + ١٠ ص

∴ ح = √((١٠)² + (١٠)²) = ١٠ √٢ ث.كجم.

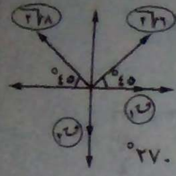
، ظا هـ = ١٠/١٠ = ١ ، ∵ س > ٠

، ص > ٠ ∴ هـ = ٤٥°

∴ ح يؤثر فى اتجاه أ حـ

١٤ (جـ)

١٥



∵ س = ٧

، س = ق١ جتا صفر° + ٦ √٢ جتا ٤٥° + ٨ √٢ جتا ١٣٥° + ق٢ جتا ٢٧٠°

∴ ق١ + ٦ − ٨ + صفر = ٧

∴ ق١ = ٩ ث.كجم.

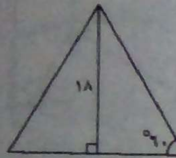
، ∵ ص = صفر

∴ ق١ جا صفر° + ٦ √٢ جا ٤٥° + ٨ √٢ جا ١٣٥° + ق٢ جا ٢٧٠° = صفر

∴ صفر + ٦ + ٨ + (− ق٢) = صفر

∴ ق٢ = ١٤ ث.كجم.

١٦



المجسم الناتج عبارة عن هرم ثلاثى منتظم الوجوه ارتفاعه الجانبى = ١٨ سم وبدراسة وجه واحد من أوجهه نجد أن جا ٦٠° = ١٨/ل حيث ل طول ضلعه

∴ ل = ١٨ / جا ٦٠° = ١٢ √٣ سم

∴ المساحة الكلية

= ٤ × مساحة الوجه الواحد

= ٤ × (١/٢ × (١٢ √٣)² × جا ٦٠°)

= ٤٣٢ √٣ سم² ≃ ٧٤٨,٢ سم²

∴ ارتفاع الهرم = √((١٨)² − (٦)²) = ١٢ √٢ سم

∴ حجم الهرم

= ١/٣ × (١/٢ × (١٢ √٣)² × جا ٦٠°) × ١٢ √٢

= ٤٣٢ √٦ ≃ ١٠٥٨ سم³

١٧ (ب) **١٨** (ب)

النموذج الثامن

1 (جـ) 2 (د) 3 (د)

4 (ب) 5 (د)

6

∵ حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

∴ $8\sqrt{3}$ = $\frac{1}{3}$ × مساحة القاعدة × 4

∴ مساحة القاعدة = $6\sqrt{3}$ سم^2

∴ $\frac{6}{4}$ × س^2 ظتا $\frac{\pi}{6}$ = $6\sqrt{3}$

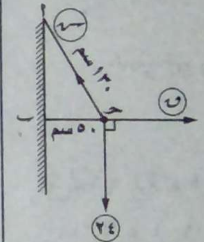
∴ س^2 = 4 ∴ س = 2

∴ طول ضلع السداسى = 2 سم

∴ محيط القاعدة = 2 × 6 = 12 سم

7 (جـ) 8 (أ)

9



∵ أب = $\sqrt{(130)^2 - (50)^2}$

= 120 سم

ومن الشكل نجد أن :

Δ أب حـ هو مثلث القوى

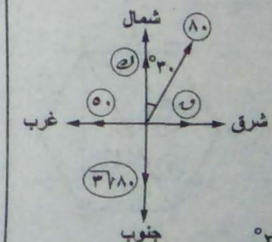
∴ $\frac{ش}{120} = \frac{ق}{50} = \frac{24}{120}$

∴ ق = $\frac{24 \times 50}{120}$ = 10 نيوتن.

، ش = $\frac{24 \times 130}{120}$ = 26 نيوتن.

10 (د)

11



∵ س = ق جتا صفر

+ 80 جتا 60°

+ ك جتا 90°

+ 50 جتا 180°

+ $80\sqrt{3}$ جتا 270°

= ق × 1 + 80 × $\frac{1}{2}$ + ك × صفر + 50 × −1

+ $80\sqrt{3}$ × صفر = ق − 10

، ص = ق جا صفر + 80 جا 60° + ك جا 90°

+ 50 جا 180° + $80\sqrt{3}$ جا 270°

= ق × صفر + 80 × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ + ك × 1

+ 50 × صفر + $80\sqrt{3}$ × −1 = ك − $40\sqrt{3}$

∴ $\vec{ح}$ = (ق − 10) $\vec{س}$ + (ك − $40\sqrt{3}$) $\vec{ص}$ (1)

، ∵ ح = 40 نيوتن فى اتجاه 60° شمال شرق.

∴ $\vec{ح}$ = (40 جتا 60°) $\vec{س}$ + (40 جا 60°) $\vec{ص}$

= 20 $\vec{س}$ + $20\sqrt{3}$ $\vec{ص}$ (2)

من (1) ، (2) :

∴ ق − 10 = 20

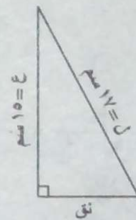
∴ ق = 30 نيوتن.

، ك − $40\sqrt{3}$ = $20\sqrt{3}$

∴ ك = $60\sqrt{3}$ نيوتن.

12 (د)

13



طول نصف القطر

= $\sqrt{(17)^2 - (15)^2}$

= 8 سم

∴ المساحة الكلية = π نق (ل + نق)

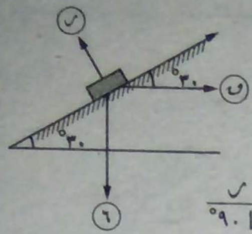
= π × 8 (17 + 8) = 200π سم^2

، حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ π نق^2 ع

= $\frac{1}{3}$ × π × $(8)^2$ × 15 = 320π سم^3

14 (ب)

15



∵ الجسم متزن تحت تأثير ثلاث قوى وبتطبيق قاعدة لامى

$\frac{6}{جا 120°} = \frac{ق}{جا 150°} = \frac{ر}{جا 90°}$

∴ ق = $\frac{6 \times جا 150°}{جا 120°} = \frac{6 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}$ ثقل.جم.

، ر = $\frac{6 \times جا 90°}{جا 120°} = \frac{6 \times 1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4\sqrt{3}$ ثقل.جم.

16

بالنسبة للدائرة د$_1$: نق$_1$ = $\sqrt{ك}$ ، م$_1$ = (−2 ، −11)

، بالنسبة للدائرة د$_2$: نق$_2$ = $\sqrt{16}$ = 4 ، م$_2$ = (3 ، 1)

∴ المسافة بين المركزين م$_1$م$_2$

= $\sqrt{(3+2)^2 + (1+11)^2}$

= 13 وحدة طول.

فى حالة أن الدائرتين متماستين من الخارج

∴ م$_1$م$_2$ = نق$_1$ + نق$_2$ ∴ $\sqrt{ك}$ + 4 = 13

∴ $\sqrt{ك}$ = 9   ∴ ك = 81

، فى حالة أن الدائرتين متماستين من الداخل فإن :

م$_1$م$_2$ = |نق$_1$ − نق$_2$| ∴ |$\sqrt{ك}$ − 4| = 13

∴ $\sqrt{ك}$ − 4 = 13

ومنها $\sqrt{ك}$ = 17 ومنها ك = 289

أ، $\sqrt{ك}$ − 4 = −13 ومنها $\sqrt{ك}$ = −9 (مرفوض)

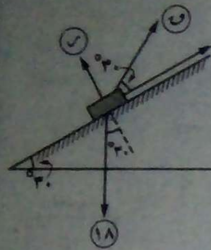
∴ قيم ك هى 81 أ، 289

17 (د) 18 (د)

النموذج التاسع

1 (جـ) 2 (جـ) 3 (ب)

4



∵ الجسم متزن تحت تأثير ثلاث قوى مستوية وبتطبيق قاعدة لامى

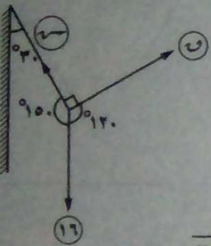
∴ $\frac{18}{جا 60°} = \frac{ق}{جا 150°}$

= $\frac{ر}{جا 150°}$

∴ ق = ر = $\frac{18 \times جا 150°}{جا 60°} = 6\sqrt{3}$ ثقل.كجم.

5 (أ) 6 (جـ) 7 (د)

8



بتطبيق قاعدة لامى

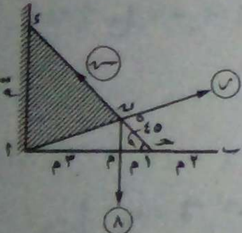
∴ $\frac{ش}{جا 120°} = \frac{ق}{جا 150°}$

= $\frac{16}{جا 90°}$

∴ $\frac{ق}{\frac{1}{2}} = \frac{ش}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 16$

∴ ق = 8 نيوتن ، ش = $8\sqrt{3}$ نيوتن.

9



∵ أحـ = أء = 4 متر

∴ ق(∠ أحـء) = 45°

∴ حـء = $4\sqrt{2}$ متر

من Δ م حـ ن :

∴ م ن = 1 متر

، ق(∠ ن حـ م) = 45° ، ق(∠ ن م حـ) = 90°

∴ ن حـ = $\sqrt{2}$ متر

∴ ء ن = $4\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ متر

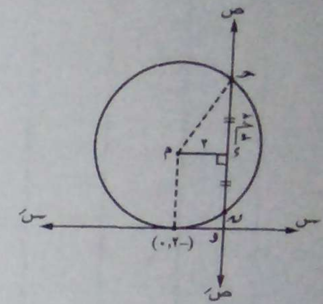
، من Δ أ م ن : أ ن = $\sqrt{10}$ متر

∵ Δ أ ب د هو مثلث القوى

∴ $\frac{ق}{\sqrt{10}} = \frac{ك}{3\sqrt{2}} = \frac{8}{4}$

∴ ق = $2\sqrt{10}$ ث.كجم ، ك = $6\sqrt{2}$ ث.كجم.

(10)



نق = $\sqrt{(2)^2 + (2\sqrt{3})^2}$ = 4 وحدة طول.

∴ مركز الدائرة م = (−2 ، 4)

∴ حـ = 4 + 16 − 16 = 4

∴ معادلة الدائرة هى :

$س^2 + ص^2 + 4س − 8ص + 4 = 0$.

(11) ب

(12)

∵ طول راسم المخروط = 18 سم.

، ∵ محيط دائرة قاعدة المخروط = طول القوس أب

= نق × هـ = 18 × $\frac{60 \times \pi}{180}$ = 6π

، 2π نق = 6π ∴ نق = 3 سم

، ع = $\sqrt{ل^2 − نق^2} = \sqrt{(18)^2 − (3)^2} = 3\sqrt{35}$

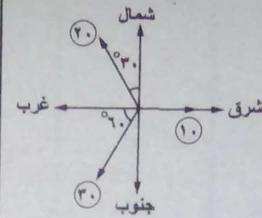
∴ حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ π $نق^2$ ع

= $\frac{1}{3}$ × π × $(3)^2$ × $3\sqrt{35}$

≃ 167.3 $سم^3$

(13) جـ

(14)



س = 10 جتا صفر° + 20 جتا 120° + 30 جتا 240°

= 10 + 20 × $-\frac{1}{2}$ + 30 × $-\frac{1}{2}$ = −15

، ص = 10 جا صفر° + 20 جا 120° + 30 جا 240°

= صفر + 20 × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ + 30 × $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ = $-5\sqrt{3}$

∴ $\vec{ح}$ = −15 $\vec{س}$ − $5\sqrt{3}$ $\vec{ص}$

∴ ح = $\sqrt{(-15)^2 + (-5\sqrt{3})^2}$ = $10\sqrt{3}$ نيوتن

، ظا هـ = $\frac{-5\sqrt{3}}{-15} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ∴ هـ = 210°

∴ خط عمل المحصلة فى اتجاه 30° جنوب الغرب.

(15) ب **(16)** جـ **(17)** د **(18)** د

النموذج العاشر

(1) د **(2)** أ **(3)** جـ

(4) أ **(5)** أ

(6)

الارتفاع الجانبى = $\sqrt{(10\sqrt{3})^2 + (10)^2}$

= 20 سم.

المساحة الجانبية = $\frac{1}{2}$ (محيط القاعدة) × الارتفاع الجانبى

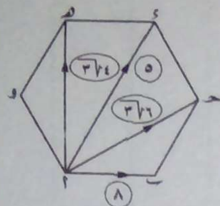
= $\frac{1}{2}$ × (4 × 20) × 20 = 800 $سم^2$

، الحجم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × ع

= $\frac{1}{3}$ × $(20)^2$ × $10\sqrt{3}$ = $\frac{4000\sqrt{3}}{3}$ $سم^3$

(7) ب

(8)



س = 8 جتا صفر° + $6\sqrt{3}$ جتا 30° + 5 جتا 60° + $4\sqrt{3}$ جتا 90°

= 8 + 9 + $\frac{5}{2}$ + صفر = $\frac{39}{2}$

، ص = 8 جا صفر° + $6\sqrt{3}$ جا 30° + 5 جا 60° + $4\sqrt{3}$ جا 90° = صفر + $3\sqrt{3}$ + $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ + $4\sqrt{3}$ = $\frac{19\sqrt{3}}{2}$

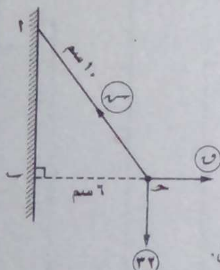
∴ $\vec{ح}$ = $\frac{39}{2}$ $\vec{س}$ + $\frac{19\sqrt{3}}{2}$ $\vec{ص}$

∴ ح = $\sqrt{651}$ نيوتن.

، ظا هـ = $\frac{\frac{19\sqrt{3}}{2}}{\frac{39}{2}} = \frac{19\sqrt{3}}{39}$

∴ هـ = 40° 9َ مع اتجاه $\vec{أب}$

(9)



أب = $\sqrt{(10)^2 − (6)^2}$ = 8

من الشكل نجد أن :

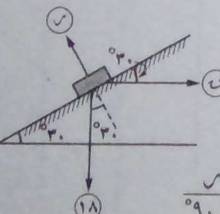
Δ أ ب حـ هو مثلث القوى

∴ $\frac{ك}{10} = \frac{ق}{6} = \frac{32}{8}$

∴ ق = $\frac{32 \times 6}{8}$ = 24 نيوتن.

، ك = $\frac{32 \times 10}{8}$ = 40 نيوتن.

(10)



∵ الجسم متزن تحت تأثير ثلاث قوى

∴ بتطبيق قاعدة لامى :

$\frac{18}{جا 120°} = \frac{ق}{جا 150°} = \frac{ر}{جا 90°}$

∴ ق = $\frac{18 \times جا 150°}{جا 120°}$ = $6\sqrt{3}$ نيوتن.

، ر = $\frac{18 \times جا 90°}{جا 120°}$ = $12\sqrt{3}$ نيوتن.

(11) د

(12)

∵ حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ × π $(2)^2$ × 12 = 16π $سم^3$

∴ حجم الماء المرتفع فى الإناء الأسطوانى = 16π $سم^3$

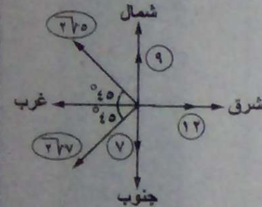
∴ 16π = π $نق^2$ × 1

∴ $نق^2$ = 16 ∴ نق = 4 سم

∴ طول قطر قاعدة الإناء = 4 × 2 = 8 سم

(13) ب

(14)



س = 12 جتا صفر° + 9 جتا 90° + $5\sqrt{2}$ جتا 135° + $7\sqrt{2}$ جتا 225° + 7 جتا 270°

= 12 + صفر − 5 − 7 + صفر = صفر

، ص = 12 جا صفر° + 9 جا 90° + $5\sqrt{2}$ جا 135° + $7\sqrt{2}$ جا 225° + 7 جا 270°

= صفر + 9 + 5 − 7 − 7 = صفر

∴ $\vec{ح}$ = صفر ∴ المجموعة متزنة.

(15) أ **(16)** أ **(17)** د **(18)** د